

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über die äussere Berandung eines im Endlichen gelegenen Gebietes und den Jordanschen Kurvensatz.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 17. Juni 1922.

Ein älterer von Herrn E. Phragmén¹⁾ herrührender Satz besagt, daß eine Punktmenge, welche die vollständige Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Gebietes bildet, irgend einen Teil enthalten muß, welcher zusammenhängend²⁾ ist. Ich gebe im folgenden diesem Satze eine wesentlich vervollkommnete Fassung, welche einen genaueren Einblick in die Struktur jenes zusammenhängenden Begrenzungsteils gibt und seinen Charakter als äußere Berandung des betreffenden Gebietes deutlich hervortreten läßt, und beweise ihn nach einer Methode, welche sich gleichzeitig als geeignet erweist, als Grundlage für einen neuen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes zu dienen. Nach meinem Dafürhalten dürfte derselbe in Bezug auf gedankliche Einfachheit und Anschaulichkeit vor den bisherigen Beweisen gewisse Vorzüge besitzen und mag daher trotz deren bereits recht stattlicher Zahl als nicht ganz überflüssig erscheinen. Es ist doch immerhin einigermaßen auffallend, daß bei der prinzipiellen Wichtigkeit, ja fundamentalen Bedeutung jenes Satzes die deutschen Lehrbücher der Funktionentheorie sich stets mit seiner Erwähnung begnügen, daß aber noch kein

¹⁾ Acta mathematica 7 (1885), S. 45.

²⁾ Ich zitiere den von Herrn Phragmén benützten Ausdruck. Derselbe läßt sich aber ohne weiteres durch den prägnanteren ersetzen, daß jener Begrenzungsteil ein linienhaftes Kontinuum (d. h. eine zusammenhängende abgeschlossene Punktmenge ohne Innenpunkte) bildet.

so daß also jede dieser Mengen mit demselben Punkte $P_1^{(0)}$ beginnt. Ferner soll jede aus der unmittelbar vorhergehenden lediglich durch Einschaltung bzw. Anfügung weiterer Punkte, im übrigen mit Festhaltung der bestehenden Ordnung hervorgehen und somit alle vorhergehenden als Teilmengen enthalten. Wird dann für hinlänglich großes ν der Abstand je zweier konsekutiver Punkte beliebig klein, etwa:

$$\overline{P_\lambda^{(\nu)} P_{\lambda+1}^{(\nu)}} < \varepsilon \text{ für } \nu \geq n, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n_\nu - 1,$$

so ist die (offenbar abzählbare) Vereinigungsmenge der obigen Mengen, die wir mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ bezeichnen wollen, zusammenhängend, und man hat:

$$(1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{P_\lambda^{(\nu)} P_{\lambda+1}^{(\nu)}} = 0$$

nicht nur für jedes einzelne λ , sondern auch für beliebig ins Unendliche wachsende $\lambda \leq n_\nu - 1$.

Kommt nun zu dieser Bedingung noch die folgende hinzu:

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{P_{n_\nu}^{(\nu)} P_1^{(\nu)}} \equiv \lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{P_{n_\nu}^{(\nu)} P_1^{(0)}} = 0,$$

so soll jene Vereinigungsmenge als zyklisch zusammenhängend bezeichnet werden. Sie läßt sich dann, ohne den Charakter des zyklischen Zusammenhanges zu verlieren, in der Weise zyklisch permutieren, daß sie mit einem beliebig vorzuschreibenden ihrer Punkte, etwa $P_\lambda^{(\mu)}$ beginnt. Um dies zu erzielen, hat man nur die obige Mengenfolge nach Weglassung der ersten μ Zeilen mit der folgenden Menge zu beginnen:

$$P_\lambda^{(\mu)}, P_{\lambda+1}^{(\mu)}, \dots, P_{n_\mu}^{(\mu)}, P_1^{(\mu)}, P_2^{(\mu)}, \dots, P_{\lambda-1}^{(\mu)}$$

und jede der folgenden Mengen gleichfalls zyklisch so zu permutieren, daß sie mit dem Gliede beginnt, welches den Punkt $P_\lambda^{(\mu)}$ vorstellt.

2. Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden Hauptsatz:

Die Berandung eines im Endlichen gelegenen zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{B}$ enthält ein linienhaftes Kontinuum $\mathfrak{L}$, welches die Ebene in zwei getrennte Punktmengen zerlegt, nämlich ein ins Unendliche sich erstreckendes lückenloses Gebiet von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ und eine innere Punktmenge, welche den Bereich $\mathfrak{B}$ enthält. Dieses Kontinuum erscheint als Grenzgebilde einer Folge ineinander liegender Treppenpolygone und besteht aus einer zyklisch zusammenhängenden abzählbaren Punktmenge mit Hinzunahme ihrer Grenzpunkte.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Bereich $\mathfrak{B}$ als abgeschlossen annehmen. Seine Berandung kann dann von vorneherein keinen isolierten Punkt enthalten.

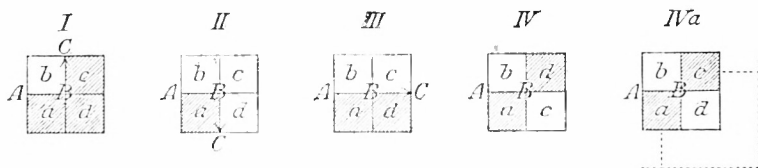
Es werde nun zunächst $\mathfrak{B}$ in ein Quadrat $\mathfrak{Q}$, etwa von der Seitenlänge λ eingeschlossen, groß genug, daß alle Randpunkte von $\mathfrak{B}$ in das Innere von $\mathfrak{Q}$ fallen, somit, da sie eine abgeschlossene Menge bilden, einen gewissen Minimalabstand ε_0 von der Grenze $\mathfrak{Q}$ besitzen. Wird jetzt eine natürliche Zahl m_0 so gewählt, daß: $\delta_0 \equiv \frac{\lambda}{m_0} < \varepsilon_0$ und darauf $\mathfrak{Q}$ in m_0^2 Teilquadrate von der Seitenlänge δ_0 zerlegt, so werden sämtliche an die vier Seiten von $\mathfrak{Q}$ angrenzenden Teilquadrate weder im Innern, noch auf dem Rande einen Randpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten, also ausschließlich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehen. An den so entstandenen quadratischen Ring von randpunktfreien Teilquadraten schließen wir alle etwa vorhandenen¹⁾ gleichfalls randpunktfreien Quadrate des nach innen angrenzenden zweiten quadratischen Ringes, sodann von den etwaigen randpunktfreien Quadraten des dritten Ringes

¹⁾ Sollte kein solches randpunktfreies Quadrat vorhanden sein, so muß der im Text angenommene entgegengesetzte Fall, wie aus den weiteren Betrachtungen hervorgeht, bei hinlänglicher Verfeinerung des quadratischen Netzes sicher eintreten, man braucht also nur die oben mit m_0 bezeichnete Zahl entsprechend zu vergrößern.

nur diejenigen, welche längs einer Seite an ein randpunktfreies Quadrat des zweiten Ringes angrenzen oder mit einem aus diesem Grunde bereits angeschlossenen Quadrate des dritten Ringes in gleicher Art zusammenhängen. Dieses Verfahren soll fortgesetzt werden, so lange noch randpunktfreie Quadrate vorhanden sind, die mit einem bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen.

Die Zusammenfassung aller dieser Teilquadrate mit der außerhalb Ω liegenden Punktmenge liefert ein ins Unendliche sich erstreckendes Gebiet $\mathfrak{U}_0$ von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$, welches, wie sogleich gezeigt werden soll, von einem einzigen (einfach geschlossenen) Treppenvolygon begrenzt wird.

