

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft II

Mai- bis Dezembersitzung

München 1923

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Zur Theorie der Raumkurven.

Von A. Voss.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

I.

Abwickelbare Flächen durch eine gegebene Kurve.¹⁾

§ 1.

Es sei P ein Punkt der Raumkurve C , dessen Koordinaten x, y, z Funktionen der Bogenlänge s sind, $\alpha, \beta, \gamma; \xi, \eta, \zeta; \lambda, \mu, \nu$ die den Frenetschen Formeln genügenden Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale (d. h. gegen die Kanten des Triäders von C), endlich ϱ, τ die Radien der Krümmung und Windung von C . Durch P sei eine Strecke PQ gezogen, deren Projektionen u, v, w auf die Triäderaxen die erzeugende Gerade g einer abwickelbaren Fläche bestimmen. Die Koordinaten von Q sind dann

$$1) \quad X = x + u\alpha + v\xi + w\lambda^2)$$

Geht man auf C von P aus um ds fort, so ist

$$2) \quad dX = \left(\alpha + u \frac{\xi}{\varrho} - v \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau} \right) + w \frac{\xi}{\tau} + \alpha u' + \beta v' + \lambda w' \right) ds.$$

Soll der Punkt $X + dX, Y + dY, Z + dZ$ auf den von Q um δ entfernten Punkt Q_1 von PQ fallen, so hat man

$$2a) \quad dX = \delta(u\alpha + v\xi + w\lambda)$$

und die Vergleichung von 2) und 2a) liefert dann

¹⁾ Die Gleichungen 1) und 2) gelten auch für die Vertauschung von $X\alpha\xi\lambda$ mit $Y\beta\eta\mu$ und $Z\gamma\zeta\nu$. Die Striche bezeichnen die Differentialquotienten nach s .

$$\begin{aligned}
 \delta u &= \left(1 - \frac{v}{\varrho} + u'\right) ds \\
 3) \quad \delta v &= \left(\frac{u}{\varrho} + \frac{w}{\tau} + v'\right) ds \\
 \delta w &= \left(-\frac{v}{\tau} + w'\right) ds,
 \end{aligned}$$

oder, wenn der im allgemeinen von Null verschiedene $\delta : ds$ durch σ bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}
 \sigma u &= 1 - \frac{v}{\varrho} + u' \\
 3a) \quad \sigma v &= \frac{u}{\varrho} + \frac{v}{\tau} + v' \\
 \sigma w &= -\frac{v}{\tau} + w'.
 \end{aligned}$$

Ist $w \neq 0$,¹⁾ so hat man

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{w} &= 1 - \frac{v}{\varrho} + u' : w' - \frac{v}{\tau}, \\
 \frac{v}{w} &= \frac{u}{\varrho} + \frac{w}{\tau} + v' : w' - \frac{v}{\tau},
 \end{aligned}$$

oder

$$4) \quad \frac{1}{w} - \frac{v}{\varrho w} + \frac{u}{w} \frac{v}{w \tau} + \frac{d^u}{ds} = 0,$$

$$5) \quad \frac{u}{w \varrho} + \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{v^2}{w^2}\right) + \frac{d^v}{ds} = 0,$$

also für $\frac{1}{w} = \sigma_1$, $\frac{v}{w} = \sigma_2$, $\frac{u}{w} = \sigma_3$,

$$4a) \quad \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{\varrho} + \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\tau} + \frac{d \sigma_3}{ds} = 0,$$

$$5a) \quad \frac{\sigma_3}{\varrho} + \frac{1 + \sigma_2^2}{\tau} + \frac{d \sigma_2}{ds} = 0.$$

¹⁾ $w = 0$ ist überhaupt auszuschließen; dieser Annahme entspricht nur die durch die Tangentenfläche von C gebildete Abwickelbare.

Schon hieraus lassen sich einige Schlüsse hinsichtlich der Integration des Systems 3 a) ziehen.

