Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Abschätzung von Funktionen grosser Zahlen.

Von Georg Faber.

Vorgelegt in der Sitzung am 4. November 1922.

Den Anlaß zu der folgenden Abhandlung gab das Bestreben, die Entwickelbarkeit gegebener Funktionen (sowohl einer komplexen wie insbesondere auch einer reellen Veränderlichen) zu untersuchen, welche nach Art der Fourierschen Reihen gebildet sind und nach gewissen Polynomen, insbesondere nach Hermiteschen $U_n(x)$ und nach Laguerreschen $L_n(x)$ fortschreiten.[1]) Beide Arten Polynome sind Grenzfälle der Legendreschen:

1) $$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{d x^n};$$

die nach Legendreschen Polynomen zu entwickelnde Funktion hat man als im Intervalle $-1, +1$ definiert anzusehen; verhält sie sich außerdem in allen Punkten dieses Intervalls, auch in den Endpunkten regulär, so konvergiert die Entwickelung im Innern einer Ellipse, deren Brennpunkte ± 1 sind und auf der mindestens eine singuläre Stelle der Funktion liegt. Bei den Hermiteschen Polynomen

2) $$U_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{d x^n}$$

ist das Intervall $-1, +1$ auf $-\infty, +\infty$ ausgedehnt, wobei die konfokalen Ellipsen in Parallelenpaare zu beiden Seiten

[1]) Hermite, C. R. 58 (1864), S. 93. — Laguerre, Bull. de la Soc. math. de France 7 (1879) = Oeuvres I, S. 428. Beide Benennungen sind insofern ungerechtfertigt, als beide Arten Polynome schon vorher von Tschebyscheff untersucht worden sind: Bull. phys.-math. de l'Acad. de St. Pétersbourg 1 (1859) = Oeuvres I, S. 501.

der reellen Achse übergehen. Dagegen hat man es bei den Laguerreschen Polynomen

$$3)\qquad L_n(x) = e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{d x^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

mit dem Intervall 0, ∞ und mit konfokalen Parabeln zu tun.

Die Polynome $U_n(x)$ und $L_n(x)$ treten auch als Koeffizienten gewisser Reihenentwickelungen auf:

$$4)\qquad e^{-\frac{1}{2}(x+h)^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_0^\infty {}^n \frac{h^n}{n!} U_n(x)$$

(folgt ohne weiteres aus (2)),

$$5)\qquad \frac{1}{(1-z)^{m+1}} e^{\frac{x}{1-z}} = \sum_0^\infty {}^n L_n(x) z^n.$$ [1]

Ich zeige nun, wie man für diese und andere Koeffizienten asymptotische Ausdrücke finden kann mit relativen Fehlern der Ordnung $1/n^\nu$, wo ν jede ganze positive Zahl sein kann. Ist dies geschehen, so kann die eingangs erwähnte Untersuchung nach dem von Darboux[2]) gegebenen Vorbilde leicht durchgeführt werden; die Unendlichkeit der Intervalle macht keine Schwierigkeit. Der hier angegebene Weg dürfte dem über die Theorie der Integralgleichungen führenden[3]) in vieler Hinsicht vorzuziehen sein. Er führt auch bei den allgemeineren in dem Burkhardtschen Berichte,[4]) S. 900—903 erwähnten Polynomen $U_n^{(c)}(x)$, $T_n^{(m)}(x)$ zum Ziel. Ich zeige im folgenden nur, wie man die nötigen asymptotischen Darstellungen finden kann; deren Verwendung für die Untersuchung von Reihenentwickelungen nach dem Darbouxschen Vorbilde ist dann eine leichte und lohnende Aufgabe; ich selbst verzichte darauf, sie durchzuführen.

---

1) Sonin, Math. Ann. 16 (1880), S. 42; vgl. A. Gegenbauer, Wien. Ber. 95_2 (1887), S. 274.

2) Darboux, Journ. de math. (3) 4 (1878).

3) Myller-Lebedeff, Math. Ann. 64 (1907), S. 388.

4) Jahresbericht der D. Math.-Ver. 10_2 (1908); daselbst auch weitere Literaturangaben.

§ I. Auseinandersetzung des Verfahrens.

Die Ergebnisse und Anwendungen meines Abschätzungsverfahrens dürften neu sein. Sein Grundgedanke ist es, wie ich nachträglich merkte, nicht; es hat ihn schon Riemann, wie H. A. Schwarz aus Notizen in dessen Nachlaß herausfand,[1]) benützt, vielleicht beeinflußt durch verwandte Überlegungen bei Laplace. Dieser Grundgedanke besteht in folgendem:

$f(z) = f(\xi + i\eta)$ sei eine analytische Funktion; z_0 sei eine einfache Nullstelle der Ableitung $f'(z)$ und es sei $f(z_0) \neq 0$. Die Funktion $f(z)$ gestattet dann in der Umgebung der Stelle z_0 eine Entwickelung der Form:

$$6) \qquad f(z) = f(z_0)\left[1 + \frac{f''(z_0)}{2f(z_0)}(z - z_0)^2 + \cdots\right],$$

und es gibt durch z_0 zwei aufeinander senkrechte Gerade g_1, g_2 von folgender Eigenschaft: auf g_1 und g_2 ist $(z - z_0)^2 f''(z_0): 2f(z_0)$ reell und zwar positiv auf g_1, negativ auf g_2.