Wir betrachten irgend eine der Begrenzung von $\mathfrak{U}_0$ angehörige Teilquadratseite, etwa die (nur behufs Fixierung der Ausdrucksweise) horizontal angenommene Strecke $\overline{AB}$, die also die Trennungslinie zwischen einem (zu $\mathfrak{U}_0$ gehörigen) randpunktfreien und einem randpunkthaltigen Quadrate oder, wie wir von jetzt ab zumeist kürzer sagen wollen, zwischen einem $\mathfrak{U}$ -Quadrate und einem $\mathfrak{R}$ -Quadrate bildet. Das erstere (in den Figuren I—IVa mit a bezeichnet) mag, um eine (an sich wiederum gleichgültige) Festsetzung zu treffen, unterhalb, das letztere (eben daselbst mit b bezeichnet) oberhalb $\overline{AB}$ angenommen werden. Für die beiden nach rechts benachbarten Quadrate sind dann bezüglich ihrer Zugehörigkeit zu den $\mathfrak{U}$ - oder $\mathfrak{R}$ -Quadraten die 4 verschiedenen, durch die Figuren I—IV dargestellten Fälle denkbar: die $\mathfrak{U}$ -Quadrate sind dabei durch Schraffierung gekennzeichnet, die $\mathfrak{R}$ -Quadrate weiß gelassen.



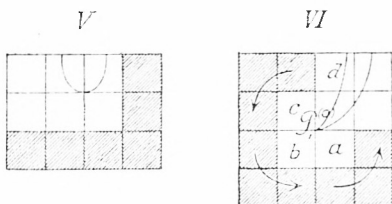
Man erkennt unmittelbar, daß es in den Fällen I—III stets eine und nur eine Quadratseite gibt (nämlich die mit $\overline{BC}$ bezeichnete), die als Begrenzungsstück des Gebietes $\mathfrak{U}_0$ sich an $\overline{AB}$ anschließt. Eine Schwierigkeit würde sich dagegen im Falle der Figur IV ergeben, in dem ja eine jede der drei an $\overline{AB}$ sich anschließenden Quadratseiten der Begrenzung von $\mathfrak{U}_0$ angehören müßte. Dieser Fall kann nun aber in Wirklichkeit niemals eintreten. Denn jedes der beiden mit a und c bezeichneten $\mathfrak{A}$ -Quadrate gehört ja zu $\mathfrak{U}_0$ und hängt daher mit dem anderen zusammen (wie in Fig. IVa durch die punktierten Linien schematisch angedeutet ist). Da außerdem der Punkt B kein Randpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, so besitzt er auch eine gewisse randpunktfreie Umgebung, die also aus lauter Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ besteht. Hiernach würde also das Quadrat d , das mindestens einen Randpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten müßte, von einem aus lauter Außenpunkten bestehenden Gebiet vollständig umschlossen und von dem gleichfalls randpunkthaltigen Quadrate b abgetrennt sein, was der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widerspricht. Damit ist also das Eintreten jeder anderen Möglichkeit, als der in Fig. I—III dargestellten ausgeschlossen¹⁾.

Da die analoge Schlußweise auch auf die in Fig. I—III mit $\overline{BC}$ bezeichnete Quadratseite anwendbar ist (d. h. *mutatis mutandis*, wenn die letztere, wie in Fig. I und II, vertikal liegt), ebenso auch in Bezug auf die Fortsetzung der Quadratseite $\overline{AB}$ nach links, so erscheint zunächst als Begrenzung von $\mathfrak{U}_0$ ein an die Strecke $\overline{AB}$ nach rechts sich anschließender Treppenweg, der sich niemals verzweigen und nie-

¹⁾ Erst gelegentlich der Drucklegung dieser Mitteilung werde ich darauf aufmerksam gemacht, daß der von Herrn A. Winternitz herührende Beweis des Jordanschen Kurvensatzes (Math. Zeitschrift 1 [1918]) an einer Stelle (a. a. O., S. 332/3) genau die vorstehende Schlußweise enthält. Obschon der übrige Teil seines Beweises mit dem hier gegebenen des Phragmén'schen und des Jordanschen Satzes kaum irgend welche weitere Berührungspunkte besitzt, so schien es mir doch angemessen, die obige Tatsache ausdrücklich zu erwähnen.

mals abbrechen kann, also schließlich bei A wieder einmünden muß und so zu einem einfach geschlossenen Treppenvolygon $\mathfrak{T}_0$ wird. Dieses letztere zerlegt die Ebene in zwei getrennte Gebiete, deren inneres den Bereich $\mathfrak{B}$ und zwar wegen des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ vollständig enthält, während das äußere (einschließlich seiner polygonalen Begrenzung) lediglich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ besteht und ein lückenlos¹⁾ ins Unendliche sich erstreckendes, oben bereits mit $\mathfrak{A}_0$ bezeichnetes Gebiet bildet.

Die an $\mathfrak{T}_0$ nach innen anliegenden²⁾ $\mathfrak{R}$ -Quadrate haben teils eine Seite, teils nur einen Eckpunkt³⁾ miteinander gemein. Liegt ein Randpunkt im Innern eines solchen Quadrats, so muß das letztere deren unendlich viele enthalten, da ja jeder Randpunkt zugleich Häufungspunkt von Randpunkten ist. Liegt er dagegen auf einer Quadratseite (die dann selbstverständlich nicht zu $\mathfrak{T}_0$ gehört), so kann er für das betreffende Quadrat und, wenn er ein Eckpunkt ist, auch für zwei benachbarte (s. Fig. V), ja sogar für drei in diesem Eckpunkt aneinander stoßende Quadrate (s. Fig. VI) der einzige sein. Es besteht daher im äußersten Falle die Möglichkeit, daß die Gesamtheit der Randpunkte, welche den an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$ -Quadraten angehören, eine endliche Menge bilden. Im allgemeinen wird aber diese Menge eine unendliche sein. Wir wollen



1) Es kann nicht etwa ein zweites Treppenvolygon von der Art des mit $\mathfrak{T}_0$ bezeichneten irgend ein Teilgebiet aus $\mathfrak{A}_0$ ausschneiden, da dessen Existenz wieder der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widersprechen würde.

2) „Anliegend“ bedeutet immer: längs einer Seite zusammenhängend.

3) Einen Eckpunkt nämlich dann, wenn dieser der Scheitel eines einspringenden Winkels von $\mathfrak{T}_0$ bildet.

nun darauf ausgehen, für diesen Fall eine bestimmte endliche Menge daraus zu isolieren. Hierzu heben wir aus jedem der an $\mathfrak{L}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$ -Quadrate je einen solchen Punkt heraus, der von einer zu $\mathfrak{L}_0$ gehörigen Quadratseite den kleinsten Abstand hat, d. h., da ja ein $\mathfrak{R}$ -Quadrat höchstens drei zu $\mathfrak{L}_0$ gehörige Quadratseiten enthalten kann, höchstens drei solche Punkte, die aber auch teilweise oder insgesamt und zwar sogar gleichzeitig für zwei oder drei benachbarte $\mathfrak{R}$ -Quadrate in einen einzigen zusammenfallen können (s. Fig. V, VI). Sollten andererseits für irgend eine Quadratseite mehrere bzw. unendlich viele „nächstgelegene“ Randpunkte vorhanden sein, so soll es frei stehen, einen beliebigen davon auszuwählen.

Wir fixieren nun irgend eins der an $\mathfrak{L}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$ -Quadrate als Nr. 1 und denken uns, von diesem ausgehend, einen vollständigen Umlauf längs $\mathfrak{L}_0$ etwa in positiver Richtung ausgeführt, zugleich jeder einzelnen zu $\mathfrak{L}_0$ gehörigen Quadratseite bzw. Folge von zwei oder drei solchen Quadratseiten (wie in Fig. V, VI) den oben herausgehobenen nächstgelegenen Randpunkt zugeordnet und der Reihenfolge entsprechend numeriert.