Erstens. Wird σ_3 willkürlich angenommen, so ist σ_2 durch eine Biccatische Gleichung 5 a) gegeben, damit also nach 4 a) auch σ_1 .

Zweitens. Wird σ_2 willkürlich gewählt, so liefert 5 a) den Wert von σ_3 , dann 4 a) auch σ_1 so daß nun u, v, w ohne jede Integration gefunden werden, d. h. unendlich viele abwickelbare Flächen durch C bestimmt sind.

Drittens. Werden $\frac{u}{w}$ und v als Konstanten c_1 und c_2 angenommen, so gibt 4)

$$1 - \frac{c_2}{\varrho} + \frac{c_1}{\tau} = 0.$$

Dies ist die bekannte Gleichung, welcher eine Bertrandsche Kurve C genügen muß; dabei muß aber noch die Gleichung

$$\frac{c_1}{\varrho} + \left(1 + \left(\frac{c_2}{w}\right)^2\right) \frac{1}{\tau} + \frac{d}{ds} \left(\frac{c_1}{w}\right) = 0$$

erfüllt sein, also w einer Ricccatischen Gleichung genügen, womit eine besondere Gattung Bertrandscher Kurven definiert ist.¹⁾

Viertens. Ist $u = 0$, so ist nach 4) $v = \varrho$ und aus 5) folgt

$$\arctg\left(\frac{v}{w}\right) + \int \frac{ds}{\tau} = \text{Const.},$$

das ist die bekannte Gleichung für die Konstruktion der Filar-evoluten von C .

Fünftens. Es kann auch beständig σ gleich Null sein, dies entspricht einem besonderen Falle, der hier der Kürze halber nicht weiter verfolgt werden soll, für allgemeine Schraubenlinien sich leicht durch Quadratur behandeln läßt.

¹⁾ Man kann hier die Konstruktion für die gemeine Schraubenlinie aller dieser abwickelbaren Flächen durch Quadratur bemerken.

§ 2.

Etwas einfachere Gleichungen ergeben sich noch, wenn man, um insbesondere das Problem der Traktrix-Evoluten von C in seiner allgemeinsten Gestalt in Betrachtung zu ziehen,¹⁾

$$u = at, \quad v = bt, \quad w = ct$$

mit der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ setzt, so daß nun a, b, c die Richtungscosinus von g gegen die Triöderaxen sind, und t die Entfernung PQ bedeutet. Multipliziert man die Gleichungen 3) des § 1

$$1 - \frac{tb}{\varrho} + t'a + a't = \sigma at$$

$$\frac{at}{\varrho} + \frac{tc}{\tau} + t'b + b't = \sigma bt$$

$$- \frac{bt}{\tau} + t'c + tc' = \sigma ct$$

mit a, b, c und addiert, so folgt

$$1) \quad a + t' = \sigma t,$$

also:

$$1 - \frac{tb}{\varrho} + a't - a^2 = \Xi = 0$$

$$2) \quad \frac{at}{\varrho} + \frac{tc}{\tau} + b't - ab = II = 0$$

$$- \frac{tb}{\tau} + c't - ac = Z = 0,$$

so daß t' ganz herausfällt. Da jetzt

$$a\Xi + bH + cZ = a - a^3 - ab^2 - ac^2 = 0$$

ist, so wird falls $a \neq 0$ ist, durch die beiden letzten Gleichungen von 2) durch die erste erfüllt.

Setzt man jetzt

$$3) \quad \begin{aligned} b &= \sqrt{1 - a^2} \cos \varphi \\ c &= \sqrt{1 - a^2} \sin \varphi \end{aligned}$$

¹⁾ Davon wird hier indes der Kürze wegen nicht wieder gehandelt.

so erhält man durch Elimination von t aus 2), wobei $c \neq 0$ annehmen ist,

$$4) \quad \frac{ac}{\varrho} + \frac{1-a^2}{\tau} + cb' - bc' = 0$$

und aus 3)

$$b'c - c'b = -(1-a^2) \frac{d\varphi}{ds}.$$

Aus 4) wird jetzt

$$5) \quad \frac{a}{\varrho} \sin \varphi + \frac{\sqrt{1-a^2}}{\tau} - \frac{d\varphi}{ds} \sqrt{1-a^2} = 0.$$