Hat man nun

$$7) \qquad \int\limits_C f(z)\, dz$$

zu bilden längs einer Kurve C, die durch z_0 geht und in diesem Punkte g_2 zur Tangente hat, so nimmt $|f(z)|$ im Punkte z_0 einen größeren Wert an als in allen auf C gelegenen Nachbarpunkten z und man erhält unter Umständen einen Näherungswert für das Integral (7), wenn man von dem ganzen Integrationswege C nur eine gewisse Umgebung der Stelle z_0 beibehält. Diese Überlegungen gelten auch dann noch, wenn die Tangente an C in z_0 nicht mit g_2 zusammenfällt, sondern mit g_2 einen Winkel bildet, der dem Betrage nach $< \pi/4$ ist; auch darf an Stelle des Punktes z_0 ein Nachbarpunkt gewählt werden. Durch die so noch vorhandene große Bewegungsfreiheit läßt

[1]) Riemanns Werke, 2. Aufl., S. 429. Eine andere Anwendung des Grundgedankens machte Herr Debye, Math. Ann. 67 (1909), S. 537.

sich das Verfahren den einzelnen Anwendungen anpassen. Als Integrationsweg wird man meist eine Strecke mit dem Mittelpunkte z_0 oder einen Kreisbogen wählen können. Dann hat man es, wenn t eine reelle Veränderliche und β eine positive Zahl bedeutet, schließlich mit einem Integrale der folgenden Form zu tun:

$$8) \qquad f(z_0)\int_{-\beta}^{+\beta}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\,dt.$$

Wenn z_0 genau eine Nullstelle der Funktion $f'(z)$ ist, so ist $a_1 = 0$; doch machen wir diese Voraussetzung nicht, auch nicht die, daß g_2 Tangente von C und dementsprechend a_2 reell und negativ sei; doch verlangen wir, daß der Realteil

$$9) \qquad \Re(a_2) < 0$$

sei; gelegentlich würde auch die Annahme

$$(9') \qquad \Re(a_2) \leqq 0$$

genügen. Das Integral (8) bringen wir auf die Form:

$$10) \qquad f(z_0)\int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}(1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)\,dt,$$

wo also $1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ die Potenzreihe für das Produkt

$$e^{-a_1 t - a_2 t^2}(1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)$$

ist. Danach wäre $b_1 = 0$; doch wollen wir zulassen, daß die Koeffizienten a_1, a_2 in (10) nur annähernd die gleichen sind wie in (8), so daß nicht notwendig $b_1 = 0$ sein muß.

Dagegen machen wir im Hinblick auf die beabsichtigten Anwendungen folgende Voraussetzungen (die sich leicht durch allgemeinere ersetzen ließen):

$f(z)$ und damit die Koeffizienten in (8), (10) hängen noch von einem positiven Parameter n ab, der über alle Grenzen wächst, und es sei für $n \longrightarrow \infty$:

$$11) \qquad \lim |a_2| = \infty,$$

$$12) \qquad \overline{\lim}\, \Re(a_2) : |a_2| < 0, \text{ etwa } = -2\gamma,$$

13) $$\overline{\lim}\,|a_1^2| : |a_2| \neq \infty, \text{ sondern etwa } = \Gamma^2 (\geqq 0),$$

14) $$\overline{\lim}\,|b_\nu| : |a_2^\nu|^{1/2-\alpha} \neq \infty \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und für eine positive Zahl α; ferner von einem gewissen Werte des Parameters n ab:

15) $$\beta > (\lg|a_2|)\,|a_2|^{-1/2},$$

16) $$\beta < (\lg|a_2|)^2\,|a_2|.\text{[1]}$$

Der Fehler, der dadurch entsteht, daß der Wert J des Integrals (7) durch das Integral (10) ersetzt wird, sei gleich $|J|\,o(|a_2|^{-\nu})$, wie groß auch ν sei. Relative Fehler dieser Ordnung, für die ich kurz $O(|a_2|^{-\omega})$ schreibe, werden bei unserer asymptotischen Darstellung nicht mehr mitberücksichtigt, sondern nur solche der Ordnungen $O(|a_2|^{-\nu})$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$.

Wir stellen nun einige Formeln zusammen, indem wir von der bekannten Beziehung

17) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_2 t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}$$

ausgehen; es genügt, dieselbe für reelle negative a_2 zu beweisen, sie gilt, da beiderseits analytische Funktionen von a_2 stehen, dann ganz von selbst für alle a_2 mit $\Re(a_2) \leqq 0$. Unter der Quadratwurzel ist der Hauptwert mit positivem Realteil zu verstehen. Wir setzen im folgenden $\Re(a_2) < 0$ voraus und erhalten durch k malige Differentiation von (17) nach a_2:

18) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_2 t^2} t^{2k}\,dt = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}\,\frac{1}{(-a_2)^k}\sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}.$$

Hieraus ergibt sich nach Multiplikation mit $a_1^{2k} : (2k)!$ und Summation nach k:

19) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2}\,dt = \sqrt{\frac{-\pi}{a_2}}\,e^{-\frac{a_1^2}{4 a_2}}.$$

[1]) Und selbstverständlich kleiner als der Konvergenzradius der auf der rechten Seite von (10) vorkommenden Reihe.

Endlich findet man aus dieser Formel durch k malige Differentiation nach a_1 mit Beachtung von (2):

$$20)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{-a_2}}\, e^{-\frac{a_1^2}{4 a_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^k U_k\left(\frac{a_1}{\sqrt{2a_2}}\right)$$

mit beliebiger Bestimmung der Quadratwurzel $\sqrt{2a_2}$, die beim Ausmultiplizieren der rechten Seite nur mit geraden Exponenten auftritt.

