Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1942. Heft I/III

Sitzungen Januar – Dezember

München 1942
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen

Verallgemeinerung einer Rekursionsformel für gewisse Polyeder-Volumina.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Januar 1942.

1. Seien p und q ganze positive Zahlen, $p + q = n$. Die cartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ im n-dimensionalen Raum, dessen positiven Teil $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ wir $\mathfrak{T}$ nennen, mögen auch mit $y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q$ bezeichnet werden $(y_\mu = x_\mu, z_\mu = x_{p+\mu})$; für irgend einen Punkt $(x^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ aus $\mathfrak{T}$ sei $k\,(x^0)$ das durch $0 < x_\nu \leqq x_\nu^0$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gekennzeichnete Parallelotop; für irgend ein System positiver Zahlen $(a) = (a_1, \ldots, a_q)$ sei $\mathfrak{S}^{(a)}_{(0)}$ der durch

$$0 < z_\mu \leqq a_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, q) \tag{1}$$

gekennzeichnete Teil von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}^{(\infty)}_{(0)} = \mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}^{(a)}_{(b)} = \mathfrak{S}^{(a)}_{(0)} - \mathfrak{S}^{(b)}_{0}$ (wobei $0 < b_\mu < a_\mu$ für $1 \leqq \mu \leqq q$), $\mathfrak{S}^{(\infty)}_{(b)} = \mathfrak{S}^{(\infty)}_{(0)} - \mathfrak{S}^{(b)}_{(0)}$. Analog sei $\mathfrak{Z}^{(a)}_{(0)}$ der durch (1) gekennzeichnete Teil des q-dimensionalen $(z_1 \ldots z_q)$-Raumes und entsprechende Bedeutung haben $\mathfrak{Z}^{(\infty)}_{(0)}$, $\mathfrak{Z}^{(a)}_{(b)}$ und $\mathfrak{Z}^{(\infty)}_{(b)}$.

Die Koordinaten der $l\,(\geqq 2)$ Punkte

$$P_\lambda = (x_1^{(\lambda)}, \ldots, x_n^{(\lambda)}) = (y_1^{(\lambda)}, \ldots, z_q^{(\lambda)}) \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

mögen den Ungleichungen

$$z'_\mu > z''_\mu > \ldots > z_\mu^{(l)} \qquad (\mu = 1, \ldots, q) \tag{2}$$

genügen; zur Abkürzung werde mit $\mathfrak{S}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{Z}_\lambda$ $(0 \leqq \lambda \leqq l)$ derjenige Raumteil $\mathfrak{S}^{(a)}_{(b)}$ bzw. $\mathfrak{Z}^{(a)}_{(b)}$ bezeichnet, den man für $a_\mu = z_\mu^{(\lambda)}$, $b_\mu = z_\mu^{(\lambda+1)}$ erhält (für $\lambda = 0$ ist $(a) = (\infty)$, für $\lambda = l$ ist $(b) = (0)$ zu setzen).

2. Wir betrachten nun das durch Vereinigung der Parallelotope $k\,(P_\rho) = k\,(x^{(\rho)})$ $(\rho = 1, \ldots, l)$ entstehende Polyeder $\Pi = \Pi\,(P_1, \ldots, P_l)$ und seinen Durchschnitt

$$\mathfrak{S}_\lambda \Pi = \mathfrak{S}_\lambda \sum_{\rho=1}^{l} k(P_\rho) = \sum_{\rho=1}^{\lambda} \mathfrak{S}_\lambda k(P_\rho)$$

mit $\mathfrak{S}_\lambda$, wobei $\mathfrak{S}_0 \Pi$, sowie $\mathfrak{S}_\lambda k(P_\rho)$ für $\rho > \lambda$, leer ist. Ist nun $P_{\rho\lambda} = (y_1^{(\rho)}, \ldots, y_p^{(\rho)}, z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_q^{(\lambda)})$, $Y_\rho = (y_1^{(\rho)}, \ldots, y_p^{(\rho)})$, also $\mathfrak{S}_\lambda k(P_\rho) = \mathfrak{S}_\lambda k(P_{\rho\lambda})$ und $\mathfrak{S}_\lambda \Pi = \mathfrak{S}_\lambda \sum_{\rho=1}^{\lambda} k(P_{\rho\lambda})$, so erweist sich $\mathfrak{S}_\lambda \Pi$ gewissermaßen als Durchschnitt zweier prismatischer Säulen, nämlich als Gesamtheit aller Punkte $(y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_q)$, für welche $(z_1, \ldots, z_q)$ ein Punkt aus $\mathfrak{Z}_\lambda$ und $(y_1, \ldots, y_p)$ ein Punkt aus $\mathfrak{Y}_\lambda = \sum_{\rho=1}^{\lambda} k(Y_\rho)$ ist, unter $k(Y_\rho)$ die Menge aller Punkte des $(y_1 \ldots y_p)$-Raumes mit $0 < y_\mu \leqq y_\mu^{(\rho)}$ $(1 \leqq \mu \leqq p)$ verstanden. Wird der p-dimensionale Inhalt von $\mathfrak{Y}_\lambda$ mit

