Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Gebilde mit einzigem Ordnungsindex.

Von **Artur Rosenthal.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Juli 1922.

Jedes Oval wird bekanntlich von irgend einer Geraden der Ebene in *höchstens zwei* Punkten getroffen. Wir stellen nun die Frage: Gibt es in der Ebene geometrische Gebilde, welche von *jeder* Geraden in *genau zwei* Punkten getroffen werden? Solche triviale Figuren, an die man zunächst denken könnte, wie zwei sich schneidende Gerade, leisten natürlich das Gewünschte nicht. Aber man kann mit Benutzung des Wohlordnungssatzes die Existenz jener fraglichen Gebilde nachweisen. Und dasselbe ist möglich, wenn man oben die Zahl 2 durch irgend eine andere Anzahl $n > 1$ ersetzt, oder wenn man von der Ebene zum Raum (oder zu allgemeineren Räumen) übergeht; auch kann man an Stelle der Geraden andere Kurvenscharen und allgemeinere Systeme von analogen Gebilden zu Grunde legen. Ferner ergeben sich, wenn man von den „genau n Schnittpunkten" zu den sonst immer betrachteten „höchstens n Schnittpunkten" zurückkehrt, weitere in gleicher Weise positiv zu beantwortende Existenzfragen, insbesondere die Frage, ob jede beliebige (n enthaltende) Auswahl aus den Zahlen 0, 1, 2, ..., n als Schnittpunktzahlen geometrischer Gebilde mit den Geraden möglich ist (§ 1). Wir wollen übrigens folgende Bezeichnungsweise benutzen: Bekanntlich heißt ein ebenes Gebilde (eine Kurve) $\mathfrak{C}$ von n-ter *Ordnung*, wenn $\mathfrak{C}$ mit jeder Geraden höchstens n Punkte gemeinsam hat und wenn es wirklich mindestens eine Gerade der Ebene gibt, von der $\mathfrak{C}$

in genau n Punkten getroffen wird. Wir wollen nun die Zahl der Schnittpunkte, in denen $\mathfrak{C}$ von irgend einer Geraden getroffen wird, als einen „*Ordnungsindex*“ von $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Der größte „Ordnungsindex“ von $\mathfrak{C}$ ist die „Ordnung“ von $\mathfrak{C}$[1]. Und unsere Gebilde, die von jeder Geraden in genau n Punkten getroffen werden, besitzen einen *einzigen* Ordnungsindex, nämlich n.

Die Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n können noch wechselnde Eigenschaften besitzen; sie können insbesondere sowohl überall dicht, wie nirgends dicht sein. Stets aber haben dieGebilde von endlicher (oder abzählbarer) Ordnung das innere Maß Null (§ 2). Eine besonders wichtige Frage wird die sein, ob und wann unsere Gebilde *Kontinua* enthalten können. Wir werden hier in dieser Hinsicht im wesentlichen nur die ebenen *Gebilde 2. Ordnung* genauer betrachten, wie wir überhaupt hier nur einen Ausschnitt aus Untersuchungen geben, die nach verschiedenen Richtungen geführt sind und noch weiter verfolgt werden sollen. Für die ebenen Gebilde mit einzigem Ordnungsindex $n = 2$ ist die Existenz eines Teilkontinuums unmöglich; dagegen ist leicht zu sehen, daß für $n \geqq 4$ solche Teilkontinua, die sogar in gewissem Umfang vorgeschrieben werden dürfen, auftreten können (§ 3). Weiterhin wird allgemeiner gezeigt (§ 4), daß ebene Kontinua 2. Ordnung stets konvexe Kurven sein müssen und daß solche nur dann in einem ebenen Gebilde 2. Ordnung enthalten sein können, wenn alle Ordnungsindizes 0, 1, 2 gleichzeitig (und zwar sogar in Mächtigkeit c) vorkommen.

---

[1]) Wenn die Ordnungsindizes nicht, wie oben angenommen, beschränkt sind, so ist die Ordnung als die obere Grenze der Ordnungsindizes zu definieren. Ein Gebilde $\mathfrak{C}$ heißt also dann von n-ter Ordnung, wenn $\mathfrak{C}$ von jeder Geraden in höchstens n Punkten getroffen wird und dabei n nicht verkleinert werden kann.

§ 1. Existenz der Mengen mit einzigem Ordnungsindex n.

Wir wollen zunächst den *Beweis für die Existenz der ebenen Mengen mit einzigem Ordnungsindex* n erbringen, wenn n irgend eine *endliche*[1]) *Anzahl* ≥ 2 ist. Für $n = 1$ ist die Existenz einer derartigen Menge selbstverständlich unmöglich (enthält nämlich eine solche Menge zwei Punkte, so trifft deren Verbindungsgerade die Menge bereits in mindestens 2 Punkten). Wir betrachten also den Fall $n > 1$: Nach dem Wohlordnungssatz existiert eine Wohlordnung der Menge aller Geraden g unserer Ebene $\mathfrak{E}$ und zwar existiert speziell eine Wohlordnung dieser Menge von der Form

$$(1) \qquad g_1, g_2, g_3, \ldots, g_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_{\mathfrak{c}},$$

wobei $\Omega_{\mathfrak{c}}$ die kleinste Ordnungszahl ist, die der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums entspricht, also die Anfangszahl der $\mathfrak{c}$ zugehörigen Zahlenklasse $Z(\mathfrak{c})$. Ferner existiert eine ebensolche wohlgeordnete Reihe der Punkte P von $\mathfrak{E}$, nämlich

$$(2) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_{\mathfrak{c}}.$$

Die ersten n Punkte von (2), die auf g_1 liegen, seien mit

$$(3) \qquad Q_1^1, Q_1^2, \ldots, Q_1^n$$

bezeichnet. Ferner nehmen wir die ersten $(n-1)$ bzw. n Punkte von (2), die auf g_2, aber nicht auf g_1 liegen, je nachdem g_2 durch einen der Punkte (3) hindurchgeht oder nicht; diese Punkte seien:

$$(4) \qquad Q_2^1, Q_2^2, \ldots, Q_2^{n-1}, (Q_2^n).$$

Die Gesamtheit der Verbindungsgeraden aller Punkte von (3) und (4) sei mit Γ_3 bezeichnet[2]). g_3 ist entweder eine Gerade von Γ_3 oder nicht, und in letzterem Fall kann g_3 entweder einen Punkt von (3), (4) enthalten oder nicht; entsprechend diesen Fällen nehme man die ersten $(n-2)$ oder

[1]) Der Beweis ist in gleicher Weise auch giltig, wenn n die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der abzählbaren Mengen bedeutet.

[2]) Auch g_1 und g_2 gehören zu Γ_3.