Eine scheinbare Schwierigkeit könnte hierbei eintreten, falls ein $\mathfrak{R}$ -Quadrat, das zwei parallele Seiten (ohne verbindende dritte) mit $\mathfrak{L}_0$ gemein hat und daher bei Umlaufung von $\mathfrak{L}_0$ zweimal passiert wird, nur einen einzigen Randpunkt enthielte. Dieser Fall kann aber wiederum in Wirklichkeit niemals eintreten, wie die folgende Überlegung zeigt. Angenommen, es gäbe ein Quadrat der fraglichen Art, etwa das in

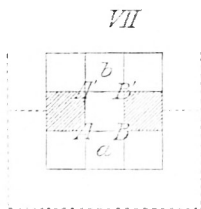


Fig. VII mit $ABB'A'$ bezeichnete. Die beiden schraffierten Quadrate sind dann als randpunktfrei und (wie durch die punktierten Linien wieder schematisch angedeutet) zu $\mathfrak{L}_0$ gehörig anzusehen, während jedes der beiden anderen anliegenden, mit a und b bezeichneten Quadrate Randpunkte von $\mathfrak{B}$ enthalten müssen. Der

hypothetische einzige, dem Quadrate $\overline{ABB'A'}$ angehörige Randpunkt müßte dann auf $\overline{AB}$ oder $\overline{A'B'}$ liegen, so daß die ganze Fläche des Quadrats $\overline{ABB'A'}$ mit Ausnahme dieses einzigen Punktes aus lauter Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehen und durch Vermittelung der beiden schraffierten Nachbarquadrate mit $\mathfrak{R}_0$ zusammenhängen würde. Dann lägen aber die beiden randpunkthaltigen Quadrate a und b in zwei vollständig von Außenpunkten umschlossenen getrennten Gebieten, was wieder der Voraussetzung des Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ widersprechen würde. Das gleiche würde aber sogar schon dann eintreten, wenn das Quadrat $\overline{ABB'A'}$ irgend ein, die beiden schraffierten Nachbarquadrate verbindendes Gebiet (z. B. einen beliebig schmalen Streifen) von Außenpunkten enthielte. Es muß daher eine von $\overline{AB}$ zu $\overline{A'B'}$ sich erstreckende zusammenhängende und dann *co ipso* abgeschlossene Menge, also mindestens ein Kontinuum von Randpunkten vorhanden sein, das dann auch die Existenz eines Kontinuums von Innenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ nach sich zieht, das also insbesondere keinesfalls aus einer einzigen zu $\overline{AA'}$ parallelen Strecke bestehen kann. Daraus folgt aber, daß es zu jeder der beiden parallelen Seiten $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ einen besonderen nächstgelegenen Randpunkt gibt und daß der am nächsten zu $\overline{AA'}$ liegende von $\overline{BB'}$ entfernter ist, als der zu $\overline{BB'}$ nächstliegende.

Hiernach läßt sich also in der Tat nach der angegebenen Vorschrift eine bestimmte, eindeutig geordnete endliche Folge „ausgezeichneter“ Randpunkte:

$$P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}, \dots P_{n_0}^{(0)},$$

deren Gesamtheit mit $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ bezeichnet werden möge, aus der Menge derjenigen, die den an $\mathfrak{R}_0$ anliegenden $\mathfrak{R}$ -Quadraten angehören, herausheben. Der Abstand zweier konsekutiver dieser ausgezeichneten Randpunkte, also die Strecke

$\overline{P_{\lambda}^{(0)} P_{\lambda+1}^{(0)}}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n_0 - 1$) ist dann im äußersten Fall¹⁾ nicht größer als $2\sqrt{2} \cdot \delta_0$. Dies gilt auch für $\overline{P_{n_0}^{(0)} P_1^{(0)}}$, da ja der beim Schluß des Umlaufs als letzter vor $P_1^{(0)}$ auftretende Punkt $P_{n_0}^{(0)}$ dem Nachbarquadrat des Quadrates Nr. 1, oder allenfalls²⁾ dem nächst- bzw. übernächst³⁾ vorangehenden angehört.

Die Menge der Randpunkte, welche nicht nur den (bisher ausschließlich in Betracht gezogenen) an $\mathfrak{T}_0$ anliegenden, sondern auch den nur in einem Eckpunkte an $\mathfrak{T}_0$ anstoßenden⁴⁾ $\mathfrak{R}$ -Quadraten angehören, besitzt wiederum einen gewissen Minimalabstand von $\mathfrak{T}_0$, etwa δ'_0 (wo $\delta'_0 < \delta_0$ sein kann). Wird jetzt eine natürliche Zahl $m_1 \geq 3$ so angenommen, daß:

$$\delta_1 \equiv \frac{\lambda}{m_0 m_1} < \delta'_0 \quad \left(\text{und zugleich eo ipso: } \delta_1 \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda}{m_0} = \frac{1}{3} \delta_0 \right),$$

sodann jedes der von $\mathfrak{T}_0$ eingeschlossenen Quadrate in m_1^2 Teilquadrate von der Seitenlänge δ_1 zerlegt, so bilden die an $\mathfrak{T}_0$ längs einer Seite oder auch nur in einem Eckpunkt anstoßenden Teilquadrate einen lediglich aus Außenpunkten von $\mathfrak{B}$

1) Nämlich, wenn $P_{\lambda}^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ zwei $\mathfrak{R}$ -Quadraten angehören, die nur einen Eckpunkt gemein haben. Andernfalls hat man:

$$\overline{P_{\lambda}^{(0)} P_{\lambda+1}^{(0)}} \leq \sqrt{2} \cdot \delta_0 \quad \text{bzw.} \quad \leq \sqrt{5} \cdot \delta_0,$$

je nachdem $P_{\lambda}^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ demselben bzw. zwei aneinander liegenden $\mathfrak{R}$ -Quadraten angehören.

2) Nämlich, wenn jenes Nachbarquadrat den Punkt $P_1^{(0)}$ mit dem Quadrat Nr. 1 gemeinsam hat und keinen weiteren enthält.

3) Vgl. Fig. VI. Nimmt man daselbst das Quadrat a als Quadrat Nr. 1, so würde bei der durch die Pfeile angedeuteten Umlaufsrichtung weder b , noch c , vielmehr erst d den Punkt $P_{n_0}^{(0)}$ liefern.

4) S. z. B. in Fig. II das mit c bezeichnete Quadrat. Daselbst würden nur die Quadrate b und d für die Auswahl der ausgezeichneten Randpunkte $P_{\lambda}^{(0)}$ in Betracht kommen. Andererseits könnte aber das Quadrat c einen Randpunkt enthalten, der näher an dem Eckpunkt B liegt, als die ausgezeichneten Randpunkte der Quadrate b und d an den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, was dann bei der Bestimmung des im Text mit δ'_0 bezeichneten Abstandes ausschlaggebend wäre.

bestehenden Ring, der außer von $\mathfrak{T}_0$ von einem im Abstände δ_1 parallel zu $\mathfrak{T}_0$ verlaufenden Treppenpolygone $\mathfrak{T}'_0$ begrenzt wird. Enthält dann irgend ein an $\mathfrak{T}'_0$ anliegendes Quadrat einen der ausgezeichneten Randpunkte $P^{(0)}_\lambda$, so ist dieser wieder ein nächstgelegener in Bezug auf diejenige Quadratseite, welche jetzt an die Stelle der früher dem Punkte $P^{(0)}_\lambda$ zugeordneten (ihr parallelen) größeren Quadratseite getreten ist. Es besteht dann die Möglichkeit, daß schon alle Punkte $P^{(0)}_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n_0$) auf diese Weise wieder zum Vorschein kommen. Es können aber auch Punkte $P^{(0)}_\lambda$ (möglicherweise sogar alle) infolge der Verkleinerung der Teilquadrate durch ein oder auch mehrere (einen Streifen von der Breite δ_1 bildende) Zwischenquadrate von $\mathfrak{T}'_0$ getrennt sein. Alle diese Zwischenquadrate mögen dann an das Treppenpolygon $\mathfrak{T}'_0$ noch angesetzt werden¹⁾, ebenso auch alle Quadrate, die etwa von zwei senkrecht zueinander verlaufenden zusammenstoßenden Streifen und einem Teil von $\mathfrak{T}'_0$ eingeschlossen werden²⁾. Alsdann tritt an die Stelle des Treppenpolygons $\mathfrak{T}'_0$ jetzt ein neues $\mathfrak{T}''_0$, dessen Äußeres wieder aus einem lückenlosen Gebiet von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ besteht, während das Innere diesen letzteren enthält. Zugleich besitzt dasselbe die Eigenschaft, daß bei positivem, mit dem Quadrate, welches den Punkt $P^{(0)}_\lambda$ enthält, beginnenden Umlauf in den an $\mathfrak{T}''_0$ nach innen anliegenden Quadraten sämtliche Punkte der Menge $\{P^{(0)}_{n_0}\}$ und zwar genau in der früheren Reihenfolge auftreten.

