

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft II

Mai- bis Dezembersitzung

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die Flächen mit gegebener Form des Linienelementes.

Von F. Lindemann.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

Wie ich in einer früheren Abhandlung¹⁾ gezeigt habe, ist die Benutzung der Parameter der Minimalkurven für die Behandlung der Biegung einer Fläche von besonderem Vorteile. Dasselbe gilt für das allgemeine Problem, alle Flächen zu finden, deren Linienelement ds in der Form

$$ds^2 = e du^2 + 2f duv + g dv^2 = 2F da d\beta$$

gegeben ist. Führt man durch Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung die Parameter α, β der Minimalkurven ein, so läßt sich das Problem auf eine Reihe von Quadraturen zurückführen. Die Hilfsmittel dazu sind in meiner früheren Abhandlung gegeben; die damaligen Gleichungen in anderer Zusammenstellung und Reihenfolge benutzt, führen bei passender Wahl der willkürlichen Funktion zum Ziele.

Ist eine Lösung schon bekannt, so ergeben sich wieder (vgl. unten Nr. 10 ff.) die Gleichungen meiner früheren Abhandlung; es werden aber einige Berichtigungen der früheren Resultate nötig (vgl. unten Nr. 11).

1. Sind α, β die Parameter der Minimalkurven auf der Fläche, so lassen sich die Koordinaten x, y, z eines Punktes dieser Fläche in folgender Form darstellen:

¹⁾ Vgl. meine Arbeit: „Die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche“, Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. 39, 1921; im folgenden kurz zitiert als „Abhandlung“. Es wird jetzt 2ω für $\lambda - \mu$ geschrieben, so daß ω an Stelle des Zeichens ω' der Abhandlung steht.

$$\begin{aligned}
 x &= i \int \left[\cos \lambda \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} d\alpha - \cos \mu \cdot \frac{\partial W}{\partial \beta} d\beta \right], \\
 (1) \quad y &= i \int \left[\sin \lambda \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha} d\alpha - \sin \mu \cdot \frac{\partial W}{\partial \beta} d\beta \right], \\
 z &= \int (W_\alpha d\alpha + W_\beta d\beta) = W,
 \end{aligned}$$

wo zwischen λ , μ , W die folgenden Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \operatorname{tg} \omega &= \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = 2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \cotg \omega \cdot \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha}, \\
 \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \operatorname{tg} \omega &= -\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -2 \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \cotg \omega \cdot \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta},
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \lambda - \mu = 2\omega;$$

μ ist zu λ konjugiert imaginär, also ω rein imaginär. Die vier Gleichungen (2) reduzieren sich durch (3) auf zwei Gleichungen (für λ_β und μ_α), und von diesen ist wieder die eine Folge der andern, da sie durch Vertauschung von i mit $-i$ aus einander hervorgehen. Infolge dieser Gleichungen sind dx und dy totale Differentiale. Aus (2) folgt ferner:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\cotg \omega \cdot \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\cotg \omega \cdot \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha} \right) = 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche (1) ist

$$(5) \quad -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{2 F \cdot \cos^2 \omega},^1)$$

und die Fundamentalgröße F :

$$(6) \quad F = 2 \cos^2 \omega \cdot W_\alpha W_\beta,$$

so daß das Linienelement ds durch die Gleichung:

$$(6a) \quad ds^2 = 2 F d\alpha d\beta$$

gegeben wird; hierbei sind (wie auch im folgenden) die Differentiationen durch Indices angedeutet. Durch Elimination von ω aus den Gleichungen (2) ergibt sich die zwischen F und W bestehende (schon von Bour aufgestellte) Gleichung:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad W_{\alpha\alpha} W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 + W_\alpha W_\beta F'_\alpha F'_\beta - W_{\alpha\alpha} F'_\beta - W_{\beta\beta} F'_\alpha \\
 = (F - 2 W_\alpha W_\beta) F'_{\alpha\beta}, \text{ wo } F' = \log F.
 \end{aligned}$$

¹⁾ In Gleichung (28) der Abhandlung fehlt der Nenner 2 auf der rechten Seite.

Sie wird von den drei Koordinaten x, y, z der Gleichungen (1) befriedigt und ist ein besonderer Fall einer allgemeinen von Darboux und Enneper aufgestellten Gleichung, die von den drei Fundamentalgrößen E, F, G bei allgemeinen Flächenparametern abhängt, und die ich a. a. O. nach den Vorlesungen Ennepers elementar abgeleitet habe, während Darboux zur Ableitung die Theorie der Differentialparameter benutzten.

2. Uns beschäftigen zunächst die Gleichungen (5) und (6). Erstere kann wegen (3) in der Form

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\lambda_\beta \omega_\alpha - \lambda_\alpha \omega_\beta}{\cos^2 \omega}$$

geschrieben werden, oder in der Form:

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_\beta \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\lambda_\alpha \operatorname{tg} \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg F}{\partial \alpha} \right);$$

man kann daher setzen:

$$(10) \quad \lambda_\beta \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} = \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta}, \quad \lambda_\alpha \operatorname{tg} \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg F}{\partial \alpha} = \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \alpha}.$$

Zufolge (6) ist aber:

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} &= -2 \omega_\beta \operatorname{tg} \omega + \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \lg F}{\partial \alpha} &= -2 \omega_\alpha \operatorname{tg} \omega + \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

also auch:

$$(12) \quad \begin{aligned} (\lambda_\beta + \omega_\beta) \operatorname{tg} \omega &= \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \beta}, \\ (\lambda_\alpha - \omega_\alpha) \operatorname{tg} \omega &= \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Besteht also zwischen λ und ω die Gleichung (8) und ist die Gleichung (6) erfüllt, so gibt es eine Funktion Ω , die gleichzeitig je den beiden Gleichungen (10) oder (12) genügt.

Vertauscht man i mit $-i$ und geht dabei Ω in Ω' (α in β , λ in μ , ω in $-\omega$) über, so ergibt sich ferner:

$$(13) \quad \mu_\alpha \operatorname{tg} \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg F}{\partial \alpha} = - \frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \alpha}, \quad \mu_\beta \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} = - \frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \beta},$$

$$\begin{aligned}
 (\mu_\alpha - \omega_\alpha) \operatorname{tg} \omega &= -\frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha}, \\
 (\mu_\beta + \omega_\beta) \operatorname{tg} \omega &= -\frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \beta}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Aus den Gleichungen (10) und (13) folgt

$$(\lambda_\beta - \mu_\beta) \operatorname{tg} \omega = \frac{\partial \lg \Omega \Omega'}{\partial \beta}, \quad (\lambda_\alpha - \mu_\alpha) \operatorname{tg} \omega = \frac{\partial \lg \Omega \Omega'}{\partial \alpha},
 \tag{15}$$

und diese Gleichungen werden mit (11) identisch, wenn man setzt:

$$\lg \Omega \Omega' = \lg W_\alpha W_\beta - \lg F, \quad \Omega \Omega' = \frac{W_\alpha W_\beta}{F} = \frac{1}{2 \cos^2 \omega}.
 \tag{16}$$

Um diese Gleichung (16) zu befriedigen und gleichzeitig die Gleichungen (10) und (13) mit den Gleichungen (2) in Übersetzung zu bringen, hat man zu setzen:

$$\Omega = \frac{W_\alpha}{\sqrt{F}}, \quad \Omega' = \frac{W_\beta}{\sqrt{F}}.
 \tag{17}$$

Aus der ersten Gleichung (12) und der zweiten Gleichung (14) erhält man unter Benutzung von (16) und (11)

$$(\lambda_\beta - \mu_\beta - 2 \omega_\beta) \operatorname{tg} \omega = \frac{\partial \lg \Omega \Omega'}{\partial \beta} + \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} - \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \beta} = 0,$$

ebenso, wenn man nach α differenziert; folglich:

$$\lambda - \mu = 2 \omega, \text{ wie in (3).}
 \tag{18}$$

Da μ zu λ konjugiert sein sollte, folgt hieraus, daß λ und μ den gemeinsamen imaginären Teil ω haben. Ist umgekehrt (18) erfüllt, so ergibt sich aus (15) wieder die Gleichung (16), nämlich $2 \cos^2 \omega \Omega \Omega' = 1$.