$(n-1)$ oder n Punkte von (2), die auf g_3 liegen, aber keiner von g_3 verschiedenen Geraden von Γ_3 angehören:

$$(5) \qquad Q_3^1,\ Q_3^2,\ \ldots,\ Q_3^{n-2},\ (Q_3^{n-1},\ Q_3^n).$$

Die Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte (3), (4), (5) werde mit Γ_4 bezeichnet. Usw. Allgemein: Es sei $\alpha < \Omega_{\mathfrak{c}}$; für alle Zahlen $\beta < \alpha$ sollen auf g_β die Punkte

$$(6) \qquad Q_\beta^1,\ Q_\beta^2,\ \ldots,\ Q_\beta^{n-2},\ (Q_\beta^{n-1},\ Q_\beta^n)$$

bereits bestimmt sein. Die Gesamtheit der Verbindungsgeraden sämtlicher Punkte (6) für alle Zahlen $\beta < \alpha$ soll mit Γ_α bezeichnet werden. g_α kann eine Gerade von Γ_α sein oder nicht, und in letzterem Fall kann g_α einen der Punkte Q_β enthalten oder nicht; entsprechend diesen Fällen wähle man aus (2) die ersten $(n-2)$ oder $(n-1)$ oder n Punkte

$$(7) \qquad Q_\alpha^1,\ Q_\alpha^2,\ \ldots,\ Q_\alpha^{n-2},\ (Q_\alpha^{n-1},\ Q_\alpha^n)$$

aus, die auf g_α liegen, aber keiner von g_α verschiedenen Geraden von Γ_α angehören. Dies ist immer möglich, weil die Schnittpunkte des Systems Γ_α mit g_α eine Menge von geringerer Mächtigkeit als $\mathfrak{c}$ bilden; denn ist $\aleph$ die Mächtigkeit des zu α gehörenden Abschnittes, so ist $\aleph < \mathfrak{c}$ und daher auch

$$(8) \qquad (n \cdot \aleph)^2 < \mathfrak{c},$$

also hat auch die Gesamtheit der Geraden von Γ_α eine Mächtigkeit $< \mathfrak{c}$. Wir sind deshalb sicher, daß das Verfahren nicht vor vollständiger Durchlaufung von (1) abbrechen kann. Die Menge $\mathfrak{Q}$ aller Punkte Q_α $(\alpha < \Omega_{\mathfrak{c}})$ leistet daher das Gewünschte, d. h. sie wird von jeder Geraden der Ebene in genau n Punkten getroffen.

Vom vorstehenden sind zahlreiche Verallgemeinerungen möglich, die wir kurz angeben wollen, wenn wir uns auch in den folgenden Paragraphen nur auf die oben betrachteten ebenen Mengen beschränken werden: Zunächst gilt alles vorige natürlich nicht nur in der Ebene, sondern genau ebenso auch in jedem *3- oder mehrdimensionalen linearen Raum.* Außerdem kann man in analoger Weise verfahren, wenn man *statt der*

Geraden g irgend welche *Scharen* K *von Kurven* $\mathfrak{K}$ [z. B. Kreisen, Ellipsen und dgl.] betrachtet, derart, daß jedes Individuum $\mathfrak{K}$ durch k seiner Punkte in K bestimmt ist. Es ergibt sich dann *die Existenz von Mengen, die mit jeder Kurve* $\mathfrak{K}$ *unserer Schar* K *genau* n *Punkte gemeinsam haben, wenn* $n \geqq k$ *ist.* Man hat dabei das obige Verfahren insofern etwas zu modifizieren, als nach Erledigung von $\beta < \alpha$ die Punkte (7) auf $\mathfrak{K}_\alpha$ nicht gleichzeitig eingeführt werden dürfen, sondern nach einander. D. h.: Man wähle zuerst Q_α^1 auf $\mathfrak{K}_\alpha$, so daß Q_α^1 keinem (von $\mathfrak{K}_\alpha$ verschiedenen) Gebilde $\mathfrak{K}$ von Γ_α angehört, und bilde die Gesamtheit Γ_α^1 von Kurven $\mathfrak{K}$, die durch je k aus den Punkten (Q_β, Q_α^1) bestimmt sind; dann wähle man Q_α^2 auf $\mathfrak{K}_\alpha$ so, daß Q_α^2 keinem (von $\mathfrak{K}_\alpha$ verschiedenen) Gebilde $\mathfrak{K}$ von Γ_α^1 angehört, und bilde die Gesamtheit Γ_α^2 von Kurven $\mathfrak{K}$, die durch je k aus den Punkten $(Q_\beta, Q_\alpha^1, Q_\alpha^2)$ bestimmt sind; usw.; das letzte zu α gehörige Γ_α^ν werde sodann mit $\Gamma_{\alpha+1}$ bezeichnet.

In gleicher Weise kann man noch weiter verallgemeinern, einmal, indem man die Scharen von Geraden oder Kurven durch Gesamtheiten anderer Gebilde g ersetzt, von denen jedes einzelne durch k seiner Punkte bestimmt ist, und andererseits, indem man zu ganz beliebigen Räumen $\mathfrak{R}$ irgend welcher Elemente P übergeht. Man erhält so den *allgemeinen Satz*:

Es sei $\mathfrak{R}$ *ein ganz beliebiger Raum von unendlich vielen Elementen* P; *die Mächtigkeit von* $\mathfrak{R}$ *sei* $\mathfrak{r}$. *In* $\mathfrak{R}$ *sei eine unendliche Menge* Γ *von Gebilden* g *folgender Art vorgelegt: Die Mächtigkeit* $\mathfrak{g}$ *der Menge* Γ *sei* $\leqq \mathfrak{r}$; *ferner sei jedes* g, *als Menge der Elemente* P *aufgefaßt, von einer Mächtigkeit* $\mathfrak{g}'$, *für welche* $\mathfrak{g} \leqq \mathfrak{g}' \leqq \mathfrak{r}$ *gelte*[1]; *jedes* g *sei durch je* k *seiner Elemente in der Gesamtheit* Γ *eindeutig bestimmt (wobei* k *eine endliche Anzahl ist). Ist nun* n *eine Anzahl* $\geqq k$[2], *so existieren in* $\mathfrak{R}$ *Mengen* $\mathfrak{Q}$

[1] $\mathfrak{g}'$ bedeutet im Text für alle g dieselbe Mächtigkeit; es kann aber auch zugelassen werden, daß sich $\mathfrak{g}'$ innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen mit wechselndem g ändern kann.

[2] n kann statt einer endlichen Anzahl auch eine unendliche Mächtigkeit bedeuten, sofern nur $n < \mathfrak{g}'$ ist (bei wechselndem $\mathfrak{g}'$ ist hier das kleinste $\mathfrak{g}'$ zu nehmen).

(von Elementen P), die mit jedem Gebilde g von Γ genau n Elemente P gemeinsam haben.