Um diese Differentialgleichung auf ihre einfachste Form zu bringen, setze man

$$\cos \varphi = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \quad \sin \varphi = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2},$$

womit $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2d\theta}{ds} : 1 + \theta^2$ wird. So wird aus 5) die Riccatische Gleichung:

$$6) \quad \frac{2d\theta}{ds} = \frac{1}{\varrho} \left(\left[\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{\varrho}{\tau} \right] + \theta^2 \left[\frac{\varrho}{\tau} - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right] \right).$$

Sie bestimmt bei konstantem ϱ/τ d. h. für jede Schraubenlinie bei konstanten a das gesuchte θ durch Quadratur, und es scheint von Interesse, daß man für diejenigen Erzeugenden von abwickelbaren Flächen, welche einen konstanten Winkel mit der Kurventangente einschließen, die Verallgemeinerung der Gleichung der Filarevoluten (vgl. § 1, unter viertens) erhält.

Haben nämlich

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \frac{\tau}{\varrho} + 1, \quad 1 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \frac{\tau}{\varrho}$$

gleiches Vorzeichen, so daß etwa das erste mit $\pm p^2$, das zweite mit $\pm q^2$ bezeichnet wird, so hat man

$$\frac{2d\theta}{p^2 + q^2 \theta^2} = \pm \frac{ds}{\tau}.$$

Da aber bei der Ableitung der Gleichung 5) a nicht als konstant vorausgesetzt ist, so ist die Integration durch einen

arcus tangens¹⁾ auch dann nur möglich, wenn nur das Verhältnis von

$$\frac{a}{\varrho \sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{\tau} : \frac{1}{\tau} = \frac{a}{\varrho \sqrt{1-a^2}}$$

konstant $= k$ oder

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{k-1}{k+1} \frac{\tau}{\varrho}$$

ist. Hierdurch sind für jede Kurve $C \infty^1$ abwickelbare Flächen durch C bestimmt.

II.

Zur Theorie der Raumkurven.

B. de St. Venant (1844) und J. Bertrand (1848/50) bemerkten, daß das Verhältnis $\varrho : \tau = w$ der Krümmungs- und Windungsradien für jede zylindrische Schraubenlinie konstant, und auch umgekehrt jede Kurve mit konstantem w eine solche Schraubenlinie ist. Dieser Satz findet sich z. B. in den gebräuchlichen Lehrbüchern (L. Bianchi, Differentialgeometrie, Leipzig, S. 17, G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven, 2. Aufl. 1910, Bd. I S. 302, dort auch mit Berücksichtigung des besonderen Falles $w = i$).²⁾ Verallgemeinerungen des Satzes scheinen bisher nicht erwähnt zu sein. In der Tat hängt auch die Untersuchung weiterer Fragen meistens von nicht einfachen Differentialgleichungen ab. Einige Fälle übersichtlicher Art mögen hier jedoch angeführt werden.

§ 1.

Soll die Gerade g oder PQ von I, deren Projektionen auf die Triëderaxen p, q, r sind, mit einer festen Geraden, deren Richtungscosinus c_1, c_2, c_3 sind, einen konstanten Winkel θ bilden, so ist

$$1) \quad (ac)p + (\lambda c)q + (\xi c)r = \cos \theta \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Dabei kann neben $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ auch $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ angenommen werden. Zur Abkürzung ist in 1) gesetzt:

$$\begin{aligned} ac_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 &= (ac), & c_1 + \eta c_2 + \zeta c_3 &= (\xi c), \\ \lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 &= (\lambda c). \end{aligned}$$

¹⁾ oder bei ungleichen Vorzeichen durch einen Logarithmus.

²⁾ Hier sollen nur reelle Kurven betrachtet werden.