Bestehen also die Gleichungen (8) und (6) und wird Ω gemäß (17) bestimmt, so bestehen auch die Gleichungen (2) und (3), und als Folge derselben ist auch (4) erfüllt.

3. Berechnet man $\lambda_{\alpha\beta}$ aus den Gleichungen (10), so ergibt sich unter Berücksichtigung von (17), wenn $F' = \lg F$:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\alpha\beta} &= \left(\frac{\partial^2 \lg \Omega}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2} F'_{\alpha\beta} \right) \cotg \omega - \frac{\omega_\alpha}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta} + \frac{1}{2} F'_\beta \right) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 \lg \Omega}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{2} F'_{\alpha\beta} \right) \cotg \omega - \frac{\omega_\beta}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \lg \Omega}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} F'_\alpha \right), \text{ also:}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$\cotg \omega \cdot F'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2\sin^2 \omega} (\omega_\alpha F'_{\beta} + \omega_\beta F'_{\alpha}) = \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\omega_\alpha \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta} - \omega_\beta \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \alpha} \right).$$

Es ist dies eine partielle Gleichung erster Ordnung für Ω , wenn F und ω gegeben sind; sie ersetzt die Gleichung (8), da man λ aus Ω berechnen kann. Durch Vertauschung von i mit $-i$ ergibt sich eine entsprechende Gleichung für Ω' , nämlich:

$$(20) \quad F'_{\alpha\beta} \sin \omega \cdot \cos \omega - \frac{1}{2} (F'_{\alpha} \omega_{\beta} + F'_{\beta} \omega_{\alpha}) = \omega_{\beta} \frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \alpha} - \omega_{\alpha} \frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \beta}.$$

4. Sind F und ω gegeben und ist λ eine Lösung von (8), so ist die allgemeine Lösung durch $\lambda + \varphi(\omega)$ gegeben, wenn φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Zu jeder Lösung $\lambda + \varphi(\omega)$ gehört ein Wert $\lg \Omega + \chi(\omega)$, und aus (10) ergibt sich:

$$(21) \quad \varphi'(\omega) \operatorname{tg} \omega = \chi'(\omega).$$

Da der imaginäre Teil von λ gleich ω sein soll, so muß φ stets eine reelle Funktion von ω bezeichnen; es sei $\omega = iq$, und

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \psi(q), & \chi(\omega) &= f(q) + if_1(q), \\ \varphi'(\omega) &= -\psi'(q) \cdot i, & \chi'(\omega) &= -if'(q) + f'_1(q). \end{aligned}$$

Ändert sich $\lg \Omega$ additiv um $\chi(\omega)$, so verwandelt sich $\lg \Omega'$ in $\lg \Omega' + f(q) - if_1(q)$ und es wird nach (13):

$$-i\psi'(q) \operatorname{tg} \omega = (-f'(q) + if'_1(q))(-i) = f_1(q) + if'(q),$$

da gegen nach (21):

$$-i\psi'(q) \operatorname{tg} \omega = (f'(q) + if'_1(q))(-i) = f_1(q) - if'(q),$$

folglich $f'(q) = 0$. Nun ist nach (16) $\lg \Omega + \lg \Omega'$ eine fest gegebene Funktion von ω , es muß also $f(q) + if_1(q) + f(q) - if_1(q) = 2f(q) = 0$ sein.

Zu einem gegebenen Werte von ω gehören so unendlich viele von einer willkürlichen Funktion $\psi(q)$ abhängige Werte von λ .

Ist aber λ gegeben, so gehören zu jedem λ unendlich viele Werte von ω , die von einer willkürlichen Funktion $f(p)$ abhängen, wenn $\lambda = p + \omega$ gesetzt wird. Wächst $\operatorname{tg} \omega$ um $f(p)$, so wächst $\lg \Omega$ um $g(p)$, $\lg \Omega'$ um $g_1(p)$, wobei zufolge (10) und (13):

$$(22) \quad f(p) = g'(p), \quad f_1(p) = -g'_1(p),$$

wenn f_1 zu f , g_1 zu g konjugiert ist, und nach (16):

$$g(p) + g_1(p) = 0,$$

woraus folgt, daß $g(p)$ rein imaginär sein muß; ebenso ist dann $f(p)$ rein imaginär.

5. Wie zwischen W und ω und zwischen W und F , so muß auch zwischen F und ω eine Relation bestehen. Die Aufstellung derselben scheint umständlich zu sein; statt dessen kann man Relationen zwischen F und einer Hilfsgröße δ aufstellen.

Die Gleichungen (17) sind nur möglich, wenn die Bedingung

$$(23) \quad \frac{\partial \Omega \sqrt{F}}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega' \sqrt{F}}{\partial \alpha} = W_{\alpha\beta}$$

erfüllt ist; andererseits folgt aus (2)

$$W_{\alpha\beta} = W_\alpha \lambda_\beta \operatorname{tg} \omega, \text{ also auch:}$$

$$(24) \quad W_\alpha \lambda_\beta + W_\beta \mu_\alpha = 0, \text{ also auch: } \Omega \lambda_\beta + \Omega' \mu_\alpha = 0.$$

Die Bedingungen (29) und (29 a) sagen also wesentlich dasselbe aus, nämlich, daß die Gleichungen (2) eine gemeinsame reelle Lösung W zulassen. In der Tat erhält man aus (10) und (13):

$$(24a) \quad (\Omega \lambda_\beta + \Omega' \mu_\alpha) \operatorname{tg} \omega = \frac{1}{2} F_\beta \Omega + \Omega_\beta - \frac{1}{2} F'_\alpha \Omega' - \Omega'_\alpha,$$

und der Ausdruck rechts verschwindet wegen (23).