Nach (13), (19) ist also

$$21)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O\left(|a_2|^{-\frac{k}{2}}\right).$$

Man beweist ferner leicht, daß wegen (15) die Differenz

$$22)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt - \int_{-\beta}^{+\beta} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = O(|a_2|^{-\omega})\ ^{1})$$

und also auch

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O(|a_2|^{-\omega}) = \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O(|a_2|^{-\omega}) \text{ ist,}$$

woraus wegen (21) folgt

$$23)\quad \int_{-\beta}^{+\beta} t^k e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt = \int_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t + a_2 t^2}\, dt\, O\left(|a_2|^{-\frac{k}{2}}\right).$$

Die Differenz (22) ist nämlich dem Betrage nach kleiner als[2])

---

[1]) Danach ist, wenn von vornherein relative Fehler der Ordnung $O(|a_2|^{-\omega})$ außer Betracht bleiben, die durch (16) geforderte Beschränkung von β nach oben hin bedeutungslos; sie hat nur den Zweck, eine spätere Rechnung (S. 291) abzukürzen.

[2]) Falls $\beta \geqq 1$, entfällt das erste Integral auf der rechten Seite von (24).

$$24)\qquad 2\int\limits_{\beta}^{\infty} t^k e^{|a_1|t+\Re(a_2)t^2}\,dt$$

$$< 2\int\limits_{\beta}^{1} e^{(|a_1|+\Re(a_2)\beta)t}\,dt + 2\,e^{{}^2\!/_3\Re(a_2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{|a_1|t+{}^1\!/_3\Re(a_2)t^2}\,dt$$

$$< 2\,e^{(\Gamma|a_2|^{1/2}-\gamma|a_2|^{1/2}\lg|a_2|)}|a_2|^{-1/2}\lg|a_2| + e^{-\gamma|a_2|}O(|a_2|^{-k-1/2})$$

(wegen (12), (13), (15) für große $|a_2|$), (wegen (12), (21))

$$= O(|a_2|^{-\omega}).$$

Wenn man das Integral von (10) ersetzt durch

$$25)\qquad \int\limits_{-\beta}^{+\beta} e^{(a_1 t+a_2 t^2)}(1+b_1 t+b_2 t^2+\cdots+b_k t^k)\,dt,$$

so entsteht ein Fehler, der dem Betrage nach kleiner ist als

$$26)\qquad \left|\int\limits_{-\beta}^{+\beta} b_{k+1}\,e^{a_1 t+a_2 t^2}\,t^{k+1}\,dt\right| + \sum_{k+2}^{\infty}|b_\nu|\beta^\nu\cdot 2\int\limits_{0}^{\beta} e^{|a_1|t+\Re(a_2)t^2}$$

$$< \left|\int\limits_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t+a_2 t^2}\,dt\right| O\left(\frac{|b_{k+1}|}{|a_2|^{\frac{k+1}{2}}}\right) + O(|a_2|^{-(k+2)\alpha}\lg|a_2|^{k+2})\,O(|a_2|^{-1/2})$$

(nach (23)) (nach (14), (16), (19), (12), (13))

$$= \int\limits_{-\beta}^{+\beta} e^{a_1 t+a_2 t^2}\,dt\;O(|a_2|^{-(k+1)\alpha}) \text{ (wegen (14)).}$$

Die Ersetzung von (10) durch (25) geschieht also mit einem relativen Fehler der Ordnung $O(|a_2|^{-(k+1)\alpha})$ und diese Ordnung des relativen Fehlers wird nach (22) nicht geändert, wenn man in (25) die Grenzen auf $-\infty$, $+\infty$ ausdehnt. Dann aber (und das ist der Zweck dieser Veränderung der Integrationsgrenzen) läßt sich (25) in geschlossener Form auswerten und man gewinnt also, indem man

$$27)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{a_1 t+a_2 t^2}(1+b_1 t+b_2 t^2+\cdots)\,dt$$

gliedweise integriert, für (10) und damit auch für (7) eine asymptotische Reihe, bei der relative Fehler der Ordnung $O(|a_2|^{-\omega})$ vernachlässigt werden, während, falls nur genügend viele Reihenglieder benutzt werden, der relative Fehler unterhalb $O(|a_2|^{-\nu})$ bleibt, wie groß auch ν sei.

Man beachte noch, daß die Geltung der Voraussetzung (11): $\lim |a_2| = \infty$, falls sie von vornherein nicht erfüllt sein sollte, stets durch Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen $t' = C_n^{-1} t$, wo $\lim C_n = \infty$, erzwungen werden kann. Es darf daher bei den Beispielen des nächsten Paragraphen gelegentlich auf die Voraussetzung (11) verzichtet werden (s. z. B. (29)).

§ 2. Anwendungen.

1. Zur Veranschaulichung meines Verfahrens leite ich mit seiner Hilfe die Stirlingsche Formel ab, indem ich von der Gleichung

$$\text{28)} \qquad \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^z\, dz}{z^{n+1}}$$

ausgehe. C kann vorerst irgend eine den Nullpunkt umschließende Kurve sein; $f(z)$ ist $z^{-(n+1)} exp z$, also $z_0 = n + 1$ die Nullstelle von $f'(z)$. Wir wählen aber, um größere Übereinstimmung mit der üblichen Formel zu erreichen, lieber den Näherungswert $z_0 = n$ und sodann C als Quadrat, dessen Seiten in die Geraden $\xi = \pm n$, $\eta = \pm n$ fallen. Wir begehen offenbar nur einen relativen Fehler $O(n^{-\omega})$, wenn wir von C nur die eine durch den Punkt $z = n$ gehende Quadratseite beibehalten. Setzen wir noch $z = n + it$, so geht (28) in folgende Näherungsformel über:

$$\text{29)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{n!} &\sim \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{+n} \frac{e^{n+it-n \lg(n+it)}}{n+it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-n}^{+n} e^{n - n \lg n - \frac{t^2}{2n}} (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)\, dt. \end{aligned}$$

