Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. Mai 1922.

M. Lagally hat den unter der Annahme der Gültigkeit der Bernouillischen Gleichung berechneten Druck einer stationären Flüssigkeitsströmung auf eine geschlossene Fläche zurückgeführt auf die in der Strömung vorhandenen Quellen und Wirbel[1]). Bei der großen Bedeutung, die dieses Ergebnis besitzt, ist es von Interesse, daß seine Formel in aller Kürze auch ohne Dyadenrechnung unmittelbar aus geläufigen Sätzen der gemeinen Vektoranalysis gewonnen werden kann.

Ausgangspunkt ist die Formel für den Druck

$$1) \qquad \mathfrak{P}_0 = -\int_0 p\,\mathfrak{n}\,df = \frac{\varrho}{2}\int_0 v^2\,\mathfrak{n}\,df.$$

Hierin bedeutet df das Oberflächenelement, $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der inneren Normale, ϱ die Dichtigkeit.

Wir bedienen uns jetzt der bekannten Differentialformeln:

$$2) \qquad \operatorname{div}(F\mathfrak{v}) = F\operatorname{div}\mathfrak{v} + (\mathfrak{v}\nabla)F,$$

$$3) \qquad \nabla v^2 = 2(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v} \times \operatorname{curl}\mathfrak{v}$$

und der Gaußschen Umwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral

$$4) \qquad \int_K \nabla F\,d\tau = -\int_0 F\,\mathfrak{n}\,df,$$

[1]) Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche. Münchener Berichte 1921, S. 209—226.

die für Vektoren die Gestalt annimmt

$$5) \qquad \int_R \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_0 (\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df.$$

(2) und (5) geben dann

$$\int_R F \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R (\mathfrak{v}\nabla) F\, d\tau - \int_0 F(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df.$$

Diese Formel enthält nur skalare Elemente, nämlich div $\mathfrak{v}$, $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})$ und das Symbol $(\mathfrak{v}\nabla)$. Man kann daher für F auch einen Vektor, z. B. $\mathfrak{v}$ einsetzen und erhält

$$(5') \qquad \int_R \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\, d\tau - \int_0 \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df.$$

Nach (3) ist aber

$$\int_R (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}\, d\tau = -\int_R \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau + \tfrac{1}{2}\int_R \nabla \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

und nach (4)

$$\int_R \nabla \mathfrak{v}^2\, d\tau = -\int_0 \mathfrak{v}^2\, \mathfrak{n}\, df.$$

Durch Verwendung aller dieser Beziehungen erhält man[1])

$$(6) \qquad \mathfrak{P}_0 = \frac{\varrho}{2}\int_0 \mathfrak{v}^2\, \mathfrak{n}\, df = \varrho\left\{\int_0 \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df + \int_R \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \int_R \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau\right\}.$$

Wendet man diese Formel auf die Strömung im Innern einer geschlossenen Fläche F an (inneres Problem) und beachtet, daß an der Oberfläche $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{n}$ senkrecht steht, also $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})$ gleich Null ist, so folgt

[1]) Lagally, a. a. O., S. 211 steht die entsprechende mit einer Dyade behaftete Formel (3). Unseren Formeln (4) und (8) entsprechen bei Lagally (4) und (9).

$$\mathfrak{P}_F = \varrho \int_R \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau - \varrho \int_R \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau, \tag{7}$$

womit der Druck auf singuläre Stellen zurückgeführt und seine Unabhängigkeit von der Gestalt der Fläche erwiesen ist.

Um den Druck auf eine umströmte Fläche zu berechnen (äußeres Problem), dient die Formel, die aus (6) folgt:

$$\mathfrak{P}_F = -\mathfrak{P}_K + \varrho \int_K \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df + \varrho \int_Z \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}\, d\tau$$
$$- \varrho \int_Z \mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau.$$

Hierin bedeutet Z den Zwischenraum zwischen F und einer F umschließenden Kugel K,

$$\mathfrak{P}_K = \frac{\varrho}{2} \int_K v^2\, \mathfrak{n}\, df$$

den Innendruck auf die Kugelfläche.

Um $\mathfrak{P}_F$ zu berechnen, bedürfen wir also noch des Wertes von

$$-\tfrac{1}{2} \int_K v^2\, \mathfrak{n}\, df + \int_K \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\, df.$$

Die Kugel K (Radius r) soll so groß gewählt werden, daß die Singularitäten im Innern liegen, und die Geschwindigkeit soll in der Umgebung von $r^{-1} = 0$, also im Unendlichen, das Potential besitzen

$$\varphi = a x + A_1 r^{-1} + A_2 r^{-2} + \cdots,$$

dabei ist dann a die rein translatorische, zur x-Achse parallele Geschwindigkeit im Unendlichen.