$$V_p = V_p(Y_1, \ldots, Y_\lambda) = V_p \begin{pmatrix} y_1', \ldots, y_p' \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(\lambda)}, \ldots, y_p^{(\lambda)} \end{pmatrix}$$

bezeichnet, so ergibt sich als Inhalt von $\mathfrak{S}_\lambda \Pi$ das Produkt von V_p mit dem q-dimensionalen Inhalt

$$z_1^{(\lambda)} \ldots z_q^{(\lambda)} - z_1^{(\lambda+1)} \ldots z_q^{(\lambda+1)}$$

von $\mathfrak{Z}_\lambda$. Wegen $\Pi = \sum_\lambda \mathfrak{S}_\lambda \Pi$ folgt daraus für den n-dimensionalen Inhalt von Π die Formel

$$V(P_1, \ldots, P_l) = V_n \begin{pmatrix} y_1', \ldots, y_p', z_1', \ldots, z_q' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(l)}, \ldots, y_p^{(l)}, z_1^{(l)}, \ldots, z_q^{(l)} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l} (z_1^{(\lambda)} \ldots z_q^{(\lambda)} - z_1^{(\lambda+1)} \ldots z_q^{(\lambda+1)})\, V_p \begin{pmatrix} y_1', \ldots, y_p' \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(\lambda)}, \ldots, y_p^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

(in der $z_\mu^{(l+1)} = 0$ zu setzen ist), — eine Formel, die eine Verallgemeinerung einer früher angegebenen Rekursionsformel[1] darstellt, mit der sie für $q = 1$, $p = n - 1$ zusammenfällt. Aus (3) entnimmt man noch die folgende Aussage:

---

[1] „Rekursionsformeln für den Inhalt gewisser Polyeder", diese Sitz.ber. 1941, S. 193–200, Formel (R*), S. 197.

(a) Der n-dimensionale Inhalt von $\Pi(P_1, \ldots, P_l)$ hat denselben Wert wie der $(p+1)$-dimensionale Inhalt jenes Polyeders $\Pi(Q_1, \ldots, Q_l)$ in einem $(y_1 \ldots y_p\, y_{p+1})$-Raum, das zu den Punkten $Q_\lambda = (y_1^{(\lambda)}, \ldots, y_p^{(\lambda)}, y_{p+1}^{(\lambda)})$ mit $y_{p+1}^{(\lambda)} = z_1^{(\lambda)} \ldots z_q^{(\lambda)}$ gehört.

Formel (3) bleibt, wie man leicht sieht, auch gültig, wenn in (2) die Zeichen $>$ durch $\geqq$ ersetzt werden, sowie auch im Falle $l = 1$.

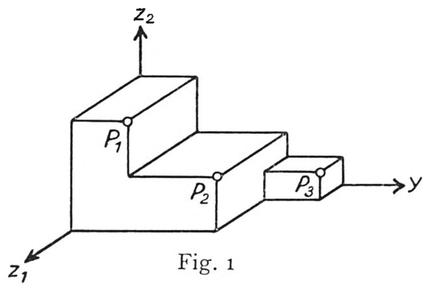

Fig. 1

Fig. 1 gibt ein dreidimensionales Beispiel eines Polyeders Π mit $p = 1$, $q = 2$, $l = 3$ (und $z_1' = z_1''$). In Fig. 2a, b, c sind die den

