

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I

Januar- bis März-sitzung

München 1922

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Trigonometrie im nicht-euklidischen Raume.

Von F. Lindemann.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. März 1922.

1. Die trigonometrischen Formeln der nicht-euklidischen Geometrie (und damit auch diejenigen der sphärischen Trigonometrie) beruhen auf zwei algebraischen Identitäten. Ist

$$\Omega_{xx} = 0 \text{ oder } a_x^2 \equiv b_x^2 \equiv c_x^2 \equiv \dots = 0$$

die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in Punktkoordinaten, so ist

$$\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Linie x - y Tangente an $\Omega_{xx} = 0$ sei, die linke Seite also mit $(abu)^2$ wesentlich identisch. In der Tat sei $u_i = (xy)_i$, so wird

$$(1) \quad \begin{aligned} (abu)^2 &= (a_x b_y - b_x a_y)^2 = 2 a_x^2 b_y^2 - 2 a_x a_y b_x b_y \\ &= 2 (\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2). \end{aligned}$$

Geht man umgekehrt von der Gleichung in Linienkoordinaten aus und setzt

$$\psi_{uu} = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = (abu)^2,$$

so ist, wenn $x_i = (uv)$ die Koordinaten des Schnittpunktes von u und v sind:

$$(2) \quad \begin{aligned} 2(\psi_{uu} \psi_{vv} - \psi_{uv}^2) &= (u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta)^2 = (a\beta x)^2 \\ &= 2 a_\beta^2 b_x^2 - 2 a_\beta b_\beta a_x b_x = 2 A \cdot b_x^2 - 2(acd)(bcd) a_x b_x = \frac{4}{3} A \cdot a_x^2{}^1), \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. Identität (3) auf S. 286 in Bd. I von Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, 1. Aufl.

wenn $A = (abc)^2$ die Invariante der Kurve bezeichnet. Ist nun u die Verbindungslinie der Punkte x und y , v diejenige der Punkte x und z , also: $u_i = (xy)_i$, $v_i = (xz)_i$, so wird

$$(3) \quad 2(\Psi_{uu}\Psi_{vv} - \Psi_{uv}^2) = [(axy)(\beta xz) - (axz)(\beta xy)]^2 \\ = (xyz)^2 (\alpha\beta x)^2 = \frac{4}{3} A \cdot (xyz)^2 \cdot \alpha_x^2.$$

Bezeichnen wir mit x, y, z die Ecken eines Dreiecks, mit u, v, w die gegenüber liegenden Seiten, mit $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ die Winkel, mit r_x, r_y, r_z die entsprechenden Seiten, so ist bekanntlich:

$$\cosin \frac{r_x}{k} = \frac{\Omega_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}, \cosin \frac{r_y}{k} = \frac{\Omega_{zx}}{\sqrt{\Omega_{zz}\Omega_{xx}}}, \cosin \frac{r_z}{k} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}, \\ \cosin \frac{\varphi_x}{k'} = \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}, \cosin \frac{\varphi_y}{k'} = \frac{\Psi_{wu}}{\sqrt{\Psi_{ww}\Psi_{uu}}}, \cosin \frac{\varphi_z}{k'} = \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\Psi_{vv}}},$$

also:

$$\sin \frac{r_x}{k} = \frac{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2}}{\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\sqrt{\Psi_{uu}}}{\sqrt{2\Omega_{yy}\Omega_{zz}}}, \\ \sin \frac{\varphi_x}{k'} = \frac{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww} - \Psi_{vw}^2}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}} = \frac{(xyz)\sqrt{2A \cdot \Omega_{xx}}}{\sqrt{3\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}$$

und folglich:

$$\frac{\sin \frac{r_x}{k}}{\sin \frac{\varphi_x}{k'}} = \frac{\sqrt{3\Psi_{uu}\Psi_{vv}\Psi_{ww}}}{\sqrt{2A\Omega_{xx}\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\sin \frac{r_y}{k}}{\sin \frac{\varphi_y}{k'}} = \frac{\sin \frac{r_z}{k}}{\sin \frac{\varphi_z}{k'}},$$