Da der absolute Betrag von Ω durch (16) gegeben ist, kann man setzen

$$(25) \quad \Omega = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2} \cos \omega}, \quad \Omega' = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{2} \cos \omega},$$

wo δ reell ist. Wegen (10) und (13) wird dann die Gleichung (23):

$$(26) \quad e^{i\delta} \left(\frac{1}{2} F'_\beta + i \delta_\beta + \operatorname{tg} \omega \cdot \omega_\beta \right) + e^{-i\delta} \left(i \delta_\alpha - \frac{1}{2} F'_\alpha - \operatorname{tg} \omega \cdot \omega_\alpha \right) = 0.$$

Es genügt δ der Gleichung, welche aus (19) oder (20) vermöge (25) entsteht, nämlich:

$$(27) \quad F'_\alpha \sin \omega \cdot \cos \omega = \frac{1}{2} (F'_\alpha \omega_\beta + F'_\beta \omega_\alpha) + i (\omega_\alpha \delta_\beta - \omega_\beta \delta_\alpha).$$

Sei zur Abkürzung

$$(28) \quad M = \frac{1}{2} F'_\beta + i \delta_\beta, \quad N = \frac{1}{2} F'_\alpha - i \delta_\alpha, \quad L = \log \cos \omega,$$

so erhalten wir aus (26) und (27):

$$(29) \quad \begin{aligned} L_\beta e^{i\delta} - L_\alpha e^{-i\delta} &= e^{i\delta} M - e^{-i\delta} N, \\ L_\beta N + L_\alpha M &= -F'_{\alpha\beta} \sin^2 \omega, \end{aligned}$$

und hieraus durch Auflösung:

$$(30) \quad \begin{aligned} L_\alpha (M e^{i\delta} + N e^{-i\delta}) &= -F'_{\alpha\beta} e^{i\delta} \sin^2 \omega - N (M e^{i\delta} - N e^{-i\delta}), \\ L_\beta (M e^{i\delta} + N e^{-i\delta}) &= -F'_{\alpha\beta} e^{-i\delta} \sin^2 \omega + M (M e^{i\delta} - N e^{-i\delta}). \end{aligned}$$

Die Elimination von L durch Aufstellung der Integrabilitäts-Bedingung führt zu dem Resultate:

$$(31) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{-F'_{\alpha\beta} e^{i\delta} \sin^2 \omega - N (M e^{i\delta} - N e^{-i\delta})}{M e^{i\delta} + N e^{-i\delta}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{-F'_{\alpha\beta} e^{-i\delta} \sin^2 \omega + M (M e^{i\delta} - N e^{-i\delta})}{M e^{i\delta} + N e^{-i\delta}} \right). \end{aligned}$$

Führt man die Differentiationen aus, so wird dies eine lineare Gleichung zwischen $S = \sin^2 \omega$, S_α und S_β ; eine ebensolche Gleichung entsteht aus (27), wenn man die linke Seite mit $\cos^2 \omega = 1 - S$ multipliziert. Fügt man in (27) auf beiden Seiten den Faktor $\sin \omega \cos \omega$ hinzu, so entsteht eine lineare Gleichung für $S(1-S)$, S_α und S_β . Aus diesen drei Gleichungen kann man S , S_α , S_β berechnen; stellt man dann durch doppelte Berechnung von $S_{\alpha\beta}$ die Integrabilitäts-Bedingung auf, so entsteht die gesuchte, nur von F abhängige Differentialgleichung für δ .

Partikuläre Lösungen derselben kann man immer angeben. Die beiden Gleichungen (29) nämlich werden miteinander identisch, wenn

$$(31a) \quad \begin{aligned} e^{i\delta} &= \varrho L_\alpha, & e^{-i\delta} &= -\varrho L_\beta, \\ L_\beta e^{i\delta} - L_\alpha e^{-i\delta} &= -\varrho F'_{\alpha\beta} \sin^2 \omega, \end{aligned}$$

oder:

$$(31b) \quad \begin{aligned} L_\beta e^{i\delta} + L_\alpha e^{-i\delta} &= 0, & F'_{\alpha\beta} \sin^2 \omega &= -2 L_\alpha L_\beta, \\ \varrho^2 L_\alpha L_\beta &= -1. \end{aligned}$$

Nun ist nach (25) und (17)

$$e^{i\delta} \sqrt{F} = W_\alpha \cos \omega \cdot \sqrt{2}, \quad e^{-i\delta} \sqrt{F} = W_\beta \cos \omega \cdot \sqrt{2}, \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} (L_\beta e^{i\delta} + L_\alpha e^{-i\delta}) \sqrt{F} &= \sqrt{2} \cdot \cos \omega \cdot (L_\beta W_\alpha + L_\alpha W_\beta) \\ &= -\sqrt{2} \cos \omega \cdot (\omega_\beta W_\alpha + \omega_\alpha W_\beta) \operatorname{tg} \omega, \end{aligned}$$

und wegen (2):

$$(32) \quad (L_\beta e^{i\delta} + L_\alpha e^{-i\delta}) \lambda_{\beta\mu_\alpha} \sqrt{F} = -\sqrt{2} \cos \omega (\omega_{\beta\mu_\alpha} - \omega_\alpha \lambda_\beta) W_{\alpha\beta}.$$

Aus der ersten Gleichung (31 b) folgt also das Verschwinden von $\omega_{\beta\mu_\alpha} - \omega_\alpha \lambda_\beta$, und damit geht die Gleichung (8) über in

$$(33) \quad F'_{\alpha\beta} \cos^2 \omega = -2 \omega_\alpha \omega_\beta,$$

d. h. in die zweite Gleichung (31 b). Besteht also eine der beiden ersten Gleichungen (31 b), so gilt auch die andere, und es sind dann die beiden Gleichungen (29) erfüllt, sobald eine erfüllt ist.

Setzen wir das Bestehen der Gleichung (33) voraus, so folgt aus (8) nach obigen Entwicklungen die Gleichung $\omega_\beta \mu_\alpha - \omega_\alpha \lambda_\beta = 0$; und hieraus gemäß (32) die erste Gleichung (31 b), andererseits vermöge (10) und (13):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} (\omega_\alpha F'_\beta + \omega_\beta F'_\alpha) + \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta} \omega_\alpha + \frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \alpha} \omega_\beta \\ &= \frac{1}{2} (\omega_\alpha F'_\beta + \omega_\beta F'_\alpha) + i (\omega_\alpha \delta_\beta - \omega_\beta \delta_\alpha) + 2 \omega_\alpha \omega_\beta \operatorname{tg} \omega; \end{aligned}$$

das ist aber wegen (33) wieder die Gleichung (27), die mit der zweiten Gleichung (29) identisch ist. Genügt also ω der Gleichung (33), so sind auch die beiden Gleichungen (29) erfüllt.

Definiert man eine Größe w durch die Gleichung $\cos \omega \cdot dw = d\omega$, so geht (33) über in

$$F'_{\alpha\beta} + 2 w_\alpha w_\beta = 0,$$

deren Charakteristiken sind ($F^* = F'_{\alpha\beta}$), $q = w_\beta$, $p = w_\alpha$):

$$(34) \quad \frac{da}{2q} = \frac{d\beta}{2p} = \frac{-dw}{2F^*} = \frac{-dp}{F'_\alpha} = \frac{-dq}{F'_\beta}.$$

Ist ω gefunden, so muß δ den beiden Gleichungen (29) genügen, und somit auch der ersten Gleichung (31 b). Die Integration von (32) läßt eine willkürliche Funktion in die Lösung eingehen; δ ist dann vollkommen bestimmt. Aus (25) findet man dann Ω und Ω' ; aus (17) wird W bestimmt und aus (10) bzw. (13) λ und μ .