Andererseits können aber unter den an $\mathfrak{T}''_0$ nach innen anliegenden Quadraten noch weitere randpunktfreie vorhanden sein. Auch diese fügen wir noch zu dem von $\mathfrak{T}''_0$ be-

1) Sollte einer der Punkte $P^{(0)}_\lambda$ auf der Trennungslinie zweier benachbarter Zwischenquadrate liegen, so mögen diese beiden bzw. ein entsprechender Streifen von der Breite $2\delta_1$ an $\mathfrak{T}'_0$ angeschlossen werden.

2) Solche Quadrate sind sicher randpunktfrei. Denn die entgegengesetzte Annahme würde wiederum auf den bereits mehrfach vorgekommenen Widerspruch gegen den vorausgesetzten Zusammenhang von $\mathfrak{B}$ führen.

grenzten Komplexe hinzu, ebenso auch alle diejenigen, die mit diesen oder einem anderen bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen sollten, und setzen dieses Verfahren so lange fort, bis jedes der äußersten angeschlossenen randpunkt-freien an ein randpunkthaltiges anzuliegen kommt. Als Begrenzung aller so zusammengeschlossenen $\mathfrak{H}$ -Quadrate erscheint dann auf Grund der bei dem Existenznachweise des Treppenpolygons $\mathfrak{T}_0$ benützten Schlußweise ein (einfach geschlossenes) Treppenpolygon $\mathfrak{T}_1$, welches nach innen den Bereich $\mathfrak{B}$ enger umschließt, als jedes der Treppenpolygone $\mathfrak{T}_0$, $\mathfrak{T}'_0$, $\mathfrak{T}''_0$ (falls es nicht mit dem letztgenannten bzw. mit beiden letztgenannten identisch ist), und nach außen wiederum ein lückenloses Gebiet $\mathfrak{H}_1$ von Außenpunkten begrenzt, welches das zuvor mit $\mathfrak{H}_0$ bezeichnete als Teil enthält. Aus jedem, der nunmehr an $\mathfrak{T}_1$ anliegenden, durchweg randpunkthaltigen Quadrate (unter denen auch alle bereits an $\mathfrak{T}''_0$ anliegenden $\mathfrak{H}$ -Quadrate, insbesondere die $P^{(0)}_i$ -haltigen vorkommen) heben wir wieder genau nach den zuvor getroffenen Festsetzungen eine (nur zum Teil neue) Menge ausgezeichnete Randpunkte heraus, welche die Menge $\{P^{(0)}_{n_0}\}$ als Teilmenge enthält. Die ihr angehörigen Punkte mögen in der Reihenfolge, welche bei positivem, mit der dem Punkte $P^{(0)}_1$ zugeordneten Quadratseite beginnenden Umlauf um $\mathfrak{T}_1$ zum Vorschein kommt, mit:

$$P^{(1)}_1, P^{(1)}_2, P^{(1)}_3, \dots, P^{(1)}_{n_1} \quad (\text{wo: } P^{(1)}_1 \equiv P^{(0)}_1),$$

ihre Gesamtheit mit $\{P^{(1)}_{n_1}\}$ bezeichnet werden. Für den Abstand konsekutiver Punkte besteht jetzt die Beziehung:

$$\overline{P^{(1)}_i P^{(1)}_{i+1}} \leq 2 \sqrt{2} \cdot \delta_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1 - 1)$$

und dieselbe obere Schranke gilt auch für $\overline{P^{(1)}_{n_1} P^{(1)}_1}$.

Wir behaupten nun, daß die innerhalb der Folge $\{P^{(1)}_{n_1}\}$ vollständig enthaltene Menge der Punkte $P^{(0)}_i$, abgesehen von Einschaltungen weiterer Randpunkte, wieder genau in der ursprünglichen Anordnung auftritt, wie dies ja bei der Umlaufung von $\mathfrak{T}''_0$ noch der Fall war und offenbar bestehen bliebe, wenn

jetzt nur diejenigen neuerdings ausgezeichneten Randpunkte zwischengeschaltet würden, welche an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{N}$ -Quadraten angehören. Es erscheint aber fraglich, ob bei Aufzählung aller möglichen bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ auftretenden ausgezeichneten Randpunkte nicht irgend einer der Punkte $P_i^{(0)}$ sich zwischen zwei Punkte $P_{\varkappa}^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einschieben könnte. Das ist selbstverständlich ausgeschlossen, wenn $P_{\varkappa}^{(0)}$ und $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ demselben oder zwei (wenn auch nur in einem Eckpunkt) an einander stoßenden Quadraten angehören. Es kommt daher lediglich der Fall in Betracht, daß $P_{\varkappa+1}^{(0)}$ einem Quadrate angehört, das bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$ nicht unmittelbar dem mit $P_{\varkappa}^{(0)}$ besetzten folgt. Wird das zwischen diesen beiden Quadraten verlaufende Stück des Treppenvpolygons $\mathfrak{T}_0''$ von lauter $\mathfrak{N}$ -Quadraten begrenzt, so gehört dasselbe auch dem Treppenvpolygon $\mathfrak{T}_1$ an, sodaß in diesem Abschnitt der Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ gegen früher keinerlei Änderung eintritt. Eine solche wird erst dann möglich, wenn längs des fraglichen Stückes von $\mathfrak{T}_0''$ durchweg oder wenigstens teilweise $\mathfrak{M}$ -Quadrate anliegen. Sei dann etwa das (aus einer oder mehreren Quadratseiten bestehende) Wegstück $\overline{A \dots B}$ von $\mathfrak{T}_0''$ das erste, an welchem durchweg $\mathfrak{M}$ -Quadrate anliegen. Um $\mathfrak{T}_1$ aus $\mathfrak{T}_0''$ herzustellen, wird zunächst an jede zu $\overline{A \dots B}$ gehörige Quadratseite ein $\mathfrak{M}$ -Quadrat angesetzt und mit weiterer Hinzufügung von $\mathfrak{M}$ -Quadraten so lange fortgefahren, bis der entstandene Komplex, abgesehen von dem Wegstück $\overline{A \dots B}$, durchweg von $\mathfrak{N}$ -Quadraten begrenzt wird. Seine Begrenzung entsteht aus zwei Treppenwegen, die bei A und bei B beginnend schließlich zu einem einzigen, die Punkte A und B verbindenden Treppenwege t zusammenlaufen müssen¹⁾. Denn keiner jener beiden Treppenwege kann abbrechen oder an irgend einem nicht zu $\overline{A \dots B}$ gehörigen Punkte von $\mathfrak{T}_0''$ bzw. $\mathfrak{T}_1$ einmünden, da auf diese Weise das Treppenvpolygon in zwei

¹⁾ Die Begegnung der beiden Treppenwege kann auch in einem zu $\overline{A \dots B}$ gehörigen Eckpunkt stattfinden.

