Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft II

Mai- bis Dezembersitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die isotherme Teilung.

Von A. Voss.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

Jede quadratische Differentialform $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ einer reellen Fläche (auf die wir uns hier beschränken) läßt sich durch Lösung einer Differentialgleichung auf die isotherme Form $ds^2 = E(du_1^2 + dv_1^2)$ bringen, und durch Einführung der willkürlichen Funktion $u_1 + i v_1 = \varphi(u_2 + i v_2)$ jede andere isotherme Teilung erhalten. Jeder isothermen Teilung entspricht daher eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Funktion einer komplexen Variabeln, wenn man von einem konstanten additiven Teil absieht. Die umgekehrte Frage indessen, wie man aus irgend einer gegebenen isothermen Teilung diese Funktion findet, scheint bisher nicht behandelt zu sein, obwohl sie vielleicht nicht ohne Interesse ist. Dazu schien es passend, in den § I und II einige allgemeinere Bemerkungen vorauszuschicken.

§ I.

Wir betrachten zunächst die Abbildung einer reellen Fläche vom Krümmungsmaß Null auf die Ebene mit den rechtwinkeligen Koordinaten x, y. Soll das Quadrat des Längenelementes

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

die Form $dx^2 + dy^2$ annehmen, so hat man aus den Gleichungen

$$x_u^2 + y_u^2 = e, \qquad x_v^2 + y_v^2 = g, \qquad x_u x_v + y_u y_v = f$$

x und y als Funktionen von u, v zu ermitteln. Setzt man

$$1)\qquad \begin{aligned} x_u &= \varepsilon \cos\varphi, & y_u &= \varepsilon \sin\varphi, \\ x_v &= \gamma \cos\psi, & y_v &= \gamma \sin\psi, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \sqrt{e}$, $\gamma = \sqrt{g}$ positiv sind, und

$$\text{2)} \qquad \cos(\varphi - \psi) = \frac{f}{\sqrt{eg}} = \zeta$$

wird, so erhält man aus den Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen 1) durch die Multiplikation mit $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ resp. $\cos\psi$, $\sin\psi$ und Addition derselben

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial \gamma}{\partial u}\cos(\varphi - \psi) = \gamma\,\psi_u \sin(\varphi - \psi), \\ &\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\cos(\varphi - \psi) - \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \varepsilon\,\varphi_v \sin(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Für die Differentialkovariante

$$\text{3 a)} \qquad z = x_u y_v - x_v y_u = \varepsilon\gamma\sin(\psi - \varphi)$$

hat man ferner

$$\text{4)} \qquad z^2 = eg - f^2,$$

wo z mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen werden kann. Da nach 2) $\sin(\psi - \varphi) = \sqrt{1 - \zeta^2}$, hat $\sqrt{1 - \zeta^2}$ das Vorzeichen von z, und es wird

$$\cos(\psi - \varphi)(\psi_u - \varphi_u) = -\zeta\zeta_u : \sqrt{1 - \zeta^2},$$

oder nach 2)

$$\text{5)} \qquad \psi_u - \varphi_u = -\frac{\zeta_u}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Eliminiert man aus 3) mittels 5) ψ_u, so hat man

$$\text{6)} \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right) = -\psi_u = -\left(\varphi_u - \frac{\zeta_u}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \\ &\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right) = -\varphi_v. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ist jetzt φ zu bestimmen. Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)\right]$$
$$- \frac{\zeta_u}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0$$

ist aber hier erfüllt. Setzt man nämlich den Koordinatenwinkel gleich ω, so hat man aus $\cos\omega = \zeta$

$$\omega_u = -\frac{\zeta_u}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\cos\omega - \frac{\partial \gamma}{\partial u}}{\varepsilon \sin\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u}\cos\omega - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}}{\gamma \sin\omega}\right) - \omega_{uv} = 0;$$

dies aber ist (vgl. z. B. Darboux, Théorie générale des surfaces II, S. 384) wirklich gleich Null.