Um nun anzudeuten, daß wir für K eine Kugel mit unbegrenzt wachsendem Radius nehmen, schreiben wir R für r. In den Flächenintegralen sind dann Glieder von der Ordnung R^{-3} zu vernachlässigen.

Führt man nun noch Polarkoordinaten ein, setzt also

$$x = R \cos \vartheta\,, \quad y = R \sin \vartheta \cos \varphi, \quad z = R \sin \vartheta \sin \varphi,$$

so wird das Oberflächenelement der Kugel

$$df = R^2\, d\omega = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

ferner

$$\mathfrak{n} = -\,i\cos\vartheta - j\sin\vartheta\cos\varphi - k\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$\mathfrak{v} = i\,a - A_1 R^{-2}(i\cos\vartheta + j\sin\vartheta\cos\varphi + k\sin\vartheta\sin\varphi),$$

$$v^2 = a^2 - 2\,a A_1 \cos\vartheta\, R^{-2},$$

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}) = -\,a\cos\vartheta + A_1 R^{-2},$$

also

$$-\tfrac{1}{2} v^2 \mathfrak{n} + \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}) = i\left(\frac{a^2}{2}\cos\vartheta + a A_1 R^{-2}\right) + \cdots$$

Alle weiteren Glieder sind von der Ordnung R^{-3} oder fallen wegen des Faktors $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$ bei der Integration über die Kugelfläche fort.

Demnach bleibt nur

$$-\tfrac{1}{2}\int_K v^2\,\mathfrak{n}\,df + \int_K \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\,df = a A_1 R^{-2}\int R^2\,d\omega = 4\pi a A_1$$

und daher

$$(8)\qquad \mathfrak{P}_F = 4\pi a A_1 + \varrho\int \mathfrak{v}\,\operatorname{div}\mathfrak{v}\,d\tau - \varrho\int \mathfrak{v}\times\operatorname{curl}\mathfrak{v}\,d\tau,$$

wobei nunmehr die Integrale über den ganzen Außenraum zu erstrecken sind.

Ist insbesondere $\operatorname{div}\mathfrak{v} = \operatorname{curl}\mathfrak{v} = 0$ und außerdem $A_1 = 0$, also die Geschwindigkeit im Unendlichen von höherer als der zweiten Ordnung translatorisch, so erhält man den bekannten, aber, wie es scheint, zuerst von Lagally wirklich bewiesenen Satz, daß der Flüssigkeitsdruck einer singularitätenfreien translatorischen Strömung auf eine geschlossene Fläche die Resultante Null ergibt, ein Moment kann noch übrig bleiben. Ich darf hier mitteilen, daß der Beweis dieses Satzes von F. Klein in einer Vorlesung als sehr wichtige Aufgabe bezeichnet worden ist.

Man kannte bisher wohl nur einzelne Beispiele, unter denen die translatorische Umströmung der Kugel vom Radius c, berechnet aus dem Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = a x \left(1 + \frac{c^3 r^{-3}}{2}\right),$$

also mit der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = i a \left(1 + \frac{c^3 r^{-3}}{2}\right) - 3 \frac{a c^3 x r^{-5}}{2} (i x + j y + k z),$$

$$(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) = a x \left(1 + \frac{c^3 r^{-3}}{2} - \frac{3 c^3 r^{-3}}{2}\right),$$

die auf der Kugel

$$\mathfrak{v} = i x + j y + k z, \qquad \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = c^2$$

tangentiale Richtung hat, das bekannteste ist.

In derselben Weise kann auch das Moment des Flüssigkeitsdruckes berechnet werden. Mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen wir jetzt die Strecken vom Bezugspunkt nach den Elementen der Fläche bzw. der Flüssigkeit und erhalten dann zunächst

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{\varrho}{2} \int_0 v^2\, \mathfrak{r} \times \mathfrak{n}\, df. \tag{9}$$

Wir formen nun um mit Hilfe einer zuerst von A. Föppl aufgestellten, (4) und (5) an die Seite tretenden Beziehung

$$\int_K \operatorname{curl} \mathfrak{v}\, d\tau = - \int_0 \mathfrak{v} \times \mathfrak{n}\, df, \tag{10}$$

und erhalten

$$\mathfrak{M}_0 = - \frac{\varrho}{2} \int \operatorname{curl} v^2\, \mathfrak{r}\, d\tau.$$

Beachtet man, daß in

$$\operatorname{curl} v^2\, \mathfrak{r} = v^2 \operatorname{curl} \mathfrak{r} + \nabla v^2 \times \mathfrak{r}$$

das erste Glied rechts gleich Null ist, so erhält man

$$\mathfrak{M}_0 = - \frac{\varrho}{2} \int_K \nabla v^2 \times \mathfrak{r}\, d\tau. \tag{11}$$

Dieses Integral soll dann wieder aufgespalten werden in Raumintegrale, die nur curl $\mathfrak{v}$ und div $\mathfrak{v}$ enthalten und ein Flächenintegral. Diese Aufgabe läßt sich mit wenigen Schritten durchführen.