In allen oben erwähnten Spezialfällen ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}' = \mathfrak{c}$. Sind jedoch diese Mächtigkeiten verschieden, so hat man bei (1) $\alpha < \Omega_{\mathfrak{g}}$ und bei (2) $\alpha < \Omega_{\mathfrak{r}}$ zu wählen, wobei $\Omega_{\mathfrak{g}}$ bzw. $\Omega_{\mathfrak{r}}$ die den Mächtigkeiten $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{r}$ zugehörenden Anfangszahlen sind; und an Stelle von (8) tritt, da $\aleph < \mathfrak{g} \leqq \mathfrak{g}'$ ist,

(8) $$(n\,\aleph)^k < \mathfrak{g}'.$$

Wir erwähnen noch eine nach etwas anderer Richtung gehende Verallgemeinerung: Man kann statt der Geraden g z. B. *Ebenen* $\mathfrak{E}$ nehmen; dann ist $\mathfrak{E}$ nicht durch irgend drei ihrer Punkte bestimmt, sondern nur durch je drei ihrer Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Man kann auch hiefür den gleichen Beweis benutzen, wenn man die vorhin angegebene Modifikation, die Punkte Q_α nicht gleichzeitig, sondern nacheinander einzuführen, anwendet; sobald man nämlich in $\mathfrak{E}_1$ die Punkte Q_1 so annimmt, daß sie zu je dreien nicht auf einer Geraden liegen, dann werden von selbst auch in den folgenden Ebenen keine drei Punkte Q auf einer Geraden liegen und man kommt auch hier für $n \geqq 3$ zur *Existenz von Punktmengen, die mit jeder Ebene genau n Punkte gemeinsam haben.* Auch dies könnte man noch verschiedentlich weiter verallgemeinern, insbesondere auf Systeme von Flächen. —

Wir haben bisher nur die Existenz der Mengen mit *einzigem* Ordnungsindex n (und ihre unmittelbaren Verallgemeinerungen) nachgewiesen. Nun noch ein Wort über die Mengen *von n-ter Ordnung* mit *vorgeschriebener* Verteilung der Ordnungsindizes. Irgend eine Gerade trifft ein solches Gebilde in *höchstens n* Punkten. Man gebe sich eine ganz beliebige, n enthaltende Teilmenge $\mathfrak{N}$ der ganzen Zahlen 0 bis n; dann existieren dazu stets Mengen $\mathfrak{Q}$, so *daß die Gesamtheit der Ordnungsindizes von $\mathfrak{Q}$ genau mit $\mathfrak{N}$ übereinstimmt*[1]). Man braucht

[1]) Auch hier kann n gleich der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$ der abzählbaren Mengen sein. Und dabei sind noch die zwei Fälle möglich: $\mathfrak{N}$ enthält $n = \mathfrak{a}$; oder dies ist nicht der Fall, aber $\mathfrak{N}$ enthält unendlich viele ganze Zahlen n.

nämlich für die Zahlen $2 \leq \nu < n$ nur dieselbe Betrachtung wie früher zu machen, wobei an Stelle der festen Schnittzahlen n jetzt die (in $\mathfrak{N}$) wechselnden Schnittzahlen ν genommen werden; und die Indizes 0 und 1 kann man ebenfalls beliebig beifügen, da es immer wieder Gerade g_α aus (1) gibt, die keinen der vorhergehenden Punkte Q_β $(\beta < \alpha)$ enthalten und die deshalb entweder (Index 0) ganz frei gehalten oder (Index 1) mit nur einem Punkte Q_α versehen werden können. Und ebenso läßt sich (nach Übergang von 2 zu k) dies entsprechend auf alle im obigen betrachteten Verallgemeinerungen übertragen, indem stets die feste Schnittpunktzahl n durch die Zahlen der Zahlenmenge $\mathfrak{N}$ ersetzt wird.

§ 2. Ein paar allgemeine Bemerkungen über die Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n.

Nachdem wir die Existenzfragen ganz allgemein behandelt haben, wollen wir uns von jetzt ab hier ausschließlich auf den Fall der *ebenen* Gebilde beschränken, obwohl z. B. die Überlegungen dieses Paragraphen sich ohne weiteres auch auf den drei- oder mehrdimensionalen linearen Raum übertragen lassen.

Man kann den Gebilden mit einzigem Ordnungsindex n[1]) noch mancherlei besondere Bedingungen auferlegen. Wir heben nur hervor: *Es gibt (für jedes $n > 1$) sowohl Gebilde mit einzigem Ordnungsindex n, die in der ganzen Ebene überall dicht liegen, als auch solche, die nirgends dicht liegen, und auch solche, die in vorgeschriebenen Gebieten überall dicht, sonst nirgends dicht liegen.* Zunächst kann man das Gebilde so konstruieren, daß es in der ganzen Ebene $\mathfrak{E}$ *überall dicht* liegt: Es gibt in $\mathfrak{E}$ nur abzählbar viele Kreisgebiete mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Radien und man kann also diese Gebiete in eine einfache Reihe R ordnen. Man kann auf g_α die Punkte (7) jedesmal in dem ersten Gebiet von R wählen, in dem noch

[1]) Hier immer im eigentlichen Sinn genommen, d. h. auf jeder Geraden sollen genau n Punkte liegen.

keine vorhergehende Gerade einen Punkt Q besitzt (so lange es überhaupt noch solche freien Gebiete in R gibt).

Andererseits kann man durch eine andere Spezialisierung des Verfahrens von § 1 erreichen, daß die Menge $\mathfrak{Q}$ *nirgends dicht* wird. Man gebe sich eine nirgends dichte perfekte Schar von parallelen Geraden der Richtung h und eine andere ebenfalls nirgends dichte perfekte Schar von parallelen Geraden einer anderen Richtung k. Es existiert eine Wohlordnung der ersten Schar:

$$(9) \qquad h_1, h_2, h_3, \ldots, h_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_c$$

und eine Wohlordnung der zweiten Schar:

$$(10) \qquad k_1, k_2, k_3, \ldots, k_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega_c.$$

Wir betrachten wieder wie früher die Geraden g_α aus (1), ersetzen aber die Verwendung von (2) durch folgende speziellere Vorschrift: Für $\beta < \alpha$ seien die Punkte (6) bereits bestimmt und die Gesamtheit der Verbindungsgeraden aller Paare von Punkten Q_β sei wieder mit Γ_α bezeichnet. *Entweder* besitzt nun g_α nicht die Richtung h; dann nehmen wir (je nachdem ob g_α zu Γ_α gehört oder einen oder keinen Punkt Q_β enthält) die Schnittpunkte von g_α mit den ersten $(n-2)$ bzw. $(n-1)$ bzw. n Geraden aus (9), die noch keinen Punkt Q_β enthalten und die g_α nicht in einem Punkt treffen, der auf einer von g_α verschiedenen Geraden aus Γ_α liegt. *Oder* g_α besitzt die Richtung h; dann verfahre man genau ebenso, nur daß an Stelle von (9) jetzt (10) verwendet wird. In beiden Fällen bezeichne man die so auf g_α ausgezeichneten Punkte wie in (7).