Hier ist $1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ die Potenzreihe für

$$\text{30)} \quad \left(1 + \frac{i t^2}{n}\right)^{-1} exp\left(\frac{i t^3}{3 n^2} + \frac{t^4}{4 n^3} - \frac{i t^5}{5 n^4} - \frac{t^6}{6 n^5} + \cdots\right).$$

Für die Berechnung des Integrals (29) kann man $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$ setzen; für $b_{2\nu}$ findet man

$$\text{31)} \qquad b_{2\nu} = O\left(n^{-\frac{2\nu}{3}}\right),$$

$$b_2 = -\frac{1}{n^2}, \quad b_4 = \frac{7}{12 n^3} + \frac{1}{n^4}, \quad b_6 = -\frac{1}{18 n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Schließlich ergibt sich durch gliedweise Integration der Reihe auf der rechten Seite von (29) zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ die asymptotische Reihe:

$$\text{32)} \quad \frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n}\left(1 + n b_2 + \frac{3!\, n^2}{2 \cdot 1!} b_4 + \frac{5!\, n^3}{2^2 \cdot 2!} b_6 + \cdots\right)$$

$$= \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n}\left[1 - \frac{1}{n} + 3 n^2 \left(\frac{7}{12 n^3} + \frac{1}{n^4}\right) - \frac{n^3 \cdot 120}{8 \cdot 18 n^4} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n}\left[1 - \frac{1}{12 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Statt, wie geschehen $z = n + it$ zu setzen (geradlinige Integration) hätten wir ebenso gut $z = n e^{it}$ setzen können; entsprechendes gilt für die folgenden Beispiele.

2. Als nächstes wählen wir die Hermiteschen Polynome, die wir in Übereinstimmung mit (4) so definieren:

$$\text{33)} \qquad \frac{1}{n!} U_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-\frac{z^2}{2} - z x}}{z^{n+1}} dz;$$

es empfiehlt sich, wie wir gleich sehen werden, für C ein Quadrat von der Seitenlänge $2\sqrt{n+1}$ zu wählen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist und dessen Seiten zur reellen und imaginären Achse parallel laufen. Da jetzt

$$\text{34)} \qquad f(z) = e^{-\frac{z^2}{2} - z x} : z^{n+1}$$

ist, haben wir die Gleichung $f'(z) = 0$, d. h.

$$z^2 + zx + n + 1 = 0 \tag{35}$$

aufzulösen. Es genügt (und die Formeln werden dann sogar übersichtlicher), wenn wir die Wurzeln dieser Gleichung näherungsweise als

$$z_0 = i\sqrt{n+1}, \quad z_1 = -i\sqrt{n+1} \tag{36}$$

berechnen. Man sieht wieder leicht, daß man von dem quadratischen Integrationswege nur die Umgebungen dieser beiden Punkte beizubehalten braucht, wenn man relative Fehler der Größenordnung $O(n^{-\omega})$ von vornherein vernachlässigt. Man wird dann in diesen Umgebungen an Stelle von z eine neue Integrationsveränderliche durch

$$z = z_0 - t, \quad z = z_1 + t \tag{37}$$

einführen. $f(z)$ geht dadurch über in

$$\begin{aligned}\varphi(t) = exp\Big[&\frac{n+1}{2} + it\sqrt{n+1} - \frac{t^2}{2} \mp ix\sqrt{n+1} \\ &\pm xt - (n+1)\lg(\pm i\sqrt{n+1} \mp t)\Big].\end{aligned} \tag{38}$$

Wir setzen noch

$$exp\left[(n+1)\sum_3^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu}\left(\frac{t}{i\sqrt{n+1}}\right)^\nu\right] = 1 + b_3\left(\frac{t}{i}\right)^3 + b_4\left(\frac{t}{i}\right)^4 + \cdots, \tag{39}$$

wobei sich

$$b_k = O\left(n^{-\frac{k}{6}}\right) \tag{40}$$

ergibt. Dann wird

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \frac{exp\left(\frac{n+1}{2} \pm xt \mp ix\sqrt{n+1} - t^2\right)}{(\pm i\sqrt{n+1})^{n+1}}&\left(1 + b_3\left(\frac{t}{i}\right)^3\right. \\ &\left. + b_4\left(\frac{t}{i}\right)^4 + \cdots\right).\end{aligned} \tag{41}$$

Durch gliedweise Integration zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ erhält man $\frac{1}{n!}U_n(x)$ als Summe zweier von den

Umgebungen der Stellen z_0, z_1 herrührender asymptotischer Reihen:

$$\frac{1}{n!}U_n(x) = \frac{e^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{n+1})^{n+1}} \left\{ i^n e^{ix\sqrt{n+1}} \left[1 + \sum_3^\nu \frac{b^\nu}{(\sqrt{2})^\nu} U_\nu\left(\frac{ix}{\sqrt{2}}\right)\right]\right.$$

$$\tag{42} \left. + (-i)^n e^{-ix\sqrt{n+1}} \left[1 + \sum_3^\nu \frac{b_\nu}{(\sqrt{2})^\nu} U\left(\frac{-ix}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}.$$

3. Das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren führt immer zum Ziel, wenn es sich darum handelt, asymptotische Reihen für die Koeffizienten solcher ganzer transzendenter Funktionen zu finden, die man aus der Veränderlichen z und beliebigen Konstanten durch die eine beliebige Anzahl von Malen und in beliebiger Reihenfolge auszuführenden Operationen des Addierens, Multiplizierens und Erhebens in den Exponenten von e bilden kann.