solche zerfallen würde, das eine den Randpunkt $P_{\pi}^{(0)}$, das andere $P_{\pi+1}^{(0)}$ enthaltend, was wiederum den Zusammenhang von $\mathfrak{B}$ zerreißen würde. Der von A nach B führende Treppenberg t tritt dann bei positiver Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ an die Stelle des Wegstückes $\overline{A...B}$ bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_0''$. Dabei werden sich eine Anzahl der neuerdings ausgezeichneten Randpunkte zwischen $P_{\pi}^{(0)}$ und $P_{\pi+1}^{(0)}$ einschieben. Soll die gleiche Möglichkeit für einen der älteren Serie angehörigen Punkt $P_{\lambda}^{(0)}$ bestehen, so muß der Treppenberg t eine Seite mit demjenigen an $\mathfrak{T}_0''$ anliegenden $\mathfrak{R}$ -Quadrat $\mathfrak{Q}_{\lambda}$ gemein haben, welches den Punkt $P_{\lambda}^{(0)}$ enthält. Dies ist nun, da t , wie bemerkt, außer Punkten von $\overline{A...B}$ keinen weiteren Punkt mit $\mathfrak{T}_0''$ gemein haben kann, einzig in der Weise möglich, daß $\mathfrak{Q}_{\lambda}$ nur eine zu $\mathfrak{T}_0''$ gehörige Seite besitzt und der Randpunkt $P_{\lambda}^{(0)}$ als nächstliegender ihr zugeordnet ist, während die ihr parallele Seite zu t gehört. Für diese muß aber auf Grund des zuvor im Anschluß an Fig. VII gesagten ein neuer nächstgelegener Punkt $P_{\mu}^{(1)}$ vorhanden sein und nur dieser letztere schiebt sich unter diejenigen zwischen $P_{\pi}^{(0)}$ und $P_{\pi+1}^{(0)}$ ein, während $P_{\lambda}^{(0)}$ auch bei Umlaufung von $\mathfrak{T}_1$ erst hinter $P_{\pi+1}^{(0)}$ an die Reihe kommen kann¹⁾.

Hiermit ist also der Nachweis erbracht, daß in der Punktmenge $\{P_{n_1}^{(1)}\}$ alle Punkte von $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ genau in ihrer ursprünglichen Reihenfolge, lediglich durch eingeschobene Zwischenpunkte getrennt, enthalten sind.

Da auf $\mathfrak{T}_1$ selbst wieder kein Randpunkt liegt, die Menge der letzteren also durch einen gewissen Minimalabstand von $\mathfrak{T}_1$ getrennt ist, so läßt sich das Verfahren, welches von $\mathfrak{T}_0$ aus zur Herstellung von $\mathfrak{T}_1$ führte, wiederholen und zwar unbegrenzt oft wiederholen. Man erhält also auf diese Weise

¹⁾ Diese ganze Betrachtung bleibt auch gültig, wenn an die Stelle von $P_{\lambda}^{(0)}$, $P_{\lambda+1}^{(0)}$ die im zyklischen Sinne konsekutiven Punkte $P_{n_0}^{(0)}$, $P_1^{(0)}$ treten.

eine unbegrenzt fortsetzbare Folge ineinander liegender, aus lauter Außenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehender Treppenspolygone:

$$\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots \mathfrak{T}_r, \dots,$$

welche nach außen eine entsprechende Folge lückenloser, beständig zunehmender und sich gegenseitig umfassender Gebiete von Außenpunkten:

$$\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_r, \dots$$

begrenzen, während sie nach innen den Bereich $\mathfrak{B}$ immer enger umschließen. Diese letztere Tatsache findet ihren präzisieren Ausdruck in der nachgewiesenen Existenz einer unbegrenzten Folge endlicher, durchweg mit demselben Punkte $P_1^{(0)}$ beginnender, durch systematische Einschaltung bzw. Anfügung neuer Punkte aus einander hervorgehender, fest geordneter Randpunktmengen:

$$\{P_{n_0}^{(0)}\}, \{P_{n_1}^{(1)}\}, \{P_{n_2}^{(2)}\}, \dots \{P_{n_r}^{(r)}\}, \dots$$

(wo: $P_1^{(r)} \equiv P_1^{(0)}$ für $r = 1, 2, 3, \dots$), die mit unbegrenzt wachsendem r sich unbegrenzt verdichten und deren Vereinigungsmenge $\lim_{r \rightarrow \infty} \{P_{n_r}^{(r)}\}$ durch die Treppenspolygone $\mathfrak{T}_r$ unbegrenzt approximiert wird. Diese letztere ist also zusammenhängend und zwar, da $\overline{P_{n_r}^{(r)} P_1^{(0)}}$ mit unbegrenzt wachsendem r beliebig klein wird, zyklisch zusammenhängend. Durch Hinzunahme ihrer Häufungspunkte, die ja als Häufungspunkte von Randpunkten gleichfalls Randpunkte sind, wird sie zu einer abgeschlossenen und zwar, da sie als Menge von Randpunkten keine inneren Punkte enthalten kann, zu einem linienhaften Kontinuum $\mathfrak{L}$.

Dieses Kontinuum $\mathfrak{L}$ bildet die Begrenzung zweier verschiedener Punktmengen, nämlich erstens der Vereinigungsmenge $\mathfrak{A} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_r$ der Außengebiete $\mathfrak{A}_r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) als eines lückenlos zusammenhängenden, sich ins Unendliche erstreckenden Gebietes von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$;

zweitens der Komplementärmenge zu $\mathfrak{A}$, deren Punkte, soweit sie nicht zu $\mathfrak{Q}$ gehören, wir als innere Punkte (kürzer $\mathfrak{S}$ -Punkte) von $\mathfrak{Q}$, sie selbst mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen. Diese letztere enthält den Bereich $\mathfrak{B}$, da das Gebiet $\mathfrak{A}$ keinen Punkt von $\mathfrak{B}$ enthält. Da ferner jeder $\mathfrak{A}$ -Punkt außerhalb eines $\mathfrak{T}_r$ von hinlänglich großem (und um so mehr von noch größerem) Index r , jeder $\mathfrak{S}$ -Punkt innerhalb aller $\mathfrak{T}_r$ liegen muß, so findet zwischen je einem Punkte der einen und der anderen Kategorie kein Zusammenhang statt. Denn jeder einen $\mathfrak{A}$ -Punkt und einen $\mathfrak{S}$ -Punkt verbindende Streckenzug muß mit jedem $\mathfrak{T}_r$ von hinlänglich großem Index r einen Punkt, also als Häufungspunkt dieser Punkte auch mit $\mathfrak{Q}$ einen Punkt gemein haben. Es ist somit $\mathfrak{Q}$ identisch mit der vollständigen Begrenzung der beiden Punktmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$ und bildet insbesondere in dem Sinne die äußere Berandung des Bereiches $\mathfrak{B}$, daß sie ihn von denjenigen Außenpunkten trennt, welche das lückenlos ins Unendliche sich erstreckende Gebiet $\mathfrak{A}$ bilden (möglicherweise freilich auch noch von anderen Außenpunkten, wie alsbald gezeigt werden soll).

3. Im Anschluß an das vorstehende Ergebnis ist noch zu bemerken, daß die Häufungspunkte der Menge $\lim_{r \rightarrow \infty} \{P_{n_r}^{(v)}\}$ von zweierlei Art sein können. Die eine (stets vorhandene) Kategorie macht jene abzählbare Menge der „ausgezeichneten“ Randpunkte oder einen ihrer Abschnitte in der Weise zum Kontinuum, daß das letztere alle bzw. alle dem betreffenden Abschnitte angehörigen Punkte der Menge in sich aufnimmt und überall dicht enthält (in der Art, wie bei Hinzufügung der irrationalen Zahlen zu der abzählbaren Menge der rationalen des Intervalls $[0, 1]$). Die andere (welche offenbar auch gänzlich fehlen kann) liefert Kontinua, welche, allenfalls abgesehen von einzelnen Punkten, überhaupt keine Punkte der Menge $\lim_{r \rightarrow \infty} \{P_{n_r}^{(v)}\}$ enthalten. Ein bekanntes Beispiel dieser Art bildet die Annahme, daß ein Teil der äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$ aus den Punkten (x, y) besteht, welche der

Gleichung: $y = \sin^2 \frac{\pi}{x}$, etwa für $0 < |x| \leq 1$, genügen. Die Menge der Häufungspunkte enthält alsdann die Strecke $\overline{01}$ der y -Axe, von der lediglich der eine Punkt $(0,1)$ der Menge $\lim_{v \rightarrow \infty} \{P_{n_v}^{(v)}\}$ angehört. Während nun hier das zu der übrigen äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$ hinzutretende besondere Kontinuum nur aus einer einfachen Strecke besteht, so kann auch der zuerst von Herrn Brouwer¹⁾ bemerkte Fall (und zwar beliebig oft) eintreten, daß ein solches Kontinuum, also ein Teil der äußeren Berandung von $\mathfrak{B}$, zugleich die vollständige Begrenzung eines endlichen Gebietes von Außenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet. Danach braucht also das zuvor mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnete linienhafte Kontinuum die Ebene keineswegs nur in zwei getrennte Gebiete zu zerlegen, vielmehr kann die oben mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete, den Bereich $\mathfrak{B}$ enthaltende Punktmenge aus einer beliebigen Zahl getrennter Gebiete bestehen.