Durch ein- und zweimalige Differentiation nach dem Bogen s der Kurve C erhält man aus 1) zwei weitere Differentialgleichungen zwischen p, q, r, ϱ, τ , die aber im allgemeinen so weitläufig sind, daß man sich auf konstante p, q, r zunächst beschränken wird.

A) Erster Fall. Ist

$$1) \quad (ac) + p(\lambda c) = k, \left(\cos \theta = \frac{k}{\sqrt{1+p^2}} \right),$$

so schließt g in der rektifizierenden Ebene mit der Tangente von C einen konstanten Winkel ein. Aus 1) folgt:

$$2) \quad (\xi c)(1 + pw) = 0$$

$$3) \quad [(ac + w(\lambda c))(1 + wp) + (\xi c)p\varrho w' = 0.$$

Ist nun w nicht konstant, so kann man immer voraussetzen, daß für einen gewissen Bereich von C , $1 + wp \neq 0$ sei. Dann hat man aus 1), 2), 3):

$$\begin{aligned} 4a) \quad (ac) &= kw : w - p \\ (\lambda c) &= -k : w - p \\ (\xi c) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$4b) \quad 1 = k^2(w^2 + 1) : (w - p)^2.$$

Es ist daher

$$w(1 - k^2) = p \pm \sqrt{p^2 + 1 - k^2}$$

reell für $|k| < 1$, und dieser Bedingung möge k in diesem Bereich genügen. Es ist dann daselbst $1 + wp \neq 0$. Wäre nämlich irgendwo $w = -1 : p$, so müßte nach 4 b)

$$\frac{(1 + p^2)^2}{p^2} = k^2 \frac{(1 + p^2)}{p^2}$$

oder

$$k^2 = 1 + p^2 \text{ sein.}$$

Auch kann w nicht gleich p sein, weil sonst $w^2 + 1 = 0$ gegen die Voraussetzung, daß w reell sein soll, sein müßte. Die Gleichungen 4 a) bleiben also völlig bestimmt, und die Annahme, daß w variabel sei, führt nach 4 b) auf den Widerspruch, daß w konstant sein muß. Es ergibt sich also:

Soll die Gerade g in der rektifizierenden Ebene,

die einem konstanten Winkel mit der Tangente bildet, zu einer festen Richtung eine konstante Neigung haben, so muß die Kurve eine Schraubenlinie sein. Dies ist eine sehr nahe liegende Verallgemeinerung des Bertrand'schen Satzes.

B) Zweiter Fall. Es sei $(\xi c) + (\lambda c)p = 0$, d. h. die Gerade g in der Normalebene, die mit der Hauptnormale einen konstanten Winkel bildet, soll zu einer festen Richtung senkrecht stehen. Diese Bedingung liefert

$$\begin{aligned} (\alpha c) + w(\lambda c) + wp^2(\lambda c) &= 0 \\ (\lambda c)[p(1 + w^2(1 + p^2)) - \varrho w(1 + p^2)] &= 0. \end{aligned}$$

Dies gibt, da $(\lambda c) = 0$ auch $(\alpha c) = 0$, $(\xi c) = 0$ nach sich ziehen würde,

$$\frac{w'}{1 + w^2(1 + p^2)} = \frac{p}{1 + p^2} \frac{1}{\varrho},$$

also bei willkürlich angenommenen ϱ einen $\arctg$ in Bezug auf das Integral $\int \frac{ds}{\varrho} + \text{const.}$ für w und damit auch τ .

C) Dritter Fall. Setzt man für eine Gerade in der Schmiegungebene

$$(\xi c) + (\alpha c)p = 0.$$

Man erhält auf demselben Wege die Gleichung

$$p(1 + p^2 + w^2) - \frac{w'}{w\varrho}(1 + p^2) = 0,$$

woraus ein ganz ähnliches Resultat folgt. Die betreffenden Kurven C sind hierdurch also völlig bestimmt; ihre Gleichungen in Punktkoordinaten wird man freilich nur durch Integration einer Riccati'schen Gleichung erhalten.