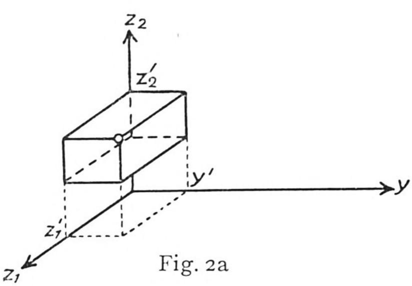

Fig. 2a

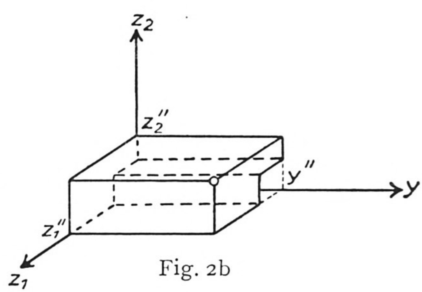

Fig. 2b

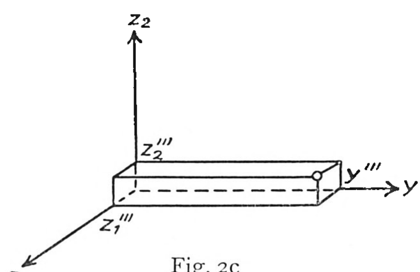

Fig. 2c

drei Summanden von (3) entsprechenden Teilpolyeder $\mathfrak{S}_1 \Pi$, $\mathfrak{S}_2 \Pi$, $\mathfrak{S}_3 \Pi$ dargestellt.

3. Formel (3) kann auch durch vollständige Induktion aus der l. c.[1] gegebenen Formel, d. h. aus dem Sonderfall $q = 1$ hergeleitet werden. Am einfachsten schreibt man hiezu die Formel (3) mit leicht verständlichen Abkürzungen in der Gestalt

$$V_{n,l} = \sum_{\lambda=1}^{l} z_1^{(\lambda)} \dots z_q^{\lambda} (V_{p,\lambda} - V_{p,\lambda-1}), \tag{4}$$

worin $V_{p,0} = 0$ zu setzen ist. Es wird nun für ein $q \geqq 1$ und alle $n = p + q > q$ die Gültigkeit von (4) angenommen. Um daraus die entsprechende Formel für $q + 1$ und alle $n > q + 1$ herzuleiten, werde $p = n - q > 1$ angenommen und unter der zu (2) hinzutretenden Voraussetzung

$$y_p' > y_p'' > \dots > y_p^{(l)}$$

die Formel (4), — darin $l, n, p, q, z_1^{(\lambda)}$ durch $\mu, p, p-1, 1, y_p^{(\lambda)}$ ersetzt, — für jedes μ $(1 \leqq \mu \leqq l)$ auf $V_{p,\mu} = V_p \begin{pmatrix} y_1', & \dots, & y_p' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(\mu)}, & \dots, & y_p^{(\mu)} \end{pmatrix}$ angewendet; setzt man die erhaltenen Ausdrücke

$$V_{p,\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\mu} y_p^{(\lambda)} (V_{p-1,\lambda} - V_{p-1,\lambda-1}),$$

aus denen $V_{p,\lambda} - V_{p,\lambda-1} = y_p^{(\lambda)} (V_{p-1,\lambda} - V_{p-1,\lambda-1})$ folgt, in (4) ein, so erhält man eine zu (4) analoge Formel, in der nur q und p durch $q + 1$ und $p - 1$ ersetzt sind.

Zum Schluß sei noch auf eine Anwendung von Formel (3), bzw. von Satz (a) hingewiesen, nämlich beim Beweis einer für gewisse spezielle von unseren Polyedern Π aufgestellten Inhaltsformel[2], — ein Beweis, der an anderer Stelle ausgeführt werden soll[3]. Tatsächlich ist Satz (a) implizit in den Überlegungen enthalten gewesen, die zur Aufstellung jener Inhaltsformel führten[4].

---

[2] Vgl. diese Sitz.ber. 1941, S. 23*, Sitzung vom 15. November 1941, Punkt 5.

[3] Vgl. eine Note über „das Volumen von gewissen Polyedern", die in den Math. Annalen erscheinen soll.

[4] Wegen des Zusammenhangs unserer Betrachtungen mit Anzahlbestimmungen von komprimierten Gitterpunktmengen, wie sie in der Arbeit „Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe", Crelles Journal f. Math. 184, S. 49–64, vorkommen, vgl. Bemerkungen in diesen Sitz.ber. 1941, S. 24*, Sitzung vom 15. Nov., Punkt 6, sowie l. c.[2].