Durch Integration der partiellen Gleichung erster Ordnung (33) erhält man also eine Klasse von Flächen mit gegebenem Linienelemente, die von einer willkürlichen Funktion abhängen (also noch nicht alle gesuchten Flächen).

Die Gleichungen (29) reduzieren sich auch aufeinander, wenn die Bedingungen

$e^{i\delta} = \varrho N$, $e^{-i\delta} = -\varrho M$, $e^{i\delta} M - e^{-i\delta} N = -\varrho F'_{\alpha\beta} \sin^2 \omega$, oder:

$$(35) \quad M e^{i\delta} + N e^{-i\delta} = 0, \quad F'_{\alpha\beta} \sin^2 \omega = -2 M N$$

erfüllt sind; aber dann ergibt sich mittels obiger Umformungen: $M W_\alpha + N W_\beta = 0$ und hieraus unter Benutzung von (24a), (10) und (12): $2 \lambda_\beta \mu_\alpha - \omega_\beta \mu_\alpha + \omega_\alpha \lambda_\beta = 0$; ferner aus (8):

$$F'_{\alpha\beta} \cos^2 \omega = -2 (\lambda_\beta \mu_\alpha + \omega_\alpha \omega_\beta),$$

und es wird

$$M N = -(\lambda_\beta - \omega_\beta) (\mu_\alpha + \omega_\alpha) \operatorname{tg}^2 \omega = (\lambda_\beta \mu_\alpha + \omega_\alpha \omega_\beta) \operatorname{tg}^2 \omega,$$

so daß die zweite Gleichung (35) erfüllt ist. Die erste Gleichung (35) liefert eine partielle Gleichung erster Ordnung für δ , nämlich:

$$(36) \quad \left(\frac{1}{2} F'_\beta + i \delta_\beta\right) e^{i\delta} + \left(\frac{1}{2} F'_\alpha - i \delta_\alpha\right) e^{-i\delta} = 0.$$

Ist δ gefunden, so ergibt sich ω aus der zweiten Gleichung (35); es hängt also δ von einer willkürlichen Funktion ab, ω ist dann aber vollkommen bestimmt. Man findet auf diese Weise eine zweite Klasse von Flächen, die das Problem lösen, und zwar durch eine lineare partielle Gleichung für δ , während die obige Gleichung (33) für ω nicht linear war.

6. Daß die Gleichung (7) infolge der aufgestellten Bedingungen tatsächlich erfüllt ist, läßt sich direkt in folgender Weise erkennen. Die Gleichung (7) schreiben wir in der Form:

$$(37) \quad \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} \cdot \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} - \frac{W_{\alpha\beta}^2}{W_\alpha W_\beta} - \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} \cdot \frac{F'_\beta}{F} - \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} \cdot \frac{F'_\alpha}{F} + \frac{F'_\alpha F'_\beta}{F^2} \\ = \left(\frac{F}{W_\alpha W_\beta} - 2 \right) \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \partial \beta} = -2 \sin^2 \omega \cdot \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Aus (6), (2) und (3) folgt:

$$\frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} + 2 \omega_\alpha \operatorname{tg} \omega + F'_\alpha, \quad \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} + 2 \omega_\beta \operatorname{tg} \omega + F'_\beta \\ = \lambda_\alpha \operatorname{tg} \omega + F'_\alpha \quad = F'_\beta - \mu_\beta \operatorname{tg} \omega.$$

Sei $t = \operatorname{tg} \omega$, so wird also die linke Seite von (37):

$$(F'_\alpha + \lambda_\alpha t)(F'_\beta - \mu_\beta t) - (F'_\alpha + \lambda_\alpha t) F'_\beta - (F'_\beta - \mu_\beta t) F'_\alpha + F'_\alpha F'_\beta - \frac{W_{\alpha\beta}^2}{W_\alpha W_\beta} \\ = -\lambda_\alpha \mu_\beta t^2 - \frac{W_{\alpha\beta}^2}{W_\alpha W_\beta} = (\lambda_\beta \mu_\alpha - \lambda_\alpha \mu_\beta) \operatorname{tg}^2 \omega;$$

wegen (5) stimmen folglich die beiden Seiten der Gleichung (33) in der Tat überein.

7. Da das allgemeine Problem, alle Flächen mit gegebenem Linienelemente (6a) aufzustellen, auf eine partielle Gleichung zweiter Ordnung zurückführt, so gilt dasselbe, wenn eine dieser Flächen als gegeben betrachtet wird, d. h. wenn alle Biegungsflächen einer gegebenen gesucht werden; es ergeben sich indessen wesentliche Vereinfachungen. Die Lösung dieser Aufgabe habe ich in der „Abhandlung“ in einer besonderen Form erhalten, die sich hier in folgender Weise ergibt.

Es mögen die Buchstaben

$\lambda, \mu, \omega, F, \alpha, \beta, x, y, z (= W)$ für die gegebene Fläche und bzw.
 $\Phi, \Psi, \mathfrak{S}, F, \alpha, \beta, \xi, \eta, \zeta$ „ „ gesuchte „

die bisherige Bedeutung haben. Dann ist nach (8):

$$(38) \quad \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\lambda_\beta \omega_\alpha - \lambda_\alpha \omega_\beta}{\cos^2 \omega} = \frac{\Phi_\beta \mathfrak{S}_\alpha - \Phi_\alpha \mathfrak{S}_\beta}{\cos^2 \mathfrak{S}}.$$

Diese Gleichung läßt sich in folgender Form schreiben:

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda_\alpha \operatorname{tg} \omega - \Phi_\alpha \operatorname{tg} \mathfrak{S}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda_\beta \operatorname{tg} \omega - \Phi_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{S});$$

es gibt also eine Funktion R , die den Gleichungen genügt

$$(40) \quad \Phi_\alpha \operatorname{tg} \mathfrak{S} = \lambda_\alpha \operatorname{tg} \omega + \frac{\partial \lg R}{\partial \alpha}, \quad \Phi_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{S} = \lambda_\beta \operatorname{tg} \omega + \frac{\partial \lg R}{\partial \beta};$$

und durch Vertauschung von i mit $-i$, wenn R' zu R konjugiert ist:¹⁾

$$(40a) \quad \Psi_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{S} = \mu_\beta \operatorname{tg} \omega - \frac{\partial \lg R'}{\partial \beta}, \quad \Psi_\alpha \operatorname{tg} \mathfrak{S} = \mu_\alpha \operatorname{tg} \omega - \frac{\partial \lg R'}{\partial \alpha}.$$

Andererseits müssen analog zu (2) die Gleichungen

$$(41) \quad \Phi_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{S} = \frac{\partial \lg \zeta_\alpha}{\partial \beta}, \quad \Psi_\alpha \operatorname{tg} \mathfrak{S} = - \frac{\partial \lg \zeta_\beta}{\partial \alpha}$$

bestehen; und benutzt man die Gleichungen (2) auch zur Umformung der rechten Seite von (40) und (40a), so ergibt sich:

$$(42) \quad \zeta_\alpha = i R W_\alpha, \quad \zeta_\beta = -i R' W_\beta,$$

¹⁾ Die Gleichungen (40) und (40a) sind die Gleichungen (79) der Abhandlung.

wobei rechts zunächst ein willkürlicher konstanter Faktor stehen kann; derselbe ist gleich i gewählt, um Übereinstimmung mit der Bezeichnung in der Abhandlung herzustellen. Die Koordinaten ξ , η , ζ eines Punktes der Biegungsfläche werden

$$\begin{aligned} \xi &= \int [\cos \Phi \cdot R W_\alpha d\alpha + \cos \Psi \cdot R' W_\beta d\beta], \\ (43) \quad \eta &= \int [\sin \Phi \cdot R W_\alpha d\alpha + \sin \Psi \cdot R' W_\beta d\beta], \\ \zeta &= i \int [R W_\alpha d\alpha - R' W_\beta d\beta], \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (83) der Abhandlung.