Ich beschränke mich der Kürze halber auf die $m$fach iterierte Exponentialfunktion[1])

$$\tag{43} exp_m(z) = \sum_0^\infty {}^n A_n z_n$$

und auf die Angabe des Anfangs- und Hauptgliedes der asymptotischen Reihe für A_n. Man wird hier über eine Kreislinie $|z| = \varrho$ integrieren, von der man nur die Umgebung der positiven reellen Zahl ϱ zu berücksichtigen braucht. ϱ ist Wurzel der Gleichung

$$\tag{44} z\, exp\, z\, exp_2 z \ldots exp_{m-1} z = n \quad \text{oder} \quad z\, exp'_{m-1} z = n,$$

und es ergibt sich[2])

$$\tag{45} A_n \sim \frac{exp_m \varrho}{\varrho^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\varrho^2 exp''_{m-1}\varrho + n)}}.$$

4. Ob sich nach dem Verfahren des § 1 asymptotische Darstellungen auch für die Taylorkoeffizienten aller der trans-

---

[1]) Definition: $exp_1 z = exp\, z = e^z$; $exp_m z = exp\,(exp_{m-1} z)$ für $m = 2, 3, \ldots$

[2]) Im Falle $m = 1$ reduziert sich Gleichung (44) auf $z = n$ und (45) auf die Stirlingsche Formel.

zendenten Funktionen finden lassen, die sich aus $1:(1-z)$ und Konstanten durch Addition, Multiplikation und Erheben in den Exponenten von e bilden lassen, vermochte ich in voller Allgemeinheit nicht zu entscheiden. Ich begnüge mich mit zwei Beispielen und wähle als erstes

$$46)\qquad exp_m \frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty {}^n B_n z^n.$$

ϱ sei die zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$47)\qquad z\frac{d}{dz} exp_{m-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) - (n+1) = 0, \text{ d. h.}$$

$$47')\ \frac{z}{(1-z)^2} exp \frac{1}{1-z} exp_2 \frac{1}{1-z} \dots exp_{m-1} \frac{1}{1-z} = n+1.$$

Für $1:(1-\varrho)$ schreibe ich abkürzend P und wähle als Weg des Cauchyschen Integrals für den Koeffizienten B_n die zwei Kreislinien $|z| = 1+\varrho$ und $|1-z| = 1-\varrho$; die erste ist im positiven, die zweite im negativen Sinne zu umlaufen. Beizubehalten ist für die asymptotische Reihendarstellung nur die Umgebung des Punktes $z=\varrho$ auf der zweiten Kreislinie, ebenso gut kann über ein Stück der Tangente dieser Kreislinie im Punkte $z=\varrho$ integriert werden. Als Anfangs- und Hauptglied findet man

$$48)\qquad B_n \sim \frac{exp_m P}{\varrho^{n+1}\sqrt{2\pi(P^4 exp''_{m-1}(P) + 2P^3 exp'_{m-1}(P) + (n+1)\varrho^{-2})}}.$$

5. Als letztes Beispiel, durch welches zugleich die Frage nach der asymptotischen Reihe für die Laguerreschen Polynome miterledigt wird, wähle ich die Abschätzung der Koeffizienten C_n der Entwickelung

$$49)\qquad \frac{1}{(1-z)^l}\left(\lg\frac{1}{1-z}\right)^k exp\frac{s}{(1-z)^m} = \sum_0^\infty {}^n C_n z^n;$$ [1]

[1] Das Anfangsglied der asymptotischen Reihe für C_n im Falle $m=1$ hat schon Herr Perron gefunden. Archiv der Math. und Phys., 3. Reihe, Bd. 22 (1914), S. 329; daselbst auch Hinweis auf eine frühere Arbeit des Herrn Fejér.

l, k und s seien beliebige komplexe Zahlen (s jedoch $\neq 0$); m denken wir uns der Einfachheit halber positiv ganzzahlig. Zur Abkürzung nennen wir die Funktion (49) $F(z)$, ihren Faktor $exp\, s(1-z)^{-m}$ dagegen $F_1(z)$, ihren anderen Faktor $\varphi(z)$ ($= (1-z)^{-l}\,[\lg(1-z)^{-1}]^k$). Statt dieser Funktion $\varphi(z)$ konnte ebenso gut irgend eine andere aus der Klasse der Funktionen gewählt werden, die ich in einer früheren Abhandlung[1]) mit $\varphi(z)$, $\varphi_a(z)$ bezeichnet habe. Den Einfluß des Faktors $\varphi(z)$ kann man leicht hinterher in Rechnung stellen; wir betrachten vorerst bloß die Funktion $F_1(z)$ und haben, um das Cauchysche Integral für deren Taylorkoeffizienten abzuschätzen, nach der Vorschrift von § 1 die Gleichung

50) $$\frac{d}{dz}\frac{1}{z^{n+1}}\, exp \frac{s}{(1-z)^m} = 0$$

aufzulösen. Setzt man $z = 1 + \zeta$, so geht diese Gleichung über in

51) $$(-\zeta)^{m+1} = \frac{1}{n+1}(ms + ms\zeta).$$

Ihre $(m+1)$ Wurzeln werden bei großem n sämtlich näherungsweise durch die Formel

52) $$\zeta = -\sqrt[m+1]{\frac{ms}{n+1}}$$

geliefert. Sehen wir von dem Falle eines reellen negativen s zunächst ab, so ist unter den $m+1$ Werten (52) einer mit dem kleinsten Realteil (für reelles negatives s kämen zwei Werte in Frage); es hat daher auch von den $m+1$ Wurzeln der Gleichung (51), falls n groß und s nicht negativ reell ist, eine den kleinsten (notwendig negativen) Realteil; diese Wurzel von (51) bezeichnen wir mit

52) $$\zeta_0 = |\zeta_0|\, e^{i\alpha} \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leqq \pi\right)$$

und setzen

---

[1]) Diese Berichte 1917, S. 263.