D) Der allgemeinere Fall

$$1) \quad (\alpha c)p + (\lambda c)q + (\xi c)r = 0$$

gibt unter der Voraussetzung $r \neq 0$

$$2) \quad (\alpha c)[p^2 + pqw + r^2] + (\lambda c)[qp + w'(q^2 + r^2)] = 0,$$

$$3) \quad (\alpha c)[w'\varrho r p q - pT] + (\lambda c)[(q^2 + r^2)w'\varrho r - qT] = 0,$$

wenn

$$T = p^2 + 2pqw + w^2q^2 + r^2(1 + w^2) = (p + qw)^2 + r^2(1 + w^2)$$

gesetzt wird. Aus 1), 2), 3) folgt dann die Differentialgleichung für w , welche entwickelt die einfache Gestalt

$$\frac{rw'w}{(wp-q)}(p+qw^2)+r^2(1+w^2)=\frac{ds}{\tau}$$

annimmt, aus deren Lösung wieder q folgt.

E) Soll die Hauptnormale mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel bilden, so hat man

$$(\xi c) = k$$

zu setzen. Dies gibt die Gleichungen

$$(ac) = + \frac{k w}{q w'}$$

$$(\xi c) = k$$

$$(\lambda c) = - \frac{k(1+w^2)}{q w'},$$

also

$$\left(\frac{1+w^2}{q^2 w'^2}\right)^3 k^2 = 1.$$

Hieraus folgt wieder $\frac{w}{\sqrt{1+w^2}} = \pm \int \frac{ds}{q} + c$ und damit τ .

§ 2.

In einigen Fällen kann man auch p und w gleichzeitig als veränderlich ansehen.

A) Erster Fall.

$$1) \quad (\xi c) + (ac)p = 0$$

$$2) \quad (ac)[p'q - (1+p^2)] - w(\lambda c) = 0.$$

Setzt man

$$3) \quad S = p'q - (1+p^2),$$

so gibt die Differentiation von 2)

$$-(ac)(S - w^2)p + q(ac)\frac{dS}{ds} - (ac)Sq\frac{w'}{w} = 0$$

oder

$$-S\left\{p + q\frac{w'}{w}\right\} + w^2p + q\frac{dS}{ds} = 0.$$

Setzt man jetzt $p = k\varrho$, also den Teilungsmodus der Geraden g in der Schmiegungeebene proportional dem Krümmungsradius, so hat man, da ϱ herausfällt, eine lineare Differentialgleichung einfachster Art bei angenommenem w für S . Setzt man den Wert von S in 3) ein, so erhält man

$$S = k\varrho\varrho' - (1 + k^2\varrho^2),$$

also eine lineare Differentialgleichung für ϱ^2 , und damit den zugehörigen Wert von τ .

B) Zweiter Fall.

Setzt man

$$1) \quad (\xi c) + (\lambda c)p = 0, \quad (g \text{ in der Normalebene})$$

so wird für

$$2) \quad \Sigma = p'\varrho - w(1 + p^2)$$

$$3) \quad (\lambda c)\Sigma - (\alpha c) = 0,$$

also

$$4) \quad \varrho \frac{d\Sigma}{ds} - p(\Sigma w - 1).$$

Für $p = \varrho k$ erhält man wieder eine lineare Differentialgleichung für Σ , und dann aus 2) eine lineare Differentialgleichung für ϱ^2 .

C) Dritter Fall.

$$1) \quad (\alpha c) + (\lambda c)p = 0$$

$$2) \quad (\xi c)(1 + pw) + (\lambda c)p'\varrho.$$

Es sei $1 + pw \neq 0$ in dem gewählten Bereich der Kurve C , so daß für $p'\varrho = (1 + pw)q$

$$(\xi c) + (\lambda c)q = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt weiter

$$3) \quad -((\alpha c) + (\lambda c)w) + (\xi c)qw + (\lambda c)q'\varrho = 0.$$

Aus 1), 2), 3) folgt jetzt, wenn (λc) nicht Null sein soll, was auch $(\alpha c) = 0$, $(\xi c) = 0$ zur Folge haben würde,

$$4) \quad p - w - q^2w + q'\varrho = 0.$$

Wählt man jetzt $p = kw$, also proportional dem Verhältnis der Krümmungs- und Windungsradien, so wird aus 4)

$$w[k-1] - q^2 w + q' \varrho = 0, \text{ oder} \\ (k-1)q^2 + q' \tau = 0,$$

welche Gleichung q mittels τ bestimmt.