Damit in (43) unter den Integralzeichen vollständige Differentiale stehen, muß außer den Gleichungen (40) noch die Bedingung

$$(44) \quad \frac{\partial R W_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial R' W_\beta}{\partial \alpha} = 0$$

erfüllt sein. Analog zu (24) muß auch die Gleichung

$$(45) \quad \Phi_\beta R W_\alpha - \Psi_\alpha R' W_\beta = 0$$

bestehen. Es ist in der Tat:

$$(46) \quad \frac{\partial R W_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial R' W_\beta}{\partial \alpha} = \operatorname{tg} \mathfrak{S} (\Phi_\beta R W_\alpha - \Psi_\alpha R' W_\beta).$$

Es ist ferner

$$(47) \quad F = 2 \zeta_\alpha \zeta_\beta \cos^2 \mathfrak{S} = 2 W_\alpha W_\beta \cos^2 \omega,$$

$$\text{oder} \quad R R' \cos^2 \mathfrak{S} = \cos^2 \omega.$$

8. Hat A für die gesuchte Fläche dieselbe Bedeutung wie δ für die gegebene Fläche, so ist, wenn man noch die Bezeichnungen:

$$(48) \quad \begin{aligned} 2P &= \Phi + \Psi, \quad 2p = \lambda + \mu, \quad t = \operatorname{tg} \omega, \quad T = \operatorname{tg} \mathfrak{S}, \\ R &= r e^{i\varphi}, \quad R' = r e^{-i\varphi}, \quad Q = \log T, \quad q = \log t \end{aligned}$$

zur Abkürzung einführt, unter Benutzung von (10), (40), (40 a) und (25):

$$\begin{aligned} (49) \quad P_\beta T &= \tfrac{1}{2} F'_\beta + i A_\beta = p_\beta t + i \varphi_\beta = \tfrac{1}{2} F''_\beta + i \delta_\beta + i \varphi_\beta, \\ P_\alpha T &= -\tfrac{1}{2} F'_\alpha + i A_\alpha = p_\alpha t + i \varphi_\alpha = -\tfrac{1}{2} F''_\alpha + i \delta_\alpha + i \varphi_\alpha, \\ (49 a) \quad A &= \delta + \varphi. \end{aligned}$$

Die Größe A hat der Differentialgleichung zu genügen, die sich aus (31) nach Obigem ableiten läßt. In diesem Falle aber

kann Δ durch zwei sukzessive Gleichungen erster Ordnung gefunden werden. Nach (27) bestehen für δ und Δ die Gleichungen:

$$(50) \quad F'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [F, q] + i(q, \delta), \quad F'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [F', Q] + i(Q, \Delta),$$

wenn zur Abkürzung:

$$(50a) \quad \begin{aligned} [\psi, \chi] &= [\chi, \psi] = \psi_\alpha \chi_\beta + \psi_\beta \chi_\alpha, \\ (\psi, \chi) &= \psi_\alpha \chi_\beta - \psi_\beta \chi_\alpha = -(\chi, \psi). \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichungen (50) erscheint dann in der Form:

$$(51) \quad F'_{\alpha\beta} = (T, P) = (t, p) = (Q, P) \quad T = (q, p) t,$$

und die zweite Gleichung (50) wird wegen (49a):

$$(51a) \quad F'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [F, Q] + i(Q, \delta) + i(Q, \varphi);$$

und in dieser Form ergibt sie sich direkt aus (49) vermöge (51).

Aus (49) und (51) erhält man auch:

$$(51b) \quad (Q, P) T = F'_{\alpha\beta} = (Q, p) t + i(Q, \varphi),$$

und ebenso

$$(51c) \quad (q, P) T = (q, p) t + i(q, \varphi) = F'_{\alpha\beta} + i(q, \varphi).$$

Eliminiert man (Q, φ) aus den Gleichungen (51a) und (51b), so ergibt sich eine Identität. Die Gleichungen (40a) und (40b) sind eine Folge der Gleichung (38), vorausgesetzt, daß R einer gewissen Bedingung genügt, die sich ebenso ergibt, wie die Bedingung (19) oder (20) für Ω bzw. Ω' ; diese Bedingung ist durch die Gleichung (51a) gegeben, welche wegen (49) durch (51b) oder (51c) ersetzt werden kann.

Die Gleichung (47) wird wegen der in (48) eingeführten Bezeichnung

$$(52) \quad r^2 \cos^2 \mathfrak{B} = \cos^2 \omega.$$

Die zu (18) analoge Gleichung ist eine Folge von (40) und (40a), aus denen man durch Subtraktion erhält:

$$(\Phi_\alpha - \Psi_\alpha) T = (\lambda_\alpha - \mu_\alpha) t + 2r'_\alpha, \quad (\Phi_\beta - \Psi_\beta) T = (\lambda_\beta - \mu_\beta) t + 2r'_\beta,$$

wo $r' = \lg r$.

Aus (52) erhält man weiter:

$$(52a) \quad r'_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha T - \omega_\alpha t, \quad r'_\beta = \mathfrak{B}_\beta T - \omega_\beta t.$$

Es wird also in der Tat

$$(53) \quad \Phi_\alpha - \Psi_\alpha = 2 \mathfrak{B}_\alpha, \quad \Phi_\beta - \Psi_\beta = 2 \mathfrak{B}_\beta, \quad \Phi - \Psi = 2 \mathfrak{B}.$$

Die Gleichung (44) wird:

$$(53a) \quad W_{\alpha\beta}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + W_\alpha e^{i\varphi}(r'_\beta + i q_\beta) + W_\beta e^{-i\varphi}(r'_\alpha - i q_\alpha) = 0.$$