Hat man nun aus 6) durch Quadratur φ in der Form $\varphi = \varphi_0 + c$, wo φ_0 eine bestimmte Funktion von u, v ist, ermittelt, so ist $\psi = \varphi_0 + c + \arcsin\sqrt{1-\zeta^2} = \psi_0 + c$ und x, y ergeben sich durch zwei weitere Quadraturen vollständiger Differentiale in der Gestalt

$$7)\qquad \begin{aligned} x &= \int \varepsilon\, du \cos(\varphi_0 + c) + \int \gamma\, dv \cos(\psi_0 + c) + c_3, \\ y &= \int \varepsilon\, du \sin(\varphi_0 + c) + \int \gamma\, dv \sin(\psi_0 + c) + c_4 \end{aligned}$$

oder, falls

$$\begin{aligned} x_1 &= \int \varepsilon\, du \cos\varphi_0 + \int \gamma\, dv \cos\psi_0, \\ y_1 &= \int \varepsilon\, du \sin\varphi_0 + \int \gamma\, dv \sin\psi_0 \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$7\text{ a})\qquad \begin{aligned} x &= x_1 \cos c - y_1 \sin c + c_3, \\ y &= y_1 \cos c + x_1 \sin c + c_4, \end{aligned}$$

so daß

$$dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dU^2 + dV^2$$

wird. Die Formeln 7 a) sind aber nichts anderes als die der rechtwinkeligen kongruenten oder symmetrischen Transformation, so daß tatsächlich nur eine e i n z i g e Lösung entsteht.

Wird bereits $f = 0$ vorausgesetzt, so ist die direkte Rechnung noch einfacher. Denn jetzt ist

$$x_u = \lambda y_u, \qquad y_v = -\lambda x_v$$

und es wird

$$x_u = \frac{\eta\varepsilon\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad x_v = \frac{\eta_1\gamma}{\sqrt{1+\lambda^2}}; \quad y_u = \frac{\eta\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad y_v = \frac{\eta_1\gamma\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

wo η und η_1 nach Belieben gleich der positiven oder negativen Einheit zu setzen sind, während aus 8) jetzt die Gleichungen

$$\frac{\lambda_u}{1+\lambda^2} = -\frac{\eta}{\eta_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{\lambda_v}{1+\lambda^2} = \frac{\eta_1}{\eta}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\frac{1}{\varepsilon}$$

folgen, so daß

$$\text{9)} \qquad \operatorname{arc\,tg} \lambda = \frac{\eta}{\eta_1}\int\left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}\frac{dv}{\varepsilon} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\frac{du}{\gamma}\right) + \text{const.}$$

sich ergibt, und damit sind x, y vollständig bestimmt.

§ II.

Die durch Fortlassung selbstverständlicher Gleichungen viel kürzer darstellbare Betrachtung des § I, welche einfacher sein dürfte, als die sonst wohl gebräuchlichen, läßt sich für jede developpabele Fläche verallgemeinern. Bekanntlich ist die Ebene die einzige Fläche, deren sämtliche Biegungen sich bisher durch Quadraturen haben bestimmen lassen, während durch die ausgezeichneten Arbeiten von Darboux, Bianchi und anderen in zahlreichen speziellen Fällen das Boursche Problem seine Lösung gefunden hat.

Setzt man in § I, 7)

$$U = \int (\varepsilon\, du \sin\varphi_0 + \gamma\, dv \cos\varphi_0,$$
$$V = \int (\varepsilon\, du \cos\varphi_0 + \gamma\, dv \sin\varphi_0),$$

so ist $ds^2 = dU^2 + dV^2$; U und V sind bekannte Funktionen von u, v, wobei ds^2 in § I das Krümmungsmaß Null hat.

Es seien nun

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} X &= x + (v_1 - u_1)\alpha, \\ Y &= y + (v_1 - u_1)\beta, \\ Z &= z + (v_1 - u_1)\gamma \end{aligned}$$

die Koordinaten einer Developpabeln F; x, y, z die eines Punktes ihrer von dem Bogenelement du_1 abhängigen Gratlinie, α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente derselben, R der Krümmungshalbmesser, so daß

$$R^2 = \frac{1}{\alpha_{u1}^2 + \beta_{u1}^2 + \gamma_{u1}^2},$$

dann ist nach 1) das Quadrat des Längenelementes von F gegeben durch

$$ds^2 = dv_1^2 + du_1^2\frac{(v_1 - u_1)^2}{R^2}.$$

Setzt man jetzt

$$\xi = v_1 \cos u_0 + \int d u_0 u_1 \sin u_0,$$
$$\eta = v_1 \sin u_0 - \int d u_0 u_0 \cos u_0,$$

wo u_0 eine passend zu wählende Funktion von u_1 allein ist, so wird

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d v_1^2 + d u_0^2 (v_1 - u_1)^2.$$