Nimmt man im vorstehenden die nirgends dichten perfekten Geradenmengen (9) und (10) vom Maß Null, so ist man sicher, daß auch die daraus abgeleiteten Mengen $\mathfrak{Q}$ das *Maß Null* haben. Darüber hinaus aber erhält man in sehr einfacher Weise eine allgemeine Aussage über das Maß unserer Mengen mit einzigem Ordnungsindex n oder allgemeiner über die Gebilde von endlicher oder abzählbarer Ordnung; nämlich den

Satz: Eine Menge $\mathfrak{M}$ von endlicher oder abzählbarer Ordnung besitzt stets das innere Maß Null.

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}_1$ irgend eine *abgeschlossene* Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Nach Voraussetzung wird $\mathfrak{M}_1$ von jeder Geraden der Richtung x in höchstens abzählbar vielen Punkten, also in einer Menge vom linearen Maß 0 getroffen; deshalb muß $\mathfrak{M}_1$ auch vom ebenen Maß 0 sein[1]). Wenn nun aber $\mathfrak{M}$ von positivem inneren (ebenen) Maß wäre, dann müßte $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ von positivem Maß enthalten, was unmöglich ist.

Die spezielleren Mengen mit einzigem Ordnungsindex n können, wie wir vorhin gesehen haben, vom Maß 0 sein. Es kann aber auch der andere noch mögliche Fall vorkommen, daß sie nicht meßbar, aber vom inneren Maß Null sind; man kann nämlich, um dies zu erreichen, ähnlich verfahren, wie dies Herr W. Sierpiński in seiner schönen Note „Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement"[2]) tut[3]), mit der überhaupt die Betrachtungen unserer beiden ersten Paragraphen sachlich und methodisch mannigfache Berührungspunkte haben.

§ 3. Beweis der Unmöglichkeit, dass ebene Mengen mit einzigem Ordnungsindex 2 ein Kontinuum enthalten können.

Ausgehend von allereinfachsten Kurven waren wir zu unserer Fragestellung und zu den von uns betrachteten Gebilden gekommen. Es wird uns daher vor allem interessieren, in wie weit unsere Gebilde Ähnlichkeit mit Kurven haben, insbesondere ob und wann sie Kontinua enthalten können. Wir werden in dieser Hinsicht vor allem die ebenen Gebilde 2. Ordnung betrachten, in diesem Paragraphen zunächst die ebenen Mengen mit einzigem Ordnungsindex 2.

---

[1]) Dieser Schluß ist nur ein Spezialfall der Formel:

$$\iint \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int \left(\int \varphi(x, y)\, dx\right) dy, \quad \text{wenn } \varphi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } M_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, wobei M_1 als im Borelschen Sinne meßbar vorausgesetzt wird.

[2]) W. Sierpiński, Fundamenta mathematicae I (1920), p. 112/15.

[3]) Nur müßte man hier die Reihe (1) mit zu Grunde legen.

Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: Es sei $\mathfrak{C}$ *ein zwischen den Punkten* A *und* B *irreduzibles Kontinuum*[1]*; ferner sei* $\mathfrak{G}$ *ein (offenes) Gebiet, dem* A *und* B *angehören, und es enthalte* $\mathfrak{C}$ *einen in bezug auf* $\mathfrak{G}$ *äußeren Punkt*[2] C*; dann muß* $\mathfrak{C}$ *den Rand* $\mathfrak{R}$ *von* $\mathfrak{G}$ *in mindestens 2 verschiedenen Punkten treffen.*

Beweis: Das Kontinuum $\mathfrak{C}$ muß $\mathfrak{R}$ in *mindestens einem* Punkt P treffen; ferner muß $\mathfrak{C}$ ein zwischen A und P irreduzibles Teilkontinuum $\mathfrak{C}_1$ enthalten. Wir nehmen nun an, es wäre P der *einzige* Punkt von $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{R}$. Dann behaupte ich zunächst, daß $\mathfrak{C}_1$ ganz in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt, wenn mit $\overline{\mathfrak{G}}$ das abgeschlossene Gebiet bezeichnet wird, das aus der Vereinigung $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ entsteht. Bilden wir nämlich den Durchschnitt $(\mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{C}_2$. Wenn gezeigt ist, daß $\mathfrak{C}_2$ ein Kontinuum ist, so muß $\mathfrak{C}_2$ (wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_1$ zwischen A und P) mit $\mathfrak{C}_1$ identisch sein. Angenommen, $\mathfrak{C}_2$ wäre kein Kontinuum, dann könnte man $\mathfrak{C}_2$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde, nicht leere Teilmengen $\mathfrak{C}_2^*$ und $\mathfrak{C}_2^{**}$ zerlegen. P sei in $\mathfrak{C}_2^{**}$ enthalten. Die Komplementärmenge von $\mathfrak{G}$ werde mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet; der Durchschnitt $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)$ ist eine abgeschlossene (mindestens P enthaltende) Menge. Der einzige Punkt, den $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)$ mit $\mathfrak{R}$ und mit $\mathfrak{C}_2^{**}$ gemeinsam hat, ist P, während $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)$ und $\mathfrak{C}_2^*$ elementenfremd sind. Man hat also eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_1$ in die beiden abgeschlossenen, elementenfremden, nicht leeren Teilmengen $\mathfrak{C}_2^*$ und $[\mathfrak{C}_2^{**} \dotplus (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}_1)]$; eine solche Zerlegung des Kontinuums $\mathfrak{C}_1$ ist aber unmöglich; also muß auch $\mathfrak{C}_2$ ein Kontinuum und daher mit $\mathfrak{C}_1$ identisch sein; d. h. $\mathfrak{C}_1$ liegt ganz in $\overline{\mathfrak{G}}$.

Dasselbe gilt für ein in $\mathfrak{C}$ enthaltenes, zwischen B und P irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_3$. Da die beiden Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_3$ den Punkt P gemeinsam haben, so ist ihre Vereinigungs-

---

[1] D. h. ein Kontinuum, das A und B enthält, das aber kein A und B enthaltendes Teilkontinuum umfaßt. Dieser wichtige Begriff stammt bekanntlich von Herrn L. Zoretti [Ann. Ec. Norm. (3) 26 (1909), p. 487].

[2] D. h. C soll weder innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ sein, noch dem Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ angehören.

menge $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_3)$ ein Kontinuum, das A und B enthält und ganz in $\mathfrak{C}$ enthalten ist. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}$ zwischen A und B muß also $\mathfrak{C}$ mit $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_3)$ identisch sein; dies ist aber unmöglich, da $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_3)$ in $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt, während $\mathfrak{C}$ den außerhalb $\overline{\mathfrak{G}}$ gelegenen Punkt C enthält. Also ist die gemachte Annahme, daß P der einzige Punkt von $(\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{R})$ ist, ausgeschlossen; d. h. $\mathfrak{C}$ muß mit $\mathfrak{R}$ mindestens zwei Punkte gemeinsam haben. q. e. d.