9. Die letztere Gleichung ist mit (51 b) identisch, wenn:

$$(53b) \quad W_\alpha e^{i\varphi} = \varrho Q_\alpha, \quad W_\beta e^{-i\varphi} = \varrho Q_\beta,$$

$$2 \cos \varphi \cdot W_{\alpha\beta} + W_\alpha e^{i\varphi} r'_\beta + W_\beta e^{-i\varphi} r'_\alpha = \varrho \{(Q, p) t - F'_{\alpha\beta}\},$$

also auch:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(W_\beta Q_\alpha + W_\alpha Q_\beta) + W_\alpha W_\beta(Q_\alpha r'_\beta + Q_\beta r'_\alpha) \\ = W_\alpha W_\beta \{(Q, p) t - F'_{\alpha\beta}\}; \end{aligned}$$

hierin ist nach (52 a), (2) und (48):

$$Q_\alpha r'_\beta + Q'_\beta r'_\alpha = [Q, \mathfrak{B}] T - [Q, \omega] t = \frac{2 \mathfrak{B}_\alpha \mathfrak{B}_\beta}{\cos^2 \mathfrak{B}} - [Q, \omega] t,$$

$$W_{\alpha\beta}[W, Q] = W_\alpha W_\beta t(Q_\alpha \lambda_\beta - Q_\beta \mu_\alpha) = W_\alpha W_\beta t\{(Q, p) + [Q, \omega]\}.$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich:

$$F'_{\alpha\beta} \cos^2 \mathfrak{B} = -2 \mathfrak{B}_\alpha \mathfrak{B}_\beta.$$

Das ist aber die Gleichung (33). Durch den Ansatz (53 b) findet man also dieselbe besondere Klasse von Biegungsflächen, die wir im Anschlusse an (33) aufgestellt hatten. Sie hängen nur von der Größe F ab, nicht von den Größen W, λ, μ, ω .

Die Gleichung (53 a) wird auch mit (51 c) identisch, wenn die Relationen

$$(54) \quad \varrho q_\alpha = W_\alpha e^{i\varphi}, \quad \varrho q_\beta = W_\beta e^{-i\varphi}, \quad \text{also } W_\alpha q_\beta e^{i\varphi} - W_\beta q_\alpha e^{-i\varphi} = 0.$$

$$(54a) \quad \varrho \{F'_{\alpha\beta} - (q, P) T\} = W_{\alpha\beta}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + W_\alpha r'_\beta e^{i\varphi} + W_\beta r'_\alpha e^{-i\varphi}$$

erfüllt sind; die letzte Gleichung wird, wenn man ϱ eliminiert:

$$(54b) \quad \{F'_{\alpha\beta} - (q, P) T\} W_\alpha W_\beta = W_{\alpha\beta}[W, q] + W_\alpha W_\beta[r', q],$$

und wenn man W mittels (2) eliminiert:

$$\{F'_{\alpha\beta} - (q, P) T\} = (q_\alpha \lambda_\beta - q_\beta \mu_\alpha) t + [r', q] = F'_{\alpha\beta} + \frac{2 \omega_\alpha \omega_\beta}{\cos^2 \omega} + [r', q],$$

also schließlich unter Benutzung von (51 c):

$$(54c) \quad F'_{\alpha\beta} + \frac{2 \omega_\alpha \omega_\beta}{\cos^2 \omega} + [r', q] + i(q, \varphi) = 0.$$

Besteht umgekehrt die Gleichung (54 b) und die dritte Gleichung (54), so läßt sich q so bestimmen, daß die Gleichungen (53 a) und (51 c) sich auf eine Gleichung reduzieren. Vermöge der dritten Gleichung (54) wird die Gleichung (44), welche mit (53 a) identisch ist:

$$W_{\alpha\beta} [W, q] + W_{\alpha} W_{\beta} \{[r', q] + i(q, \varphi)\} = 0;$$

so daß wegen (54 b) auch die Gleichung (51 a) erfüllt ist. Man findet also eine besondere Klasse von Biegungsflächen der gegebenen Fläche, indem man q aus der dritten Gleichung (54) und darauf r' durch die partielle Gleichung (54 c) berechnet; $\mathfrak{B}$, Φ , Ψ ergeben sich dann aus (52), (40) und (40 a).

Unendlich viele, von einer willkürlichen Funktion abhängige Biegungsflächen der gegebenen Fläche findet man hiernach durch Lösung einer partiellen linearen Differentialgleichung erster Ordnung und durch Quadraturen.

Diese Flächen gehören nicht zu den beiden Klassen, die wir in Nr. 5 aufstellten und die zu der gegebenen Fundamentalgröße F gehörten. Man findet daher alle, von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen Biegungsflächen, indem man zuerst eine der beiden Klassen aufstellt, die sich zufolge Nr. 5 aus der Größe F ableiten lassen, und dann aus jeder dieser Flächen gemäß den Gleichungen (54) und (54 c) weitere, von einer andern willkürlichen Funktion abhängige Flächen bestimmt.

Hiermit ist auch die Aufstellung aller Flächen mit gegebenem Linienelemente auf die Lösung zweier sukzessiver partieller Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt.

Aus (49) folgt noch:

$$(55) \quad (\varphi, P) T = (\varphi, p) t.$$

Auch diese Gleichung könnte man statt (51 a) benutzen, denn sie geht wie diese aus (49) hervor. Sie wird mit (53 a) identisch, wenn:

$$W_{\alpha} e^{i\varphi} = q (p_{\alpha} t - P_{\alpha} T), \quad W_{\beta} e^{-i\varphi} = q (p_{\beta} t - P_{\beta} T) \\ = -i q \varphi_{\alpha} \quad \quad \quad = -i q \varphi_{\beta}, \text{ also:}$$

$$(55 a) \quad (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) W_{\alpha\beta} + e^{i\varphi} W_{\alpha} r'_{\beta} + e^{-i\varphi} W_{\beta} r'_{\alpha} = 0, \\ W_{\alpha} e^{i\varphi} \varphi_{\beta} - W_{\beta} e^{-i\varphi} \varphi_{\alpha} = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung wird φ , aus der ersten sodann $r' = \lg r$ gefunden, je durch eine partielle Gleichung erster Ordnung. Durch die beiden Gleichungen (55) findet man also alle (von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen) Biegungsflächen der gegebenen Fläche (1).

Daß die so gefundene Funktion ζ der Differentialgleichung (7) oder (37) genügt, erkennt man in folgender Weise. Es ist nach (47), (41) und (53):

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_{\alpha\alpha}}{\zeta_\alpha} &= -\frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\zeta_\beta} - 2\omega_\alpha t + 2\mathfrak{S}_\alpha T + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} \\ &= \Psi_\alpha T + 2\mathfrak{S}_\alpha T - 2\omega_\alpha t - \mu_\alpha t + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} \\ &= \Phi_\alpha T - \lambda_\alpha t + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha}, \text{ wenn } t = \operatorname{tg} \omega, \quad T = \operatorname{tg} \mathfrak{S},\end{aligned}$$

ebenso: $\frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\zeta_\beta} = -\Psi_\beta T + \mu_\beta t + \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta}$, ferner:

$$\frac{F_\alpha}{F} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} - 2\omega_\alpha t = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} - \lambda_\alpha t, \quad \frac{F_\beta}{F} = \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} + \mu_\beta t.$$

Sei also zur Abkürzung:

$$\mathfrak{G} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} - \lambda_\alpha t, \quad \mathfrak{H} = \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} + \mu_\beta t,$$

so wird die linke Seite der Gleichung (37):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{G} + \Phi_\alpha T)(\mathfrak{H} - \Psi_\beta T) - \mathfrak{G}(\mathfrak{H} - \Psi_\beta T) - \mathfrak{H}(\mathfrak{G} + \Phi_\alpha T) \\ + \mathfrak{G}\mathfrak{H} - \frac{\zeta_{\alpha\beta}^2}{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = -\Phi_\alpha \Psi_\beta T^2 - \frac{\zeta_{\alpha\beta}^2}{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = (\Phi_\beta \Psi_\alpha - \Phi_\alpha \Psi_\beta) T^2,\end{aligned}$$

und denselben Wert nimmt die rechte Seite an, analog wie oben bei Gleichung (37) in Nr. 6.