53) $$\zeta = \zeta_0 e^{i\varphi} \qquad (-\pi < \varphi \leqq \pi),$$

d. h. wir betrachten die Punkte der Kreislinie $|1 - z| = |\zeta_0|$. Über diese Kreislinie im negativen Sinne und über die Kreislinie $|z| = 1 + |\zeta_0|$ im positiven Sinn ertrecken wir die Koeffizientenintegrale

54) $$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{z^{n+1}}\,dz \text{ und } \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F_1(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Wir zeigen dann: Wenn man relative Fehler der Ordnung $O(n^{-\omega})$ von vornherein vernachlässigt, so kann man das Integral über die zweite Kreislinie ganz weglassen und von dem über die erste Kreislinie braucht man nur die Umgebung der Stelle $\zeta_0 = z_0 - 1$ beizubehalten. Letzteres Integral ist ausgeschrieben folgendes (und zwar schreiben wir es gleich für die allgemeinere Funktion $F(z)$ (49), da die in dem einfachen Falle der Funktion $F_1(z)$ gefundenen Lösungen z_0, ζ_0 der Gleichungen (50), (51) ausreichende Näherungslösungen für den allgemeinen Fall bleiben):

55) $$\frac{1}{z_0^{n+1}}\,\frac{1}{(1-z_0)^{l-1}}\left(\lg\frac{1}{1-z_0}\right)^k exp\,\frac{s}{(1-z_0)^m}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} G(\varphi)\,d\varphi,$$

mit

56) $$G(\varphi) = (1 - z_0)\,e^{i\varphi}\,\frac{F(1+\zeta_0 e^{i\varphi})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi})^{n+1}} : \frac{F(z_0)}{z_0^{n+1}}$$
$$= e^{i\varphi(-l+1)}\left[1 + \frac{i\varphi}{\lg(-\zeta_0)}\right]^k [a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots],$$

wo

57) $$a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots$$
$$=^{1)} \frac{s}{(-\zeta_0 e^{i\varphi})^m} - (n+1)\lg\frac{1+\zeta_0 e^{i\varphi}}{1+\zeta_0} - \frac{s}{(-\zeta_0)^m},$$

58) $$a_1 = 0 \text{ (wegen (51))},$$

---

1) Anders geschrieben $= \lg\left(\frac{F_1(1+\zeta_0 e^{i\varphi})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi})^{n+1}} : \frac{F_1(z_0)}{z_0^{n+1}}\right)$.

59) $$a_2 = (n+1)\,|\zeta_0|\,\frac{m+1}{2}\,e^{i\alpha} : (1+\zeta_0)$$

(wieder mit Rücksicht auf (51)),

60) $$\Re(a_2) = \frac{(n+1)(m+1)}{2}\,|\zeta_0|\,(\cos\alpha + O(|\zeta_0|)) < 0$$

(vgl. (52)),

61) $$|a_n| = O((n+1)|\zeta_0|) = O(|a_2|) = O(\Re(a_2)) \quad (n \geqq 2).$$

Aus (58), (60) folgt, daß für $\varphi = 0$ die Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$ und somit auch die Funktion $|exp(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)|$ ein Maximum besitzt. Um zu zeigen, daß die Funktion

$$\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots) = -(n+1)\,|\zeta_0|\left(\frac{1}{m}\cos(\alpha - m\varphi)\right.$$

62) $$\left. + \cos(\alpha+\varphi) - \frac{m+1}{m}\cos\alpha + O(|\zeta_0|)\right)$$

an der Stelle $\varphi = 0$ ihren überhaupt größten Wert annimmt, m. a. W. daß sie sonst < 0 ist, bestimmen wir sämtliche Extrema der Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$ durch Auflösen der Gleichung $\Re'(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots) = 0$. Da

$$\Re'(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots) = -(n+1)\,|\zeta_0|\,(\sin(\alpha - m\varphi)$$

63) $$- \sin(\alpha+\varphi) + O(|\zeta_0|))$$

ist, muß jede von Null verschiedene Nullstelle der Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$ näherungsweise entweder gleich

64) $$\frac{2\varkappa\pi}{m+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots m)$$

oder, falls $m > 1$,[1])

65) $$\frac{2\alpha - \pi}{m-1} + \frac{2\lambda\pi}{m-1} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots (m-1)) \text{ sein.}$$

---

[1]) Falls $m = 1$, kommt der Näherungswert $\frac{\pi}{2}$ (statt (65)) in Frage; für ihn wird die rechte Seite von (62) gleich $(n+1)\,|\zeta_0|\,(\cos\alpha + O(|\zeta_0|)) < 0$, da ja $\cos\alpha < 0$.