4. Wir wollen noch den Fall ins Auge fassen, daß irgend ein linienhaftes Kontinuum $\mathfrak{Q}$ die vollständige Begrenzung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ bildet (was nicht ausschließt, daß Teile von $\mathfrak{Q}$ noch andere Bereiche begrenzen). Als dann läßt sich $\mathfrak{Q}$ auch von innen und zwar durch eine Folge sich gegenseitig umschließender Treppenpolygone beliebig approximieren und zugleich wieder in eine abzählbare, zyklisch zusammenhängende Punktmenge und die Menge der zugehörigen Häufungspunkte zerlegen.

Um dies einzusehen, denke man sich zunächst ein Quadrat $\mathfrak{Q}$, etwa von der Seitenlänge λ konstruiert, das ganz im Innern von $\mathfrak{Q}$ liegt, also vollständig aus Innenpunkten von $\mathfrak{B}$ besteht. Man bestimme dann eine natürliche Zahl m_0 so, daß $\delta_0 \equiv \frac{\lambda}{m_0}$ kleiner ist, als der Minimalabstand des Quadrates $\mathfrak{Q}$ von der Begrenzung $\mathfrak{Q}$, teile $\mathfrak{Q}$ in m_0^2 Quadrate von der Seitenlänge δ_0 und überziehe daran anschließend den

¹⁾ Math. Ann. 68 (1910), S. 423.

Bereich $\mathfrak{B}$ mit einem Netz solcher Quadrate. Von diesen vereinige man alle an $\mathfrak{Q}$ unmittelbar anliegenden (offenbar randpunktfreien, also ausschließlich aus Innenpunkten von $\mathfrak{B}$ bestehenden) mit $\mathfrak{Q}$, ebenso alle randpunktfreien, die mit den letzteren oder mit bereits angeschlossenen längs einer Seite zusammenhängen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis es durch das Auftreten anliegender randpunkthaltiger Quadrate gehemmt wird. Man gewinnt auf diese Weise ein erstes von lauter Innenpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}$ erfülltes und begrenztes Treppenvolygon $\mathfrak{T}_0$, das ringsum von daran anliegenden randpunkthaltigen Quadraten umgeben ist. Aus den betreffenden Randpunkten kann man dann wieder, gerade so wie beim Beweise des Hauptsatzes von Nr. 2, eine in bestimmter Weise geordnete endliche Menge ausgezeichnete Randpunkte herausheben, und das in dieser Weise begonnene Verfahren läßt sich ganz analog, wie in Nr. 2 ausführlich beschrieben, unbegrenzt fortsetzen. Daraus ergibt sich dann unmittelbar die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

§ 2. Der Jordansche Kurvensatz.

1. Unter einer Jordanschen Kurve verstehen wir, wie üblich, eine doppelpunktlose stetige Parameterkurve, also eine Punktmenge, deren rechtwinklige Koordinaten definiert sind durch zwei Gleichungen von der Form:

$$(1) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

unter $\varphi(t)$, $\psi(t)$ eindeutige und stetige Funktionen der reellen Veränderlichen t etwa für $t_0 \leq t < T$ verstanden, die überdies der Bedingung genügen, daß nicht gleichzeitig:

$$(2) \quad \varphi(t_1) = \varphi(t_2), \quad \psi(t_1) = \psi(t_2), \quad \text{wenn: } t_1 \neq t_2.$$

Besteht bezüglich dieser letzteren Bedingung die eine Ausnahme:

$$(3) \quad \varphi(t_0) = \varphi(T), \quad \psi(t_0) = \psi(T),$$

so heißt die betreffende Jordansche Kurve geschlossen, im entgegengesetzten Falle offen.

Wie aus der vorstehenden Definition unmittelbar erkannt wird, fällt jede geschlossene Jordansche Kurve unter den in Nr. 2 des vorigen Paragraphen festgelegten Begriff einer zyklisch zusammenhängenden Punktmenge mit Hinzunahme ihrer Grenzpunkte, also eines linienhaften Kontinuums nach Art der äußeren Berandung eines Bereiches $\mathfrak{B}$. Diejenige Eigenschaft, die sie aus dem allgemeinen Typus solcher Kontinua heraushebt, besteht dann darin, daß ihre Grenzpunkte keine besonderen (d. h. die Punkte der abzählbaren zyklischen Menge nicht enthaltenden) Kontinua bilden und demgemäß auch keine besonderen Bereiche begrenzen können, daß vielmehr jede geschlossene Jordansche Kurve die Ebene in genau zwei getrennte Gebiete zerlegt. Dem Beweise dieser den Inhalt des „Jordanschen Kurvensatzes“ bildenden Aussage schicken wir zunächst zwei Hilfssätze voraus.

2. Hilfssatz I. Eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{P}$, welche ausschließlich aus Punkten einer die Punkte p_0 und P verbindenden Jordanschen Kurve $\mathfrak{C}$ besteht und Punkte in beliebiger Nähe von p_0 und P enthält, ist nach Hinzunahme ihrer Häufungspunkte mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch.

Beweis. Es sei Gl. (1) die Gleichung der Kurve $\mathfrak{C}$ und

$$(4) \quad p_0 \equiv (\varphi(t_0), \psi(t_0)), \quad T \equiv (\varphi(T), \psi(T)).$$

In Folge der Stetigkeit von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ gehört dann auch jeder Grenzpunkt der Menge $\mathfrak{P}$ der Kurve $\mathfrak{C}$ an, mit anderen Worten, auch die aus $\mathfrak{P}$ durch Hinzufügung der Grenzpunkte hervorgehende abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ besteht ausschließlich aus Punkten von $\mathfrak{C}$.

Es ist nun zu zeigen, daß auch umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{C}$ der Menge $\overline{\mathfrak{P}}$ angehört. Dies gilt zunächst ohne weiteres für die Punkte p_0 und P , da sie ja auf Grund der Voraussetzung Grenzpunkte der Menge $\mathfrak{P}$ sind.

Es bedeute ferner τ einen ganz beliebigen, dem Intervall $t_0 < \tau < T$ angehörigen Parameterwert, von dem noch nicht feststeht, daß er einen zu $\overline{\mathfrak{P}}$ gehörigen Punkt liefert,

und es mögen andererseits diejenigen Parameterwerte, von denen diese Eigenschaft feststeht, generell mit t' bzw. mit t'' bezeichnet werden, je nachdem sie kleiner oder größer als τ sind, sodaß also:

$$(5) \quad t_0 \leq t' < \tau, \quad \tau < t'' \leq T.$$

Die t' haben dann eine obere Grenze $\bar{t}'$, die t'' eine untere Grenze $\underline{t}''$, und zwar folgt aus Ungl. (5), daß:

$$(6) \quad \bar{t}' < \tau < \underline{t}''.$$

Da nun die Punktmenge $\mathfrak{P}$ eine abgeschlossene ist, so müssen die Punkte $(\varphi(\bar{t}'), \psi(\bar{t}'))$ und $(\varphi(\underline{t}''), \psi(\underline{t}''))$ ihr angehören. Da sie zugleich eine zusammenhängende ist und andererseits zwischen t' und t'' keine Parameterwerte existieren sollen, welche Punkte von $\mathfrak{P}$ liefern, so müssen jene beiden Punkte zusammenfallen¹⁾. Daraus folgt aber auf Grund der Bedingung (2), daß $\bar{t}' = \underline{t}''$ sein muß und daß daher mit Berücksichtigung von Ungl. (6) sich schließlich ergibt:

$$\bar{t}' = \tau = \underline{t}'',$$

d. h. daß in der Tat jeder beliebige Punkt $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$, falls $t_0 < \tau < T$, der Menge $\mathfrak{P}$ angehört. Dieselbe ist somit, wie behauptet, mit der Kurve $\mathfrak{G}$ identisch.