Setzt man jetzt noch

$$q = \frac{w' k \varrho}{1 + k w^2}, \text{ und } \varrho = w \tau,$$

so hat man wieder eine Gleichung für w , also auch ϱ , falls τ als Funktion von s angenommen ist.

III.

Über die Minimalkurven.

Unter einer Minimalkurve kann man alle diejenigen Kurven verstehen, deren Koordinaten der Gleichung

$$1) \quad (x' z'' - z' x'')^2 + (z' x'' - x' z'')^2 + (x' y'' - y' x'')^2 = 0$$

genügen. Bezeichnet man die drei Determinanten in 1) durch u, v, w , so folgt aus

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

wenn man nur den trivialen, nur gerade Linien liefernden Fall $u = v = w = 0$ ausscheidet, in bekannter Weise das System der Gleichungen

$$2) \quad \begin{aligned} y' z'' - z' y'' &= (\lambda^2 - 1) w \\ z' x'' - x' z'' &= (\lambda^2 + 1) i w \\ x' y'' - y' x'' &= 2 \lambda w, \end{aligned}$$

wo w ein Proportionalitätsfaktor und λ irgend eine Funktion der unabhängigen Variablen t ist. Multipliziert man die Gleichungen 2) mit $x', y', z'; x'', y'', z''$ und addiert, so erhält man

$$3) \quad (\lambda^2 - 1) x' + (\lambda^2 + 1) y' i + 2 \lambda z' = 0 \\ 4) \quad (\lambda^2 - 1) x'' + (\lambda^2 + 1) y'' i + 2 \lambda z'' = 0,$$

da von $w = 0$ abzusehen ist. Differentiiert man 3) nach t , so folgt nach 4)

$$5) \quad \lambda' (\lambda (x' + i y') + z') = 0.$$

Es sind demnach zwei wesentlich verschiedene Lösungen vorhanden. Entweder ist $\lambda' = 0$, also λ eine Konstante, oder es ist λ eine Funktion von t und dann muß die Gleichung

$$6) \quad \lambda(x' + i y') + z' = 0$$

erfüllt sein.

Im ersten Falle folgt aus 3)

$$(\lambda^2 - 1)x + i y(\lambda^2 + 1) + 2\lambda z = \text{const.},$$

es ergeben sich ebene Kurven. Soll eine solche Kurve durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehen, so ist

$$7) \quad (\lambda^2 - 1)(x - x_0) + i(\lambda^2 + 1)(y - y_0) + 2\lambda(z - z_0) = 0$$

und die Ebenen dieser Kurve umhüllen den isotropen Kegel mit der Spitze x_0, y_0, z_0 . Die expliziten Gleichungen der Kurven, erhält man, wenn x und y als willkürliche Funktionen von t angenommen werden, und aus 7) z bestimmt wird. Aus der zweimal differentiierten Gleichung folgen dann wieder die Ausdrücke für u, v, w , so daß man jedesmal unendlich viele Kurven durch x_0, y_0, z_0 erhält.

Im zweiten Falle hat man

$$\lambda(x' + i y') + z' = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)x' + i(\lambda^2 + 1)y' + 2\lambda z' = 0$$

und erhält hieraus die Minimalkurven erster Ordnung nach der Bezeichnung von G. Scheffers (Einführung in die Theorie der Kurven, 1910, Bd. I, S. 242—243), dessen Darstellung hier durch eine etwas andere Anordnung ersetzt ist.