Auf Grund des vorstehenden Hilfssatzes beweisen wir nun den folgenden Satz, der die zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Frage beantwortet:

Satz: Eine ebene Menge $\mathfrak{M}$ mit einzigem Ordnungsindex 2 kann kein Kontinuum enthalten.

Beweis: Angenommen, es enthielte $\mathfrak{M}$ ein beschränktes[1]) Kontinuum $\mathfrak{K}$; dann ist in $\mathfrak{K}$ ein zwischen zwei seiner Punkte A und B irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}$ enthalten. Wir bilden nun den kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{B}$, dem $\mathfrak{C}$ angehört. Auf der Begrenzung von $\mathfrak{B}$ liegt mindestens ein von A und B verschiedener Punkt C von $\mathfrak{C}$. Es sei g eine durch C gehende Stützgerade von $\mathfrak{B}$. Auf g liegt dann (da $\mathfrak{M}$ vom einzigen Ordnungsindex 2 ist) noch ein zweiter, von C verschiedener Punkt C' von $\mathfrak{M}$. Durch C' legen wir eine zu g hinreichend benachbarte Gerade g', welche A und B von C trennt. Bezeichnen wir diejenige von g' bestimmte Halbebene, die A und B enthält, mit $\mathfrak{G}$, so zeigt der vorstehende Hilfssatz, daß g' von $\mathfrak{C}$ in mindestens zwei Punkten getroffen wird. g' enthält daher mindestens drei Punkte von $\mathfrak{M}$, im Widerspruch zur vorausgesetzten 2. Ordnung von $\mathfrak{M}$; also ist die Annahme, $\mathfrak{M}$ enthalte ein Kontinuum, unmöglich. q. e. d.[2])

Der vorstehende Satz gilt sicherlich nicht mehr für Mengen mit einzigem Ordnungsindex n, wenn $n \geqq 4$ ist; d. h. *für* $n \geqq 4$

[1]) Wir können $\mathfrak{K}$ gleich als beschränkt voraussetzen; denn in der Tat enthält jedes beliebige Kontinuum beschränkte Teilkontinua.

[2]) Zwei weitere Beweise dieses Satzes werden sich am Schluß von § 4 ergeben.

existieren Mengen $\mathfrak{M}_n$ *mit einzigem Ordnungsindex* n*, die Kontinua enthalten.* (Der Fall $n = 3$ bleibt dabei noch offen.) Dies läßt sich sogar so einrichten, daß $\mathfrak{M}_n$ ein *beliebig vorgegebenes* Kontinuum $\mathfrak{K}$ von $(n-2)$-ter oder geringerer Ordnung enthält. Man braucht zu diesem Zweck nur das Verfahren des § 1 folgendermaßen zu modifizieren: $\mathfrak{K}$ sei von der Ordnung $\nu \leqq n-2$. Für $\beta < \alpha$ sei das Verfahren bereits durchgeführt und wie früher werde die Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte Q_β mit Γ_α bezeichnet. Wenn die Gerade g_α unser $\mathfrak{K}$ in μ Punkten trifft (wobei $0 \leqq \mu \leqq \nu$ ist) und wenn ϱ Punkte Q_β auf g_α liegen (wobei $0 \leqq \varrho \leqq 2$ ist), dann werden die ersten $n - \mu - \varrho$ Punkte aus der Reihe (2) gewählt, die auf g_α, aber nicht auf $\mathfrak{K}$ oder auf einer von g_α verschiedenen Geraden von Γ_α liegen; und diese Punkte werden wieder entsprechend, wie in (7), mit

$$Q_\alpha^1, \; \ldots, \; Q_\alpha^{n-\mu-\varrho} \tag{7 a}$$

bezeichnet[1]). Die Menge der Verbindungsgeraden aller Punkte (Q_β, Q_α) werde wieder $\Gamma_{\alpha+1}$ genannt. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}_n$ aller Punkte Q_α (für $\alpha < \Omega_c$) und des Kontinuums $\mathfrak{K}$ ist dann die gesuchte Menge. Dabei ist noch zu bemerken: Eine beliebige von g_α verschiedene, in $(\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_\alpha)$ enthaltene Gerade $\bar{g}$ trifft $\mathfrak{K}$ in σ Punkten, wobei $0 \leqq \sigma \leqq \nu$ ist, und trägt außerdem 2 Punkte aus (7 a), so daß $\bar{g}$ insgesamt höchstens n Punkte von $\mathfrak{M}_n$ enthält, also das Verfahren nicht gestört werden kann.

§ 4. Die ebenen Gebilde 2. Ordnung, die Kontinua enthalten.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß die ebenen Mengen mit einzigen Ordnungsindex 2 kein Kontinuum enthalten können. Wir stellen nun noch die allgemeinere Frage: *Wie muß bei einem Gebilde* $\mathfrak{M}$ *2. Ordnung die Verteilung der*

1) Natürlich wird in dem möglichen Fall, wo $n - \mu - \varrho = 0$ ist, unter (7 a) eine leere Menge verstanden.

Ordnungsindizes sein, damit $\mathfrak{M}$ Kontinua enthalten kann? Und ferner: *Wie sind diese Kontinua beschaffen?*

Wir behandeln die zweite Frage zuerst und beweisen den folgenden

Satz: *Jedes ebene beschränkte Kontinuum $\mathfrak{K}$ von 2. Ordnung ist eine konvexe Kurve.*

Beweis: Unter den Komplementärgebieten, die $\mathfrak{K}$ in der Ebene bestimmt, befindet sich genau ein nicht beschränktes Gebiet $\mathfrak{H}$. Wir betrachten zunächst den Fall, wo auch *mindestens ein beschränktes Komplementärgebiet* $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{K}$ vorhanden ist. [Man sieht übrigens sofort, daß in diesem Fall auch nur ein *einziges* beschränktes Komplementärgebiet $\mathfrak{G}$ vorhanden sein kann.] Sind nun P_1 und P_2 irgend zwei (innere) Punkte von $\mathfrak{G}$, so muß ihre Verbindungsgerade den Rand $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ in genau 2 Punkten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ treffen und die (offene) Strecke $(R_1 R_2)$ gehört ganz zu $\mathfrak{G}$, während ihre beiden Verlängerungen in $\mathfrak{H}$ liegen; also gehört erst recht die Strecke $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{G}$ und deshalb ist $\mathfrak{G}$ ein *konvexes Gebiet*. Sein Rand $\mathfrak{R}$ ist daher eine geschlossene konvexe Kurve, die ganz aus Punkten von $\mathfrak{K}$ besteht. Außerdem muß aber $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfallen; denn enthielte $\mathfrak{K}$ noch einen weiteren, nicht zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Punkt Q, dann müßte die Verbindungsgerade von Q mit irgend einem (inneren) Punkt P von $\mathfrak{G}$ den Rand $\mathfrak{R}$ in zwei verschiedenen Punkten treffen, im Widerspruch mit der vorausgesetzten 2. Ordnung von $\mathfrak{K}$. Also ist in diesem Fall $\mathfrak{K}$ eine *geschlossene konvexe Kurve.*

Wir betrachten nun den *anderen Fall*, daß $\mathfrak{K}$ *kein beschränktes Komplementärgebiet bestimmt.* Es seien A und B zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{K}$; g sei ihre Verbindungsgerade, mit s werde die offene Strecke (AB) bezeichnet. $\mathfrak{K}$ enthält ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}$. Vereinigt man $\mathfrak{C}$ mit s, so teilt $(\mathfrak{C} + s)$ die Ebene in genau 2 Gebiete, die beide von dem ganzen Gebilde $(\mathfrak{C} + s)$ begrenzt werden[1]).