Setzt man endlich

$$u_0 = \int \frac{d u_1}{R},$$

so wird $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = ds^2$. Um also die gegebene Fläche F als Verbiegung der Ebene ξ, η zu erhalten, hat man aus den Gleichungen

$$\xi = U = \varphi(u_1 v) = \Phi(u_1, v_1),$$
$$\eta = V = \psi(u_1 v) = \Psi(u_1, v_1)$$

u_1, v_1 als Funktionen von u, v zu ermitteln; die Lösung enthält noch die willkürliche Funktion R. Verlangt man insbesondere, daß die Fläche F eine g e g e b e n e Krümmung und Torsion ihrer Gratlinie habe, so muß man allerdings die betreffende Riccatische Gleichung lösen, die nun die Koordinaten x, y, z und damit auch R bestimmt, so daß eine ganz bestimmte Transformation entsteht.

§ III.

Ist eine Developpable mittels der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = E(du^2 + dv^2) = ds^2,$$

wobei $\sqrt{E} = \varepsilon$ isotherm auf die Ebene x, y abgebildet, so ist

$$dx + i\,dy = \varepsilon\lambda(du + i\,dv),$$

1) $$dx - i\,dy = \frac{\varepsilon}{\lambda}(du - i\,dv,$$

so daß λ Funktion von u, v ist, so wird nach 1)

$$dx - i\,dy = \varepsilon\bar{\lambda}(du - i\,dv)$$

für $\bar{\lambda}$ als konjugierte Funktion von λ. Aus 1) folgt jetzt

$$\lambda\lambda = 1, \quad \text{oder} \quad \lambda = e^{i\omega}.$$

Nun hat man aus 1)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + i \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial v} = i \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

oder

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = - \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial v},$$

also

I) $$\omega = \int \left(\frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} d v - \frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} d u \right) + \text{const.},$$

woraus

II) $$x + y i = C \int e^{i \int \left(\frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} d v - \frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} d u \right)} \varepsilon (d u + i d v) + \text{const.}$$

mit den komplexen Konstanten C, c, die man übrigens auch gleich 1 und 0 setzen kann.

Damit ist aber die Funktion $x + y i$, deren Ausdruck in $u + i v$ bei gegebenem ε gesucht wurde, völlig bestimmt.

Man kann nun auch umgekehrt die Formel II) direkt beweisen. Setzt man das Längenelement in der Form $d s^2 = d x^2 + d y^2$ voraus, so ist, falls

$$(x + y i) = f(u + i v) = U + i V$$

ist, $$U_u = V_v, \quad U_v = - V_u, \quad U_{uu} + U_{vv} = 0.$$

Da jetzt $\varepsilon = \sqrt{U_u^2 + U_v^2}$ wird, hat man

a) $$\frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} = \frac{U_u U_{uu} + U_v U_{vu}}{U_u^2 + U_v^2},$$

b) $$\frac{\partial l \varepsilon}{\partial v} = U_u U_{uv} + U_v U_{vv}.$$

Setzt man rechts in a) $U_{uu} = - U_{vv}$, in b) $U_{vv} = - U_{uu}$ und

$$z = U_u, \quad \zeta = U_v,$$

so wird

$$\frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} = \frac{\zeta z_v - \zeta_v z}{z^2 + \zeta^2}, \quad \frac{\partial l \varepsilon}{\partial v} = \frac{z \zeta_u - \zeta z_u}{z^2 - \zeta^2}.$$