Zusatz. Tritt an die Stelle der offenen Jordanschen Kurve eine geschlossene, so läßt sich der vorstehende Satz in folgender Weise modifizieren:

Zerlegt man eine geschlossene Jordansche Kurve $\mathfrak{G}$ durch zwei beliebige ihrer Punkte p_0 und P in zwei

¹⁾ Der fragliche Zusammenhang kann nicht etwa dadurch hergestellt sein, daß die beiden zu den Parameterintervallen $[t_0, \bar{t}']$ und $[\underline{t}'', T]$ gehörigen Abschnitte von $\mathfrak{G}$ in irgend einem Punkte zusammenhängen, der zu einem von $\bar{t}'$ bzw. $\underline{t}''$ verschiedenen Parameterwerte gehört. Denn jene beiden Abschnitte von $\mathfrak{G}$ müßten, falls $\bar{t}' < \underline{t}''$ angenommen wird, als abgeschlossene Punktmengen einen bestimmten Minimalabstand haben, der nicht Null sein kann, da andernfalls $\mathfrak{G}$ einen Doppelpunkt besitzen würde.

Abschnitte und sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ zwei zusammenhängende Punktmengen, deren eine ausschließlich aus Punkten des einen, die andere aus solchen des anderen Abschnittes besteht und deren jede Punkte in beliebiger Nähe von p_0 und P enthält, so ist die Vereinigungsmenge der Mengen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ und ihrer Grenzpunkte mit $\mathfrak{C}$ identisch.

Denn auf Grund des vorstehenden Satzes folgt, daß von den beiden abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ die eine mit dem einen, die andere mit dem anderen Abschnitt von $\mathfrak{C}$ identisch ist.

3. Hilfssatz II. Eine offene Jordansche Kurve kann niemals die vollständige Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Bereiches $\mathfrak{B}$ bilden.

Beweis. Angenommen, das Gegenteil sei der Fall: dann läßt sich nach dem Satze am Schlusse von § 1, Nr. 4 aus den Randpunkten von $\mathfrak{B}$, also aus den Punkten von $\mathfrak{C}$ eine zyklisch zusammenhängende Menge $\lim_{r \rightarrow \infty} \{P_n^{(r)}\}$ herausheben, die von innen durch eine Folge sich gegenseitig umschließender Treppenvpolygone beliebig approximiert werden kann. Wir bilden aus dieser zyklischen Punktmenge in folgender Weise zwei gesonderte Mengen. Es sei (mit Beibehaltung der beim Beweise des Hauptsatzes von § 1, Nr. 2 benützten Bezeichnungen) $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ die erste Menge der Mengenfolge $\{P_n^{(r)}\}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) und $P_{m_0}^{(0)}$ (wo $m_0 > 1$) ein beliebiger Punkt derselben. Wir bilden aus der Anfangsmenge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ die beiden Mengen:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1^{(0)} & P_2^{(0)} & , & \dots & P_{m_0}^{(0)} \\ P_{m_0}^{(0)} & P_{m_0+1}^{(0)} & , & \dots & P_{n_0}^{(0)} \end{array}$$

(wo also das Glied $P_{m_0}^{(0)}$ zweimal auftritt). Nach dem beim Beweise des Satzes von § 1, Nr. 2 entwickelten Verfahren schließt sich dann an jede dieser Mengen eine unbegrenzte Folge von Mengen an:

$$\left. \begin{array}{l} P_1^{(r)}, P_2^{(r)}, \dots, P_{m_r}^{(r)}, \text{ wo: } P_1^{(r)} = P_1^{(0)}, \quad P_{m_r}^{(r)} = P_{m_0}^{(0)} \\ P_{m_r}^{(r)}, P_{m_r+1}^{(r)}, \dots, P_{n_r}^{(r)}, \quad P_{m_r}^{(r)} = P_{m_0}^{(0)}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P_{n_r}^{(r)} = P_1^{(0)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (r = 0, \\ 1, 2, \dots) \end{array}$$

Jede der beiden zugehörigen Vereinigungsmengen ist zusammenhängend. Da sie beide zusammengenommen die zyklisch zusammenhängende Menge $\lim_{r \rightarrow \infty} \{P_{n_r}^{(r)}\}$ liefern, welche, wie bemerkt, durch eine Folge sich umschließender, also sich beständig erweiternder Treppenvpolygone beliebig approximiert werden kann, so folgt, daß jene beiden aus lauter Punkten von $\mathcal{C}$ bestehenden Vereinigungsmengen nach Hinzunahme ihrer Grenzpunkte zwei linienhafte Kontinua bilden, welche die zwei Punkte $P_1^{(0)}$, $P_{m_0}^{(0)}$ gemein haben, im übrigen keinesfalls identisch sein können. Diese beiden linienhaften Kontinua müssen dann nach Hilfssatz I mit zwei verschiedenen, die Punkte $P_1^{(0)}$ und $P_{m_0}^{(0)}$ verbindenden Bögen der Jordanschen Kurve $\mathcal{C}$ zusammenfallen, die letztere muß also geschlossen sein.

Zusatz. Da jeder zusammenhängende Teil einer (offenen oder geschlossenen) Jordanschen Kurve eine offene Jordansche Kurve ist, so folgt: Bildet eine Jordansche Kurve die vollständige Begrenzung eines im Endlichen gelegenen Bereiches, so kann keiner ihrer Teile einen anderen Bereich begrenzen.

4. Hauptsatz. Eine geschlossene Jordansche Kurve $\mathcal{C}$ zerlegt die Ebene in zwei und nur zwei getrennte Gebiete.

Beweis. Es sei A ein am weitesten nach links, B ein am weitesten nach rechts gelegener Punkt von $\mathcal{C}$. Diese beiden Punkte zerlegen die Kurve in zwei Bögen, einen unteren und einen oberen, die wir durch Ansetzen beliebig (insbesondere beliebig klein) zu denkender horizontaler Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ nach links bzw. nach rechts verlängern. Hierdurch wird der Charakter jener beiden Bögen als offene Jordansche Kurven nicht geändert.

Wir denken uns nun durch die Punkte A' und B' zwei nach beiden Seiten unbegrenzte Vertikalen v_1 , v_2 gezogen und gehen darauf aus zu zeigen, daß jeder der beiden Kurvenbögen

$A'A \dots BB'$, die wir mit $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2$ bezeichnen wollen, den so entstandenen unendlichen Parallelstreifen in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Hierzu wenden wir dasjenige Verfahren an, welches in § 1, Nr. 2 zur Approximation der äußeren Berandung eines Bereiches durch eine Folge von Treppenvolygonen diente, auf einen jener beiden Kurvenbögen, etwa den unteren $\mathcal{C}'_1$ an.