---

[1]) Nach A. Rosenthal, Sitzungsber. Bayer. Akad. d. Wiss. 1919, p. 102 (Satz 6).

Von diesen ist eines beschränkt, das andere nicht beschränkt; das erstere werde mit $\mathfrak{G}^*$, das letztere mit $\mathfrak{H}^*$ bezeichnet. Die Verlängerungen von s gehören zu $\mathfrak{H}^*$; längs s gehören die Punkte auf der einen Seite zu $\mathfrak{G}^*$, auf der anderen zu $\mathfrak{H}^*$; deshalb muß $\mathfrak{G}^*$ vollständig auf einer Seite von g liegen und dasselbe gilt also auch für $\mathfrak{C}$. Jede Gerade, die einen inneren Punkt von $\mathfrak{G}^*$ enthält, muß den Rand $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{G}^*$ in mindestens zwei Punkten treffen. Wenn eine solche Gerade s nicht schneidet, so muß sie *genau zwei* Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten. Wenn auf einer Geraden h ein [von A und B verschiedener] Punkt C von s liegt, so sind zwei Fälle denkbar: entweder es wird $\mathfrak{C}$ von h in *einem* oder in *zwei* Punkten getroffen. Betrachten wir den letzteren Fall näher: Die beiden Schnittpunkte von h mit $\mathfrak{C}$ seien P_1 und P_2 und es liege P_1 zwischen C und P_2. Die Strecke $(C P_1)$ muß zu $\mathfrak{G}^*$ gehören; dagegen sind bezüglich $(P_1 P_2)$ zwei Teilfälle denkbar: entweder gehört $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{H}^*$ oder zu $\mathfrak{G}^*$. Wir wollen zeigen, daß dieser letztere Teilfall, wo $(C P_1)$ und $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, ausgeschlossen ist[1]). Es seien Q_1 bzw. Q_2 je ein Punkt von $(C P_1)$ bzw. von $(P_1 P_2)$. Man kann innerhalb $\mathfrak{G}^*$ Q_1 und Q_2 durch einen einfachen[2]) Streckenzug σ verbinden; σ kann h in endlich vielen Punkten schneiden, aber es gibt auf σ einen letzten Schnittpunkt $\bar{Q}_1$ mit $(C P_1)$ und einen ersten Schnittpunkt $\bar{Q}_2$ mit $(P_1 P_2)$; das $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$ verbindende Stück von σ sei mit $\bar{\sigma}$ bezeichnet. $\bar{\sigma}$ liegt ganz auf der einen Seite von h. Nun bildet die Vereinigung der Strecke $[\bar{Q}_1 \bar{Q}_2]$ mit $\bar{\sigma}$ ein einfaches geschlossenes Polygon $\mathfrak{P}$. Im inneren Gebiet von $\mathfrak{P}$ kann nach unserem Hilfssatz des vorigen Paragraphen kein Punkt von $\mathfrak{C}$ liegen, weil der Rand $\mathfrak{P}$ nur einen einzigen Punkt von $\mathfrak{C}$, nämlich P_1, enthält. Es seien $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ je eine kreisförmige Umgebung von $\bar{Q}_1$ bzw. von $\bar{Q}_2$, die ganz innerhalb $\mathfrak{G}^*$ enthalten sind. Man lege nun durch P_2 eine (zu h hinreichend

---

[1]) Der erste Teilfall [$(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{H}^*$ gehörend] ließe sich in analoger Weise ausschließen; doch scheidet dieser Fall nachher von selbst aus.

[2]) D. h. sich nicht selbst durchsetzenden.

benachbarte) Gerade h^*, die $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, s auf der zu $\bar{\sigma}$ entgegengesetzten Seite von h trifft. Seien Q_1^* bzw. Q_2^* je ein Punkt auf h^* innerhalb $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$. Dann erhält man durch Vereinigung der Strecken $[Q_1^* Q_2^*]$, $[Q_1^* \overline{Q}_1]$, $[Q_2^* \overline{Q}_2]$ mit $\bar{\sigma}$ ein einfaches geschlossenes Polygon $\mathfrak{P}^*$, in dessen Inneren P_1 liegt. Wieder nach unserem Hilfssatz von § 3 muß deshalb $\mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{C}$ in mindestens 2 Punkten getroffen werden; diese können nur auf $[Q_1^* Q_2^*]$ liegen; also müßte h^* 3 Punkte von $\mathfrak{C}$ enthalten, was unmöglich ist. Daher ist der Fall ausgeschlossen, daß $(C P_1)$ und $(P_1 P_2)$ zu $\mathfrak{G}^*$ gehören, und es gibt also auf jeder Geraden, welche einen inneren Punkt von $\mathfrak{G}^*$ enthält, genau *eine* ganz zu $\mathfrak{G}^*$ gehörende Strecke. Deshalb liegt die Verbindungsstrecke von irgend 2 Punkten von $\mathfrak{G}^*$ ganz innerhalb $\mathfrak{G}^*$, d. h. $\mathfrak{G}^*$ ist ein konvexes, beschränktes Gebiet und seine Begrenzung $\mathfrak{N}^* \equiv (\mathfrak{C} + s)$ ist demgemäß eine geschlossene konvexe Kurve. Also ist $\mathfrak{C}$ *ein konvexer Kurvenbogen.*