An den Stellen (64) wird

66) $$\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$$
$$= -(n+1)|\zeta_0|\frac{m+1}{m}\left[\cos\left(a + \frac{2\varkappa\pi}{m+1}\right) - \cos a + O(|\zeta_0|)\right]$$
$$< 0$$

auf Grund der Bestimmung von a (s. die Bemerkung vor (52)); an den Stellen (65) aber wird

67) $$\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$$
$$= -(n+1)|\zeta_0|\left[-\frac{m+1}{m}\cos a + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\cos(a+\varphi) + O(|\zeta_0|)\right]$$
$$< -(n+1)|\zeta_0|\left[\frac{m+1}{m}\cos\frac{\pi}{m+1} - \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \varepsilon_n\right],$$

wo $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ ist, da ja a so bestimmt wurde, daß $|\cos a| > \cos\frac{\pi}{m+1} + \varepsilon_n$ wurde; nun ist aber für $m = 2$ und um so mehr für größere Werte von m die Differenz $\frac{m+1}{m}\cos\frac{\pi}{m+1} - \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ positiv, also der Ausdruck (67) negativ. Da die stetige Funktion $\Re(a_1\varphi + a_2\varphi^2 \ldots)$ an den Stellen (64), (65), die für großes n den Stellen der Extrema der Funktion beliebig nahe liegen, negative Werte annimmt, ist sie stets < 0 außer für $\varphi = 0$. Zugleich ersieht man, daß $exp(a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots)$[1]) außer in einer gewissen Umgebung der Stelle $\varphi = 0$ von der Ordnung $O(n^{-\omega})$ wird, daß also die Integration über die Kreislinie $|z-1| = |\zeta_0|$ auf diese Umgebung beschränkt werden darf. Nun schreiben wir die Funktion (56) so:

68) $$G(\varphi) = e^{a_2\varphi^2}(1 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + \cdots);$$

dann wird wegen (58), (61):

---

[1]) Anders geschrieben: $\frac{F_1(1+\zeta_0 e^{i\varphi})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi})^{n+1}} : \frac{F_1(z_0)}{z_0}$.

69) $$b_1 = O(1)^{1)}, \qquad b_2 = O(1),$$

70) $$b_\nu = O\left(|a_2|^{\frac{\nu}{3}}\right) \text{ für } \nu \geqq 3.$$

Den Ausdruck (68) für $G(\varphi)$ setzen wir in (55) ein und integrieren gliedweise zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$. Indem wir noch beachten, was sogleich bewiesen werden soll, daß nämlich das Integral über den Kreis $|z| = 1 + |\zeta_0|$ als von der Ordnung $O(n^{-\omega})$ vernachlässigt werden darf, erhalten wir so die gesuchte asymptotische Reihe für den Taylorkoeffizienten C_n der Funktion $F(z)$. Ihr Anfangs- und Hauptglied ist

71) $$\frac{-F(z_0)\zeta_0}{z_0^{n+1}\sqrt{-2\pi(n+1)(m+1)\zeta_0 : z_0}}.$$

Daß das über die Kreislinie $|z| = 1 + |\zeta_0|$ zu erstreckende Integral vernachlässigt werden darf, sieht man so ein:[2]) Sein Wert ist

72) $$exp\left(\frac{|s|}{|\zeta_0|^m}\right)\frac{1}{(1+|\zeta_0|)^{n+1}}|\zeta_0|^{-|l|}(-\lg|\zeta_0|)^{|k|}\cdot O(1)$$

und es ist nur zu zeigen, daß dieser Ausdruck

$= (|F(z_0)| : |z_0|^{n+1})\, O(n^{-\omega})$ ist, oder, was dasselbe, daß

73) $$exp\left(\frac{|s|}{|\zeta_0|^m}\right)\frac{1}{(1+|\zeta_0|)^{n+1}} : \frac{|F_1(z_0)|}{|z_0|^{n+1}} = O(n^{-\omega})$$

ist. Nun gibt es aber einen Wert φ_1 im Intervall $0 \ldots 2\pi$ (für $m > 1$ sogar mehr als einen), für den der Wert des Ausdrucks (57) gleich

74) $$\frac{|s|}{|\zeta_0|^m} - (n+1)\lg\frac{1+\zeta_0 e^{i\varphi_1}}{1+\zeta_0} - \frac{s}{(-\zeta_0)^m}$$

---

[1]) Auf die Koeffizienten b_1, b_3, b_5, ... kommt es übrigens gar nicht an, da sie bei der gliedweisen Integration von (68) zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ doch wegfallen.

[2]) Ist $F(z)$ eindeutig ($k = 0$, l ganzzahlig), so ist dieses Integral von einem gewissen n ab sogar genau gleich Null; denn dann kann es, ohne seinen Wert zu ändern, auch über die Kreislinie $|z| = R$ mit beliebig großem R erstreckt werden.

wird. Nach dem vorhin Bewiesenen ist, außer wenn φ_1 in einer mit $\frac{1}{n}$ beliebig kleinen Umgebung der Stelle $\varphi = 0$ liegt,

75)
$$\frac{F_1(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})^{n+1}} : \frac{F(z_0)}{z_0^{n+1}}, \text{ d. h. } \frac{exp \frac{|s|}{|\zeta_0|^m}}{(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})^{n+1}} : \frac{F(z_0)}{z_0^{n+1}} = O(n^{-\omega}),$$

woraus dann um so mehr das Bestehen von (73) folgt. Liegt aber φ_1 sehr nahe der Null, so kann der Ausdruck (75) $O(1)$ werden; dann ist aber der Realteil von $\zeta_0 e^{i\varphi_1}$ negativ und daher

76)
$$\frac{(1+\zeta_0 e^{i\varphi_1})^{n+1})}{(1+|\zeta_0|)^{n+1}} = O(n^{-\omega}),$$

und es folgt (73) durch Multiplikation aus (76) und (75), nachdem in letzterer Gleichung $O(n^{-\omega})$ auf der rechten Seite durch $O(1)$ ersetzt worden ist.