Für

$$\operatorname{arctg} \frac{\zeta}{z} = \omega, \quad \varepsilon = \sqrt{z^2 + \zeta^2}, \quad \cos \omega = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \zeta^2}}, \quad \sin \omega = \frac{\zeta}{\sqrt{z^2 + \zeta^2}}$$

folgt also

$$\frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} dv - \frac{\partial l \varepsilon}{\partial v} du = - d\omega,$$

so daß das Integral II) übergeht in

$$\int (du + i\,dv) \, | z - i\zeta |.$$

Aber der Integrand ist jetzt nichts anderes als

$$du\,U_u + i\,dv\,U_u - i\,du\,U_v + dv\,U_v$$

oder $\quad du\,U_u + dv\,U_v + i(du\,V_u + dv\,V_v) = d(U + i\,V).$

Ist nur ein isothermes Längenelement beliebig gegeben, so ist zwar $E = U^2 + V^2$; es handelt sich dann um die Bestimmung von U und V. Es ist also die Bestimmung des Integrals II erforderlich, um die zugehörige Funktion $x + yi$ zu finden. Allerdings kann man ja auch direkt aus E die beiden Bestandteile U und V ermitteln, dies führt aber gerade zu derselben Formel II, weshalb dies hier nicht wiederholt werden soll.

§ IV.

Es ist vielleicht nicht unpassend, einige Beispiele anzuführen. In den einfachsten Fällen (Polarkoordinaten, rationale ganze Funktionen etc.) macht die Berechnung des Integrals in § III keine Schwierigkeit. Ist z. B.

I) $\quad E = (2u + 1)^2 + 4v^2, \quad \varepsilon = \sqrt{(2u + 1)^2 + 4v^2},$

so wird

$$\frac{\partial l \varepsilon}{\partial u} dv - \frac{\partial l \varepsilon}{\partial v} du = d \operatorname{arctg} \left(\frac{2v}{2u + 1} \right).$$

Setzt man nun

$$2v = \varrho \sin \omega, \qquad 2u + 1 = \varrho \cos \omega,$$

so wird

$$x + yi = \int (\cos \omega + i \sin \omega)\, \varrho\, (du + i\,dv) + \text{const.}$$

oder für $c = 0$

$$x + yi = (u + iv)^2 + (u + iv).$$

II) Nimmt man $z = \sin (u + iv)$, so wird

$$dz = \cos (u + iv)(du + i\,dv),$$

$$\overline{dz} = \cos (u - iv)(du - i\,dv),$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \sqrt{e^{2v} + e^{-2v} + 2 \cos 2u} = \tfrac{1}{2} \Delta.$$

Es ist also

$$z = \int e^{-i \int \frac{(e^{2v} - e^{-2v})\, du + 2 \sin (2u)\, dv}{\Delta^2}} \varepsilon (du + i\, dv)$$

zu berechnen. Aus der Identität

$$d\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(u \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)\right)\right) = \frac{(e^{2v} - e^{-2v}) \cdot du + 2 \sin (2u)\, dv}{\Delta^2}$$

auf die man aus § III geführt wird, erhält man dann z, wenn man

$$\sin u\, (e^v - e^{-v}) = \varrho \sin \omega,$$
$$\cos u\, (e^v - e^{-v}) = \varrho \cos \omega$$

setzt, so daß in der Tat die Sinusfunktion entsteht.

III) Konfokale Kegelschnitte. Nimmt man

$$x = {}^1/_2 \left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right) \sin v_1, \quad y = {}^1/_2 \left(u_1 - \frac{1}{u_1}\right) \cos v_1,$$

so wird

$$x + yi = {}^1/_2\, i \left(u_1 e^{-iv_1} - \frac{1}{u_1} e^{iv_1}\right) \text{ für}$$

$$u_1 = e^{-u}, \quad v_1 = -v$$

die Gleichung

$$E_1 = {}^1/_4 (e^{2u} + e^{-2u} + e^{2iv} - e^{-2iv})$$

liefern, so daß ε gerade denselben Wert wie im Falle II erhält, so daß sich das bekannte Resultat ergibt. Die direkte Bestimmung des Integrals würde hier schon weitläufig ausfallen.

IV) Etwas anders liegt die Sache aber beim isothermen System konjugierter Kreisbüschel.