Dasselbe soll nun von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{K}$ nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck legen wir zunächst an $\mathfrak{C}$ in A und B die Tangenten a und b. Von den 7 Gebieten, in welche die Ebene durch die 3 Geraden a, b, g zerlegt wird[1]), enthält eines, $\mathfrak{G}_1$, die Kurve $\mathfrak{C}$; zwei weitere sind mit $\mathfrak{G}_1$ in denselben von a und g bestimmten Scheitelwinkeln enthalten; zwei weitere liegen mit $\mathfrak{G}_1$ in denselben von b und g bestimmten Scheitelwinkeln; die beiden letzten, die mit $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ bezeichnet werden sollen, sind mit $\mathfrak{G}_1$ in denselben von a und b bestimmten Scheitelwinkeln enthalten und unter diesen befindet sich eines, das an die Strecke s anschließt; dieses sei $\mathfrak{G}_2$. Die zugehörigen abgeschlossenen Gebiete sollen durch Überstreichen gekennzeichnet werden. Die nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{K}$ können sicherlich nur in $\overline{\mathfrak{G}}_2$ oder $\overline{\mathfrak{G}}_3$ liegen; denn ist P ein Punkt irgend eines der anderen (offenen) Gebiete, so muß entweder die Gerade $\overline{PA}$ oder die Gerade $\overline{PB}$ noch in einem weiteren Punkte $\mathfrak{C}$ treffen. Ferner kann auch

[1]) Wenn a und b zueinander parallel sind, werden nur 6 solche Gebiete bestimmt; es fällt dann $\mathfrak{G}_3$ weg.

sofort $\overline{\mathfrak{G}}_3$ ausgeschaltet werden. Denn: Der Schnittpunkt C von a und b[1]) liegt entweder auf der gleichen Seite von g wie $\mathfrak{C}$ oder auf der entgegengesetzten Seite; im *letzteren* Fall wird die Verbindungsgerade irgend eines [von C verschiedenen[2])] Punktes von $\overline{\mathfrak{G}}_3$ mit A (oder B) noch einmal die Kurve $\mathfrak{C}$ treffen. Im *ersteren* Fall liegt $\overline{\mathfrak{G}}_3$ auf derselben Seite von g wie $\mathfrak{C}$, aber in positiver Entfernung von $\mathfrak{C}$ sowie von $\overline{\mathfrak{G}}_2$, so daß Punkte von $\overline{\mathfrak{G}}_3$ nicht zusammen mit $\mathfrak{C}$ und Punkten von $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ein Kontinuum bilden können. Also alle nicht zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Punkte von $\mathfrak{K}$ müssen in $\overline{\mathfrak{G}}_2$ liegen. Insbesondere liegen auf derjenigen Seite von g, auf der sich $\mathfrak{C}$ befindet, keine weiteren Punkte von $\mathfrak{K}$. Ist die Menge $(\mathfrak{K} - \mathfrak{C})$ nicht leer, so muß sie A oder B oder beide Punkte zu Häufungspunkten haben und die durch Hinzunahme dieser Häufungspunkte abgeschlossene Menge $\overline{(\mathfrak{K} - \mathfrak{C})}$ kann demgemäß nur aus einem oder zwei, jedenfalls nicht aus drei abgeschlossenen elementenfremden Teilen bestehen, ohne daß $\mathfrak{K}$ zerfiele. Also seien $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ diese Kontinua, die zusammen $\overline{(\mathfrak{K} - \mathfrak{C})}$ bilden. $\mathfrak{K}_1$ sei vorhanden und enthalte den Punkt A. Sicherlich können nicht zugleich A und B zu $\mathfrak{K}_1$ [oder $\mathfrak{K}_2$] gehören; denn sonst wäre in $\mathfrak{K}_1$ ein zwischen A und B irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ enthalten, also ein konvexer Bogen; deshalb würde $(\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2)$ und also erst recht $\mathfrak{K}$ mindestens ein beschränktes Komplementärgebiet begrenzen, was der frühere, nicht der jetzt betrachtete Fall wäre. Man drehe b um B ins Gebiet $\mathfrak{G}_2$ hinein so lange, bis in bezug auf $\mathfrak{K}_1$ eine Stützlage b^* erreicht ist, d. h. b^* sei hierbei die erste Gerade, die einen (und wegen der 2. Ordnung von $\mathfrak{K}$ auch *nur* einen) Punkt A^* von $\mathfrak{K}_1$ enthält. [Natürlich kann b^* bereits mit b zusammenfallen; wobei aber sicherlich A^* von B verschieden ist.] Es gibt nun in dem Kontinuum

---

[1]) Sind a und b parallel, so ist ja $\mathfrak{G}_3$ überhaupt nicht vorhanden!

[2]) Auch Punkt C läßt sich hier ausschalten; denn gehört C zu $\mathfrak{K}$, dann kann kein Punkt P_2 von $\mathfrak{G}_2$ dazu gehören, da die Gerade P_2C $\mathfrak{C}$ trifft.

$(\mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{C})$ ein zwischen B und A^* irreduzibles Teilkontinuum $\mathfrak{C}_1^*$, also einen konvexen Bogen, der ganz auf der einen Seite von b^* liegt und der mit dem ebenfalls ganz auf dieser Seite von b^* gelegenen Kontinuum $(\mathfrak{K}_1 \dotplus \mathfrak{C})$ identisch sein muß. Ebenso zeigt man, daß (wenn $\mathfrak{K}_2$ vorhanden ist) auch $(\mathfrak{K}_2 \dotplus \mathfrak{C})$ ein konvexer Bogen mit den Endpunkten A und B^* ist. Also ist $\mathfrak{K}$ die Vereinigung der drei konvexen Bogen [die allerdings nicht alle drei zu existieren brauchen] $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}_2$, die außer A und B keine Punkte gemeinsam haben. Deshalb ist $\mathfrak{K}$ selbst ein zwischen A^* und B^* irreduzibles Kontinuum, also ein einziger *konvexer Bogen*. q. e. d.

Das gleiche läßt sich nunmehr auch leicht für ein *nicht beschränktes* Kontinuum $\mathfrak{K}$ beweisen. Zunächst ist jedes beschränkte Teilkontinuum $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{K}$ ein konvexer Kurvenbogen. Die Endpunkte von $\mathfrak{C}$ seien A und B. Nach der vorhergehenden Überlegung können weitere Punkte von $\mathfrak{K}$ nur in dem zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Bereich $\overline{\mathfrak{G}}_2$ liegen und es muß wieder $(\mathfrak{K} - \mathfrak{C})$ aus einem oder zwei Kontinuen $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ bestehen. $\mathfrak{K}_1$ sei vorhanden und enthalte wieder A. Es gibt dann wieder unter den durch B gehenden, $\mathfrak{G}_2$ treffenden Geraden eine Grenzlage b^* (die eventuell mit b zusammenfällt), so daß in dem Winkel $\sphericalangle\,(g b^*)$ ganz $\mathfrak{K}_1$ enthalten ist. [b^* selbst braucht hier keinen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ zu tragen.] Jede durch B gehende, innerhalb des $\sphericalangle\,(g b^*)$ liegende Gerade trifft $\mathfrak{K}_1$, da andernfalls eine Zerspaltung von $\mathfrak{K}_1$ folgen würde; und zwar muß $\mathfrak{K}_1$ in genau einem Punkt getroffen werden. Betrachten wir ferner diejenigen durch B gehenden Geraden, auf deren Nachbargeraden sich Punkte von $\mathfrak{K}_1$ befinden, die von B beliebig weit entfernt sind. Wenn derartige Gerade überhaupt vorhanden sind, dann gibt es im $\sphericalangle\,(g b^*)$, von g herkommend, eine erste solche Gerade k. Ist k von b^* verschieden, so trägt k einen im Endlichen gelegenen Punkt von $\mathfrak{K}_1$, der nicht Häufungspunkt des im $\sphericalangle\,(g k)$ oder des im $\sphericalangle\,(k b^*)$ enthaltenen Teiles von $\mathfrak{K}_1$ sein kann, so daß $\mathfrak{K}_1$ zerfallen müßte. Also fällt k mit b^* zusammen; d. h. in jedem im $\sphericalangle\,(g b^*)$ enthaltenen *kleineren* Winkel $\sphericalangle\,(g b^{**})$ bleibt $\mathfrak{K}_1$ beschränkt; also der hierin enthaltene Teil von $\mathfrak{K}_1$ ist ein konvexer Bogen. Daher ist entweder $\mathfrak{K}_1$ ein beschränkter oder ein ins Unendliche laufender konvexer Bogen. Analog alles für $\mathfrak{K}_2$. Es ergibt sich so, daß $\mathfrak{K}$, *wenn es nicht beschränkt ist,* ein (nach einer oder zwei Seiten) *ins Unendliche laufender konvexer Kurvenbogen* sein muß. Also haben wir ganz allgemein den