Wir schließen also den letzteren zunächst in ein Quadrat, dann in einen quadratischen Ring von Teilquadraten und, von diesem ausgehend, in ein Treppenvolygon $\mathfrak{T}_0$ ein, dem wir wieder eine bestimmte endliche Menge $\{P_{n_0}^{(0)}\}$ von „ausgezeichneten Randpunkten“, d. h. von Punkten des Bogens $\mathcal{C}'_1$ zuordnen. Bei weiterer Fortsetzung des a. a. O. beschriebenen Verfahrens ergibt sich dann wieder eine unbegrenzte Folge in einander liegender Treppenvpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$), welche den Kurvenbogen $\mathcal{C}'_1$, immer enger umschließen, dazu eine gleichfalls unbegrenzte Folge sich beständig verdichtender endlicher Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von $\mathcal{C}'_1$ -Punkten, denen jene Treppenvpolygone unbegrenzt näher rücken, ohne jemals einen dieser Punkte zu erreichen. Wir treffen nun die weitere Verfügung, daß bei allen möglichen $\mathfrak{T}_\nu$ die beiden äußersten Vertikalseiten durch entsprechende Stücke der beiden Grenzvertikalen v_1, v_2 ersetzt werden sollen. Dadurch gelangen die beiden $\mathcal{C}'_1$ -Punkte A' und B' auf die Begrenzung aller $\mathfrak{T}_\nu$, während im übrigen keinerlei wesentliche Änderung eintritt. Werden jetzt die beiden (neu geschaffenen) äußersten Vertikalseiten der $\mathfrak{T}_\nu$ wieder ausgeschaltet, so zerfällt jedes $\mathfrak{T}_\nu$ in zwei Treppenwege, einen unteren $\underline{t}_\nu$ und einen oberen $\overline{t}_\nu$. Zugleich zerfällt auch jede der Punktmengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) in zwei solche, deren eine dem Treppenwege $\underline{t}_\nu$, die andere dem Treppenwege $\overline{t}_\nu$ zugeordnet ist und die beide zwischen $\underline{t}_\nu$ und $\overline{t}_\nu$ verlaufen. Die Vereinigungsmenge einer jeden dieser beiden Punktmengenfolgen mit Hinzunahme ihrer Grenzpunkte (zu denen auch A' und B' gehören) muß dann nach Hilfssatz I mit $\mathcal{C}'_1$ identisch sein. Da andererseits jedes $\underline{t}_\nu$

und jedes t_r ($r = 1, 2, 3, \dots$) den von v_1, v_2 begrenzten Parallelstreifen in zwei und nur zwei getrennte Gebiete, ein Untergebiet und ein Obergebiet, zerlegt, so gilt das gleiche von $\mathcal{G}'_1$, da ja auf Grund von Hilfssatz II bereits feststeht, daß nicht etwa ein Teil von $\mathcal{G}'_1$ ein Sondergebiet begrenzen könnte.

Ebenso ergibt sich, daß auch der (abgesehen von den Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$) vollständig dem Obergebiet von $\mathcal{G}'_1$ angehörige obere Kurvenbogen $\mathcal{G}'_2$ den Parallelstreifen in zwei Gebiete zerlegt. Dabei können die zwei durch $\mathcal{G}'_1$ und $\mathcal{G}'_2$ hervorgebrachten Zerlegungen nicht identisch sein, da sonst $\mathcal{G}'_1$ und $\mathcal{G}'_2$ identisch sein müßten. Es muß daher ein Teil des Obergebietes von $\mathcal{G}'_1$ mit einem Teil des Untergebietes von $\mathcal{G}'_2$ zusammenfallen, und es wird daher der Parallelstreifen durch die beiden Bögen $\mathcal{G}'_1$ und $\mathcal{G}'_2$ in drei Stücke zerlegt, von denen die beiden äußeren sich ins Unendliche erstrecken, das mittlere, gleichzeitig von $\mathcal{G}'_1$ und $\mathcal{G}'_2$ begrenzte, ganz im Endlichen liegt. Denkt man sich jetzt die beiden Ansatzstücke $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$, sowie die beiden Vertikalen v_1, v_2 ausgeschaltet und die beiden Bögen von $\mathcal{G}$, die nach Wegnahme der Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$ mit $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ bezeichnet werden mögen, zu der geschlossenen Kurve $\mathcal{G}$ zusammengefaßt, so zerlegt die letztere die Ebene in genau zwei getrennte Punktmengen, eine äußere, von der bereits feststeht, daß sie ein einziges zusammenhängendes (übrigens sich ins Unendliche erstreckendes) Gebiet bildet, und eine innere, von der noch zu zeigen ist, daß sie gleichfalls ein einziges zusammenhängendes Gebiet bildet. Dazu ist nur der Nachweis erforderlich, daß zwei beliebige, im Innern von $\mathcal{G}$ liegende Punkte P, P' durch eine ganz im Innern von $\mathcal{G}$ verlaufende gebrochene Linie verbunden werden können.

Wir bemerken zunächst, daß durch die vorstehende Betrachtung für jeden der beiden Kurvenbögen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ eine bestimmte Seite als untere, die andere als obere festgelegt ist. Insbesondere hat diejenige Seite des (unteren) Kurvenbogens $\mathcal{G}_1$, an welche die im Inneren von $\mathcal{G}$ liegenden Punkte angrenzen, als obere zu gelten.

Da der Punkt P einen gewissen von Null verschiedenen Minimalabstand von $\mathfrak{C}$ besitzen muß, so läßt er sich mit einem ganz aus Innenpunkten von $\mathfrak{C}$ bestehenden Quadrat umgeben, von dem ausgehend man nach der Vorschrift von § 1, Nr. 4 eine unbegrenzte Folge ganz von Innenpunkten der Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllter und begrenzter, sich gegenseitig umschließender Treppenvpolygone $\mathfrak{T}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) nebst einer entsprechenden Folge endlicher Mengen $\{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ von „ausgezeichneten“ Randpunkten, d. h. $\mathfrak{C}$ -Punkten herstellen kann, denen jene Treppenvpolygone unbegrenzt näher rücken. Die beim Beweise des Hilfssatzes II angewendete Schlußweise zeigt dann, daß die (wiederum zyklisch zusammenhängende) Vereinigungsmenge $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{P_{n_\nu}^{(\nu)}\}$ nach Hinzunahme ihrer Grenzpunkte mit der Kurve $\mathfrak{C}$ identisch sein muß. Bei dem obigen Verfahren muß nun unter den ausgezeichneten $\mathfrak{C}$ -Punkten einmal ein erster auftreten, der (von A und B verschieden) dem unteren Bogen $\mathfrak{C}_1$ angehört. Er werde mit P_1 , der auf der zugeordneten Quadratseite des entsprechenden Treppenvpolygons, etwa $\mathfrak{T}_m$, ihm gegenüber liegende mit Q bezeichnet. Die Strecke $\overline{QP_1}$ liegt dann, abgesehen von dem Punkte P , ganz im Innern von $\mathfrak{C}$. Da sich andererseits der Punkt P mit Q durch einen im Innern von $\mathfrak{T}_m$, also auch von $\mathfrak{C}$ verlaufenden Streckenzug verbinden läßt, so liefert der Streckenzug $\overline{PQP_1}$ eine im Innern von $\mathfrak{C}$ verlaufende Verbindung von P mit der oberen Seite von $\mathfrak{C}_1$.

Genau in derselben Weise läßt sich auch für den Punkt P' eine analoge Verbindung $\overline{P'Q'P'_1}$ mit einem Punkte P'_1 der oberen Seite von $\mathfrak{C}_1$ herstellen.

Nun läßt sich aber die obere Seite von $\mathfrak{C}_1$ durch die im ersten Teil des vorliegenden Beweises mit $\bar{i}_\nu$ bezeichneten Treppenwege in der Weise approximieren, daß jeder Punkt des Treppenweges einen beliebigen klein vorzuschreibenden Abstand von $\mathfrak{C}_1$ hat. Da das Bogenstück $\overline{P_1P'_1}$ von dem oberen Kurvenbogen $\mathfrak{C}_2$ einen gewissen Minimalabstand hat, so muß

bei hinlänglich großem ν der Treppenweg t , die Strecken $\overline{QP_1}$, $\overline{Q'P'_1}$ nahe bei P_1 bzw. P'_1 in zwei Punkten Q_1 bzw. Q'_1 treffen und das Wegstück $\overline{Q_1Q'_1}$ dem Untergebiete von $\mathfrak{G}_2$ angehören, also im Innern von $\mathfrak{G}$ liegen. Der aus $\overline{PQ_1Q'_1Q'P'}$ bestehende Streckenzug liefert dann eine im Innern von $\mathfrak{G}$ verlaufende Verbindung von P und P' .

Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.