Aus (3) folgt durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{r}$

$$\tfrac{1}{2} \bigtriangledown v^2 \times \mathfrak{r} = (\mathfrak{v} \bigtriangledown) \mathfrak{v} \times \mathfrak{r} + (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}$$

und der Formel (5') tritt an die Seite

$$\int_R \operatorname{div} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} \, d\tau = - \int_R (\mathfrak{v} \bigtriangledown) (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \, d\tau - \int_0 (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) (\mathfrak{v}\, \mathfrak{n}) \, df.$$

Durch Zusammensetzung erhält man dann, der Formel (6) genau entsprechend:

$$\mathfrak{M}_0 = \varrho \Big\{ \int_0 (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) (\mathfrak{v}\, \mathfrak{n}) \, df + \int_R (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \int_R (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}) \times \mathfrak{r} \, d\tau \Big\}. \tag{12}$$

Betrachten wir jetzt die Strömung im Innern einer Fläche F, so ist wieder auf der Fläche $(\mathfrak{v}\, \mathfrak{n})$ gleich Null, so daß sich, entsprechend (7) das Moment ergibt

$$\mathfrak{M}_F = \varrho \{ \int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \int (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}) \times \mathfrak{r} \, d\tau \}. \tag{13}$$

Die Integrale sind über den Innenraum zu erstrecken, und wieder erkennt man, daß nur die Gebiete, in denen Divergenz und curl von Null verschieden sind, Beiträge liefern.

Um auch die umströmte Fläche zu behandeln, wobei wir, wie oben die Geschwindigkeit „im Unendlichen translatorisch" nehmen, haben wir zunächst entsprechend der nach (7) folgenden Formel

$$\mathfrak{M}_F = - \mathfrak{M}_K + \varrho \Big(\int_K (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) (\mathfrak{v}\, \mathfrak{n}) \, df + \int_Z (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v}) \operatorname{div} \mathfrak{v} \, d\tau - \int_Z (\mathfrak{v} \times \operatorname{curl} \mathfrak{v}) \times \mathfrak{r} \, d\tau \Big).$$

Als Bezugspunkt nehmen wir jetzt den Mittelpunkt der Kugel K vom Radius R und lassen R unbegrenzt wachsen. $\mathfrak{M}_K$ ist gleich Null, weil der Druck auf die Flächenelemente der Kugel die Richtung nach dem Bezugspunkt hat. Es bleibt dann noch das erste in der Klammer stehende Integral zu untersuchen; dabei ist wieder $\mathfrak{v}$ aus dem Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = a\,x + A_1 r^{-1} + A_2 r^{-2} + \cdots$$

abzuleiten. A_1 soll nach oben getroffener Festsetzung eine Konstante sein.

Ferner ist, wie oben gezeigt, auf der Kugel

$$\begin{aligned}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}) &= -a\cos\vartheta + A_1 R^{-2} + \cdots,\\ \mathfrak{v} &= i\,a - A_1 R^{-2}(i\cos\vartheta + j\sin\vartheta\cos\varphi\\ &\qquad + k\sin\vartheta\cos\varphi) + \cdots,\end{aligned}$$

also wegen

$$\begin{aligned}\mathfrak{r} &= R(i\cos\vartheta + j\sin\vartheta\cos\varphi + k\sin\vartheta\sin\varphi),\\ \mathfrak{v}\times\mathfrak{r} &= a\,R(k\sin\vartheta\cos\varphi - j\sin\vartheta\sin\varphi) + R^{-2}(\cdot\,\cdot) + \cdots\end{aligned}$$

Bei der Integration über die Kugeloberfläche K, also bei der Bildung von

$$\int_K (\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{n})\,df$$

kommt es nun wesentlich darauf an, ob auch A_2 eine Konstante (und nicht eine homogene Funktion nullter Ordnung von x, y, z) ist. Während im zweiten Fall der Wert des Integrals wesentlich abhängt von der Gestalt dieser Funktion, wird im ersten Fall das Integral bei unbeschränkt wachsendem R zu Null.

Wir haben also das weitere Ergebnis:

Unter der Voraussetzung, daß das Geschwindigkeitspotential in der Umgebung von $\frac{1}{r} = 0$ sich in der Form darstellen läßt

$$\varphi = a\,x + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \cdots,$$

wobei A_1 und A_2 Konstanten sind, gilt:

$$(14)\quad \mathfrak{M}_F = \varrho\,(\int (\mathfrak{r} \times \mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\,d\tau - \int (\mathfrak{v} \times \mathrm{curl}\,\mathfrak{v}) \times \mathfrak{r}\,d\tau).$$

Dabei sind die Integrale über den gesamten Außenraum der Fläche zu erstrecken. Diese Formel tritt (8) an die Seite und ist frei von A_1.