10. Als Beispiel betrachten wir die Biegungsflächen der Rotationsflächen. Ist eine Rotationsfläche durch die Gleichungen $x = F_1(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta)$, $y = F_1(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$, $z = \Phi(\alpha - \beta)$,

$$\Phi'^2 + F_1^2 + F_1'^2 = 0$$

dargestellt, so ist ($\lambda - \mu = 2\omega$) für die gegebene Fläche

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{F_1'}{F_1}, \quad \lambda_\beta = \frac{F_1'^2 + F_1 F_1''}{F_1'^2 + F_1'^2}, \quad \lambda_\alpha = \frac{F_1'^2 - F_1 F_1''}{F_1'^2 + F_1'^2},$$

$$F = 2 \cos^2 \omega \cdot W_\alpha W_\beta = 2 F_1^2 = \psi(\alpha - \beta),$$

also $F_{a\beta}$ eine Funktion allein von $a - \beta$, die wir mit $\chi(a - \beta)$ bezeichnen (vgl. § 5 der Abhandlung).

Aus (34) findet man die Gleichungen der Charakteristiken in der Form:

$$2ap = a^2 - b - \chi, \quad 2aq = a^2 + b\chi,$$

$$a + \beta = \int \frac{da - d\beta}{\chi + b} + c, \quad aw = \int \chi (da - d\beta) + c',$$

wenn a, b, c, c' Konstante bedeuten.

Ist w und somit ω gefunden, so ist auch W und q bekannt und r' bestimmt sich aus (54 c).

Die am Schlusse von Nr. 5 angegebene Methode verlangt die Lösung der Gleichungen (55 a), d. h. hier:

$$-(e^{iq} + e^{-iq}) \Phi''(a - \beta) + (e^{iq} r'_\beta - e^{-iq} r'_a) \Phi'(a - \beta) = 0,$$

$$e^{iq} q_\beta + e^{-iq} q_a = 0.$$

Aus letzterer Gleichung findet man

$$\alpha e^{iq} - \beta e^{-iq} = f(q),$$

wenn f eine willkürliche Funktion bezeichnet; für r' ist noch eine lineare partielle Gleichung erster Ordnung zu lösen. Soll die neue Fläche wieder eine Rotationsfläche werden, so muß $q = \frac{1}{2}\pi$ und $r = \text{Konst.}$ sein (vgl. § 6 der Abhandlung).

Die so gefundenen Flächen sind bekanntlich die Evolutenflächen der von Weingarten studierten Flächen, zwischen deren Krümmungsradien eine Relation besteht; auch letztere Flächen können demnach angegeben werden.

Versuchsweise machen wir den Ansatz:

$$(56) \quad \lambda = \mathfrak{F}(a - \beta) \cdot a + \mathfrak{F}_1(a - \beta).$$

Zwischen den Funktionen ψ_1 und $\mathfrak{F}$ bestehe die Bedingung:

$$(56a) \quad \frac{\psi'_1(a - \beta) \cdot \mathfrak{F}(a - \beta)}{\cos^2 \psi_1} = \left(\frac{\psi'}{\psi} \right)^2 - \frac{\psi''}{\psi},$$

wo $\psi = F$ die gegebene Funktion von $a - \beta$ bezeichnet. Entsprechend wird:

$$(57) \quad \mu = \mathfrak{F}(a - \beta) \cdot \beta + \mathfrak{F}_2(a - \beta),$$

$$(58) \quad \lambda - \mu = (a - \beta) \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1(a - \beta) - \mathfrak{F}_2(a - \beta) = 2\psi_1 = 2\omega.$$

Hier ist $\lambda - \mu$ rein imaginär, ebenso $\alpha - \beta$; also ist $\mathfrak{F}$ eine reelle Funktion von $\alpha - \beta$, $\mathfrak{F}_2$ ist zu $\mathfrak{F}_1$ konjugiert imaginär. Zwischen den vier Funktionen ψ_1 , $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bestehen die beiden Gleichungen (56a) und (58), so daß $\mathfrak{F}$ durch ψ_1 bestimmt ist und der imaginäre Teil von $\mathfrak{F}_1$ gemäß (58) sich aus $\mathfrak{F}$ und ψ_1 berechnet, während der reelle Teil von $\mathfrak{F}_1$ (und $\mathfrak{F}_2$) willkürlich bleibt.

Endlich findet man W aus (2) durch Quadratur:

$$(59) \quad \lg W_\alpha = \int \lambda_\beta \operatorname{tg} \omega \, d\beta = - \int [\mathfrak{F}'(\alpha - \beta) \cdot \alpha + \mathfrak{F}_1'(\alpha - \beta)] \operatorname{tg} \psi_1(\alpha - \beta) \cdot d\beta + C,$$

wo C noch eine Funktion von α sein kann; ebenso

$$(60) \quad \lg W_\beta = - \int \mu_\alpha \operatorname{tg} \omega \, d\alpha = - \int [\mathfrak{F}'(\alpha - \beta) \cdot \beta + \mathfrak{F}_2'(\alpha - \beta)] \operatorname{tg} \psi_1(\alpha - \beta) \cdot d\alpha + C',$$

wo C' noch von β abhängen kann.

Daß die Gleichung (6), d. h. $\psi(\alpha - \beta) = 2 W_\alpha W_\beta \cos^2 \omega$ durch die Werte (59) und (60) tatsächlich erfüllt wird, erkennt man in folgender Weise: es ist

$$\begin{aligned} \lg W_\alpha &= \alpha \int \mathfrak{F}'(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \psi_1 \cdot d(\alpha - \beta) \\ &\quad + \int \mathfrak{F}_1'(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \psi_1 \cdot d(\alpha - \beta), \\ \lg W_\beta &= -\beta \int \mathfrak{F}'(\alpha - \beta) \operatorname{tg} \psi_1 \cdot d(\alpha - \beta) \\ &\quad - \int \mathfrak{F}_2'(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \psi_1 \cdot d(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

also: $\lg W_\alpha W_\beta = (\alpha - \beta) \cdot J_1 + J_2,$

und hierin durch partielle Integration unter Benutzung von (56a):

$$\begin{aligned} J_1 &= \mathfrak{F}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg} \psi_1 - \int \mathfrak{F} \frac{\psi_1'}{\cos^2 \psi_1} \, d(\alpha - \beta) = \mathfrak{F} \cdot \operatorname{tg} \psi_1 - \frac{\partial \lg F}{\partial \beta}, \\ J_2 &= (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) \cdot \operatorname{tg} \psi_1 - \int (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) \frac{\psi_1'}{\cos^2 \psi_1} \, d(\alpha - \beta) \\ &= (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) \operatorname{tg} \psi_1 - \int (2\psi_1 - (\alpha - \beta) \mathfrak{F}) \frac{\psi_1'}{\cos^2 \psi_1} \, d(\alpha - \beta) \\ &= (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) \operatorname{tg} \psi_1 - 2\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 + 2 \int \psi_1' \operatorname{tg} \psi_1 \, d(\alpha - \beta) + \int (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \partial \beta} \, d(\alpha - \beta) \\ &= (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) \operatorname{tg} \psi_1 - 2\psi_1 \operatorname{tg} \psi_1 - 2 \lg \cos \psi_1 + \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} (\alpha - \beta) - \int \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} \, d(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Das letzte Glied der rechten Seite ist gleich $\log F$; und somit wird in der Tat: $\log F = \lg(2 W_\alpha W_\beta \cos^2 \psi_1)$ bei passender Bestimmung der Integrationskonstanten.