Satz: Jedes beliebige ebene Kontinuum 2. Ordnung ist eine konvexe Kurve.

Nunmehr ist es leicht, auch die erste, zu Beginn dieses Paragraphen gestellte Frage zu beantworten, nämlich die Frage nach der Verteilung der Ordnungsindizes derjenigen Gebilde 2. Ordnung, die Kontinua enthalten.

Zunächst *muß bei einer Menge $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung, die ein Kontinuum enthält, der Ordnungsindex 0 vorhanden sein.*

Denn: $\mathfrak{M}$ enthält nach dem vorigen Satz einen konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ mit den Endpunkten A und B. Man lege an $\mathfrak{C}$ in A und B die Tangenten a und b sowie die Verbindungsgerade g von A und B. Wie oben gezeigt, können weitere Punkte von $\mathfrak{M}$ nur in $\mathfrak{G}_2$ und, wenn a und b sich auf derselben Seite von g schneiden, auf der $\mathfrak{C}$ liegt, auch in $\mathfrak{G}_3$ liegen[1]). Jede zu g parallele Gerade g', welche das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ trifft (in dem $\mathfrak{C}$ liegt), ohne $\mathfrak{C}$ zu schneiden, kann demgemäß *keinen* Punkt von $\mathfrak{M}$ enthalten. Also muß der Ordnungsindex 0 vorkommen und zwar *auf unendlich vielen Geraden, die in der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ vorhanden sein müssen.*

Ebenso einfach ergibt sich, daß *bei einer Menge $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung, die ein Kontinuum enthält, der Ordnungsindex 1 vorkommen muß.*

Denn: $\mathfrak{M}$ enthält wieder einen konvexen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ mit den Endpunkten A und B. Es sei C ein von A und B verschiedener Punkt von $\mathfrak{C}$. Man lege in C eine Stützgerade g

[1]) Der Schnittpunkt C von a und b kann in jedem Fall (wo er existiert) zu $\mathfrak{M}$ gehören; allerdings muß dann $\mathfrak{M}$ ausschließlich aus der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{C}$ und C bestehen (da die Verbindungsgerade von C mit irgend einem Punkt P von $\mathfrak{G}_2$ oder $\mathfrak{G}_3$ $\mathfrak{C}$ noch einmal trifft).

an $\mathfrak{C}$; dann enthält g nur den Punkt C von $\mathfrak{C}$, muß also, wenn der Ordnungsindex 1 nicht vorkommt, noch einen zweiten Punkt C' von $\mathfrak{M}$ tragen. Man lege durch C' eine zu g hinreichend benachbarte Gerade g', welche $\mathfrak{C}$ in zwei Punkten schneidet. Dann enthielte g' drei Punkte von $\mathfrak{M}$, im Widerspruch mit der 2. Ordnung. — Auch hier muß *der Ordnungsindex 1 auf unendlich vielen Geraden von der Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ *auftreten*; da der vorstehende Schluß für die Stützgeraden sämtlicher von A und B verschiedener Punkte C gilt.

Die beiden vorstehenden Aussagen über die Ordnungsindizes 0 und 1 liefern zugleich *zwei neue Beweise des Satzes von § 3*, daß nämlich eine Menge mit einzigem Ordnungsindex 2 kein Kontinuum enthalten kann[1]).

Fassen wir alle diese Bemerkungen zusammen, so erhalten wir den

Satz: Eine Menge 2. Ordnung kann nur dann ein Kontinuum enthalten, wenn alle drei Ordnungsindizes 0, 1, 2 vorhanden sind und zwar jeder von ihnen in der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Übrigens kann eine Menge $\mathfrak{M}$ 2. Ordnung mehrere getrennte Kontinua, d. h. konvexe Bögen, enthalten. Denn man kann mehrere konvexe Bögen so legen, daß sie paarweise zueinander in den erlaubten Bereichen $\overline{\mathfrak{G}}_2$ und $\overline{\mathfrak{G}}_3$ liegen (nach der obigen Bezeichnungsweise) und von keiner Geraden in mehr als 2 Punkten getroffen werden.

Ist in $\mathfrak{M}$ eine geschlossene konvexe Kurve enthalten, so muß $\mathfrak{M}$ mit diesem Oval identisch sein. — Bezeichnen wir ferner mit „*Halboval*" einen (nicht geschlossenen) konvexen Bogen mit parallelen Tangenten in den Endpunkten. Sind in $\mathfrak{M}$ zwei getrennt liegende Halbovale $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}''$ vorhanden, so müssen die zu $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}''$ gehörenden Gebiete $\overline{\mathfrak{G}}_2$ einander gegenseitig enthalten, was nur möglich ist, wenn $\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}''$

[1]) Der zweite dieser neuen Beweise benutzt übrigens denselben Grundgedanken wie der Beweis von § 3. — Zugleich ist damit gezeigt, daß eine Menge $\mathfrak{M}$, die auf *jeder* Geraden, *die* $\mathfrak{M}$ *trifft, genau zwei* Punkte besitzt, *kein Kontinuum* enthalten kann.

gemeinsame Endtangenten haben und sich gegenseitig die hohlen Seiten zukehren. Weitere Punkte können dann zu $\mathfrak{M}$ nicht gehören. — Schließlich kann unter den in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Bogen (die nicht Teile größerer Bogen sind) nur *ein einziger* sein, der *größer* als ein Halboval ist. Denn bei zwei solchen müßte jeder von ihnen in dem dreieckförmigen Bereich $\overline{\mathfrak{G}}_2$ des anderen liegen, was unmöglich ist.