Im Falle $m = 1$ würde es genügen, statt (51) die einfachere Gleichung

77)
$$\zeta^2 = \frac{s}{n+1} \quad \left(\text{oder auch } = \frac{s}{n}\right)$$

aufzulösen; es würde dann zwar die Konstante $a_1 \neq 0$ werden, aber man könnte den Faktor $exp(a_1 \varphi)$ als durch die Reihe $1 + b_1 \varphi + b_2 \varphi^2 + \cdots$ mitdargestellt betrachten. Ähnlich könnte man sich im Falle $m = z$ mit der Auflösung der Gleichung

$$-\zeta^3 = \frac{s}{n+1}$$

begnügen; doch würde man jetzt den Faktor $exp(a_1 \varphi)$ nicht in die Reihe $1 + b_1 \varphi + b_2 \varphi^2 + \cdots$ eingehen lassen, sondern sich der Formel (20) bedienen.

Wir haben den Fall eines reellen negativen s zurückgestellt; ist $s = -|s|$ und zugleich $m > 1$, so hat die Gleichung (50) zwei Wurzeln $z_0 = 1 + \zeta_0$ und $z_1 = 1 + \zeta_1$ von ungefähr gleichem möglichst kleinem und daher sicher negativem Realteil; man wird dann die Umgebungen beider berücksichtigen und auf der rechten Seite von (71) tritt einfach noch ein zweiter Summand hinzu, der von z_1 so wie der erste von z_0 abhängt.

Ist aber s reell negativ und zugleich $m = 1$, so kann man sich wieder mit der Auflösung der Gleichung (77) begnügen, deren Wurzeln

$$\zeta_0 = i\sqrt{\frac{|s|}{n+1}} \text{ und } \zeta_1 = -i\sqrt{\frac{|s|}{n+1}} \tag{78}$$

sind. Nun aber wird a_2 sowohl für die Stelle ζ_0 als auch für die Stelle ζ_1 für $n \to \infty$ mit beliebiger Annäherung rein imaginär, und die für unsere Überlegungen wesentliche Bedingung (12) ist nicht mehr erfüllt. Diese Schwierigkeit ist durch Abänderung des Integrationswegs leicht zu umgehen. Das Endergebnis wird freilich das nämliche sein, als hätte man über die Umgebungen der Stellen ζ_0, ζ_1 auf der Kreislinie $|1 - z| = |\zeta_0|$ integriert[1]) und die Formel (18) ohne das Erfülltsein der Bedingung (12) benutzt. Da man auch im Falle $m = 1$ und eines beliebigen s stets über die Umgebungen beider Nullstellen der Gleichung (77) auf dem Kreise $|1 - z| = |\zeta_0|$ integrieren darf, erhält man schließlich eine Formel, die für alle s richtig ist; entsprechendes gilt auch im Falle $m > 1$.

Die erwähnte Abänderung des Integrationswegs besteht in folgendem: der neue Weg setzt sich, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{|s|}{n+1}} = \varepsilon$$

gesetzt wird, zusammen:

1. aus der den Punkt $1 - \varepsilon$ mit dem Punkte $1 - \varepsilon + (1 + i)\, 2\,\varepsilon$ verbindenden Strecke, deren Mittelpunkt $1 + \varepsilon i$ ist;

[1]) Die folgende Darstellung entspricht allerdings nicht einer Integration über die Umgebungen der Punkte ζ_0, ζ_1 auf der Kreislinie $|1 - z| = |\zeta_0|$, sondern auf den Tangenten an diese Kreislinie; doch ist das ein ganz unerheblicher und leicht zu vermeidender Unterschied, der seinen Grund nur in der großen dem Verfahren anhaftenden Freiheit hat.

2. aus dem Kreisbogen um O, der die Punkte $1 - \varepsilon + (1 + i)\, 2\, \varepsilon$ und $(1 - \varepsilon) + (1 - i)\, 2\, \varepsilon$ miteinander verbindet und zu dem ein Zentriwinkel $> \pi$ gehört;

3. aus der den Punkt $1 - \varepsilon + (1 - i)\, 2\, \varepsilon$ mit dem Punkte $1 - \varepsilon$ verbindenden Strecke, deren Mittelpunkt $1 - \varepsilon i$ ist.

Das Integral über das zweite Stück des Integrationswegs kann genau wie vorhin das Integral über die Kretslinie $|z| = 1 + |\zeta_0|$ vernachlässigt werden.

Um das Integral über das erste Stück auszuführen, setzen wir

$$79) \quad z = 1 + \varepsilon i + (1 + i)\, \varepsilon t, \text{ also } \zeta = \varepsilon t + i \varepsilon (1 + t)$$

und erhalten so ein Integral mit der reellen Veränderlichen t und den Grenzen $-1, +1$. Man überzeugt sich leicht, daß man von diesem Integral nur die Umgebung der Stelle $t = 0$ beizubehalten braucht. Schließlich erhält man, wenn man bei gliedweiser Integration die Grenzen auf $-\infty, +\infty$ ausdehnt, einen Ausdruck genau wie zuvor und einen ganz entsprechenden liefert vom dritten Stück des Integrationswegs her die Umgebung der Stelle $\zeta_1 = -\varepsilon i$.