Aber hier ist noch die Bedingung zu erfüllen, daß $W_\alpha d\alpha + W_\beta d\beta$ ein vollständiges Differential sei; das ist nur erfüllt, wenn $\mathfrak{F}(\alpha - \beta) = \text{Konst.}$, und wenn $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \text{reell}$ ist.

Für die Rotationsfläche der Kettenlinie ist $F_1 = a \cdot \cos(\alpha - \beta)$, wo a eine Konstante bezeichnet (vgl. § 12 der Abhandlung), also

$$F = 2 F_1^2 = \psi = 2 a^2 \cdot \cos^2(\alpha - \beta).$$

Für die Kugel vom Radius 1 ist (vgl. § 5 der Abhandlung):

$$F = 2 F_1^2 = \psi(\alpha - \beta) = \frac{2}{\cos^2(\alpha - \beta)}.$$

Da hiermit die Bestimmung aller Flächen konstanten Krümmungsmasse auf partielle Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt ist, so ist damit indirekt auch die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \sin z$$

geleistet; vgl. meine frühere Arbeit in den Sitzungsberichten der Akademie von 1922, S. 22. Damals hatte ich obige Gleichung (55) noch nicht aufgestellt; deshalb müssen einige Angaben dieser Arbeit über die Art der einzuführenden willkürlichen Funktionen abgeändert werden.

11. Aus demselben Grunde leidet die Abhandlung an einer Lücke, indem den willkürlichen Funktionen der Lösung ein zu großer Spielraum eingeräumt wurde, wie die Herren Liebmann und Kommerell richtig bemerkten. Unter Hinzunahme der Gleichungen (33) und (55) wird diese Lücke ausgefüllt, und unter Benutzung der früher aufgestellten Gleichungen gelingt es doch wieder, die Lösung auf bekannte Probleme zurückzuführen.

Die auf Seite 27 der Abhandlung über die Integration der Gleichung $s = \sin z$ gemachten Angaben, welche Operationen zur Bestimmung von R, R', Φ, Ψ auszuführen sind, müssen auf Grund der jetzt erreichten Resultate abgeändert werden.

Ferner ist als Ergänzung zu der Abhandlung hervorzuheben, daß die in § 7 derselben besprochene Schwierigkeit tatsächlich nicht besteht; infolgedessen führt das in § 8 angeführte Verfahren zwar zu neuen Lösungen der Bourschen Differentialgleichung,

aber nicht zu neuen Flächen, sondern nur zu orthogonalen Transformationen der gegebenen Fläche; man weist das durch geschickte Anwendung der Relationen für die Koeffizienten der orthogonalen Transformation nach, wie ich es für die Kugel tat. Die Anwendbarkeit der von mir befolgten Methode der Variation der Konstanten wird dadurch nicht gestört.

12. Endlich betrachten wir noch das Beispiel der Minimalflächen; eine solche Fläche ist dargestellt durch die Gleichungen (vgl. § 12 der Abhandlung):

$$x = i \int [\cos 2\alpha \cdot A' d\alpha - \cos 2\beta \cdot B' d\beta],$$

$$y = i \int [\sin 2\alpha \cdot A' d\alpha - \sin 2\beta \cdot B' d\beta], \quad z = A + B,$$

wo A eine Funktion von α , B eine solche von β bezeichnet.

Es ist

$$\lambda = 2\alpha, \quad \mu = 2\beta, \quad \omega = \alpha - \beta,$$

$$F = 2A'B' \cdot \cos^2(\alpha - \beta).$$

Wählt man A und B als Variable, so werden die Gleichungen

$$x = i \int [\cos 2\mathfrak{A} \cdot dA - \cos 2\mathfrak{B} \cdot dB],$$

$$y = i \int [\sin 2\mathfrak{A} \cdot dA - \sin 2\mathfrak{B} \cdot dB], \quad z = A + B,$$

$$F = 2 \cos^2(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}), \quad \omega = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}.$$

Die Gleichung (44) wird hier, da $W_{AB} = 0$ ist:

$$\frac{\partial R}{\partial B} + \frac{\partial R'}{\partial A} = 0,$$

man darf daher setzen

$$R = \frac{\partial P}{\partial A}, \quad R' = -\frac{\partial P}{\partial B},$$

und dann erhält man aus (43):

$$\xi = \int \left[\cos \Phi \cdot \frac{\partial P}{\partial A} \cdot dA - \cos \Psi \cdot \frac{\partial P}{\partial B} \cdot dB \right],$$

$$\eta = \int \left[\sin \Phi \cdot \frac{\partial P}{\partial A} \cdot dA - \sin \Psi \cdot \frac{\partial P}{\partial B} \cdot dB \right], \quad \zeta = i P(A, B),$$

wo P eine rein imaginäre Funktion bezeichnet. Es sind das die Gleichungen (98) der Abhandlung, aber P ist nicht willkürlich wählbar, sondern genügt der Gleichung (52)

$$-\frac{\partial P}{\partial A} \frac{\partial P}{\partial B} \cos^2 \mathfrak{B} = \cos^2 (\alpha - \beta).$$

Die Gleichungen (55 a) werden hier:

$$e^{i\varphi} \varphi_B - e^{-i\varphi} \varphi_A = 0, \quad e^{i\varphi} r'_B + e^{-i\varphi} r'_A = 0.$$

Für die Bonnet-Schwarzschen Biegungsflächen ist $r = 1$,
 $\varphi = \text{konst.}$

Die Integration geschieht analog wie bei den Rotationsflächen.

Es genügt P auch den aus (38) und (40) folgenden Gleichungen ($\mathfrak{L} = \lg \operatorname{tg} \omega$):

$$\begin{aligned} \frac{2}{\cos^2 (\alpha - \beta)} &= \mathfrak{L}_\alpha \frac{\partial \lg P_A}{\partial \beta} - \mathfrak{L}_\beta \left(\frac{\partial \lg P_A}{\partial \alpha} + 2 \operatorname{tg} \omega \right) \\ &= - \mathfrak{L}_\beta \frac{\partial \lg P_B}{\partial \alpha} + \mathfrak{L}_\alpha \left(\frac{\partial \lg P_B}{\partial \beta} + 2 \operatorname{tg} \omega \right). \end{aligned}$$

Verbesserung.

Seite 195, Zeile 10 und 6 v. u. Lies: „(55)“ statt „(19)“.

Seite 195, Zeile 13 v. u. Lies: „zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und eine Reihe von Quadraturen“ statt „eine Reihe von Quadraturen“.