Die orthogonalen Kreisbüschel

1) $$x^2 + y^2 - 2ux + k^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2vx - k^2 = 0$$

geben für $u > k$ zur Bestimmung der reellen Schnittpunkte der Kreise

2) $$ux - vy = k^2.$$

Setzt man

$$x = \frac{k^2}{u - vt}, \quad y = \frac{k^2 t}{u - vt},$$

so ist nach 1)

4) $$t^2 = \frac{u^2 - k^2}{k^2 + v^2}.$$

Die Differentiation von 1) liefert

$$(x - u)\,dx + y\,dy = x\,du,$$
$$x\,dx + (y - v)\,dy = y\,dv$$

oder nach 3) für $\sigma = (x - u)(y - v) - xy$

$$\sigma\,dx = x(y - v)\,du - y^2\,dv,$$
$$\sigma\,dy = y(x - u)\,dv - x^2\,du$$

oder

$$dx^2 + dy^2 = k^4 \frac{du^2(k^2 + v^2) + dv^2(u^2 - k^2)\,t^2}{\sigma^2(u - vt)^2}.$$

Setzt man aus 4) t und t^2 rechts ein, so wird

$$-\sigma = \frac{(u\sqrt{k^2 + v^2} - v\sqrt{u^2 - k^2})\sqrt{u^2 - k^2}}{u - vt},$$

also

5) $$dx^2 + dy^2 = k^4(u^2 - k^2)(v^2 + k^2)\frac{\left(\left(\frac{du}{u^2 - k^2}\right)^2 + \left(\frac{dv}{k^2 - v^2}\right)^2\right)}{(u\sqrt{v^2 + k^2} - v(\sqrt{u^2 - k^2})^2}.$$

Diese isotherme Teilung ist jetzt auf ihre Normalform zu bringen. Setzt man nun in 5)

$$\frac{u - k}{u + k} = e^{2u_1}, \quad \operatorname{arctg}\frac{v}{k} = v_1 \quad \text{oder} \quad v = k\operatorname{tg} v_1,$$

so wird

$$v^2 + k^2 = \frac{k^2}{\cos^2 v_1}, \qquad \frac{dv}{v^2 + k^2} = \frac{1}{k}\,dv_1,$$

$$u = -k\frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{e^{u_1} - e^{-u_1}},$$

$$u^2 - k^2 = \frac{4k^2}{(e^{u_1} - e^{-u_1})^2} \quad \frac{du}{u^2 - k^2} = dl\sqrt{\frac{u - k}{u + k}}$$

und nach einfacher Zwischenrechnung

6) $$dx^2 + dy^2 = \frac{4k^2(du_1^2 + dv_1^2)}{(e^{u_1} + e^{-u_1} + 2\sin v_1)^2},$$

so daß

$$\varepsilon = \frac{2k}{e^{u_1} + e^{-u_1} + 2\sin v}$$

folgt, womit auch w bestimmt ist.

Als Vergleichsfunktion bei der Bestimmung des vollständigen Differentials kann hier

$$X + Yi = k \operatorname{arctg}(U + iV)$$

dienen. Es wird dann

$$dX^2 + dY^2 = \frac{16k^2(dU^2 + dV^2)}{(e^{2v} + e^{-2v} + 2\cos 2U)^2},$$

also wenn ε_1 und ω_1 die zu ε und ω entsprechenden Zahlen bedeuten

$$\varepsilon_1 = \frac{4k}{e^{2V} + e^{-2V} + 2\cos 2U}$$

derart, daß

$$k \operatorname{tg}(U + iV) = \int e^{iw_1} \varepsilon_1 (dU + i\,dV)$$

eine Identität wird, wenn ω_1 aus den Differentialquotienten des $l\,\varepsilon_1$ entnommen wird. Setzt man nun

$$2U = \pi/2 - v_1, \quad 2V = -u_1,$$

so wird, da ε_1 bis auf einen konstanten Faktor in ε übergeht, der im $l(\varepsilon_1)$ beim Differentiieren herausfällt, wenn man endlich noch in dem zu suchenden Integrale diese Werte einführt, sein Wert auf

$$k \operatorname{tg}\left(i\frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} - \pi/4\right)$$

zurückgeführt, und hierdurch ist die Funktion der komplexen Variabeln $u_1 i + v_1$ völlig bestimmt durch einen einfachen Ausdruck in $\operatorname{tg}\left(\frac{u_1 + iv_1}{2}\right)$.