womit der Sinus-Satz gewonnen ist. Für den Cosinus-Satz benutzen wir die weitere Identität:

$$\Psi_{uv} = u_\alpha v_\alpha = (abu)(abv) = (a_x b_y - b_x a_y)(a_x b_z - b_x a_z) \\ = 2(\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}\Omega_{xz}), \\ \cosin \frac{r_y}{k} \cdot \cosin \frac{r_z}{k} + \cosin \frac{\varphi_x}{k} \cdot \sin \frac{r_y}{k} \cdot \sin \frac{r_z}{k} = \frac{\Omega_{zx}\Omega_{xy}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} \\ + \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv}\Psi_{ww}}} \cdot \frac{\sqrt{\Omega_{vv}\Omega_{ww}}}{2\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \frac{\Omega_{xx}\Omega_{yz}}{\Omega_{xx}\sqrt{\Omega_{yy}\Omega_{zz}}} = \cosin \frac{r_x}{k},$$

und entsprechend für den andern Winkel. Auf demselben Wege erhält man die sphärische Trigonometrie der euklidischen Kugel, indem man die Punkte der Ebene durch das Strahlenbündel der Kugeldurchmesser, den Kegelschnitt $\Omega_{xx} = 0$ durch den Asymptotenkegel der Kugel nach dem Prinzip der Dualität ersetzt.

2. Die Trigonometrie auf einer nicht-euklidischen Kugel ergibt sich in folgender Weise. Ist $\Omega_{xx} = 0$ jetzt die Fundamentalfläche des Raumes und y der Mittelpunkt der Kugel mit Radius r , so ist die Gleichung derselben:

$$(4) \quad \Omega_{xx} \Omega_{yy} \cdot \cos^2 \frac{r}{k} - \Omega_{xy}^2 = 0.$$

Zwei in der Diametralebene u liegende Gerade, die außerdem bzw. in der Ebene v und v' liegen, bilden einen Winkel φ , bestimmt durch

$$(5) \quad \cos \frac{\varphi}{k'} = \frac{(abu)(abuv')}{V(abuv)^2 \cdot (abuv')^2},$$

wenn $\Omega = a_x^2 = b_x^2 \dots$. Wird die Kugel von den Linien bzw. in den Punkten z und t geschnitten und bezeichnet τ einen beliebigen Punkt der Schnittlinie von v und v' , so kann man setzen:

$$u_i = (yzt)_i, \quad v_i = (yzt)_i, \quad v_i = (yzt)_i,$$

und dann wird, da $u_y = 0, u_z = 0$:

$$(abu) = \begin{vmatrix} a_y & a_z & a_\tau \\ b_y & b_z & b_\tau \\ u_y & u_z & u_\tau \end{vmatrix} = u_\tau \cdot (a_y b_z - b_y a_z) = (yzt\tau) (a_y b_z - b_y a_z),$$

also:

$$(6) \quad \begin{aligned} (abu)(abuv') &= (yzt\tau) \cdot 2(\Omega_{yy} \Omega_{zt} - \Omega_{yz} \Omega_{yt}), \\ (abu)^2 &= 2(yzt\tau)^2 (\Omega_{yy} \Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2), \\ (abuv')^2 &= 2(yzt\tau)^2 (\Omega_{yy} \Omega_{tt} - \Omega_{yt}^2), \\ \cos \frac{\varphi}{k'} &= \frac{\Omega_{yy} \Omega_{zt} - \Omega_{yz} \Omega_{yt}}{V(\Omega_{yy} \Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2)(\Omega_{yy} \Omega_{tt} - \Omega_{yt}^2)} \\ &= \left(\cotang \frac{r}{k} \right)^2 \frac{\Omega_{yy} \Omega_{zt} - \Omega_{yz} \Omega_{yt}}{\Omega_{yz} \Omega_{yt}} = \frac{\mathfrak{B}_{zt}}{V\mathfrak{B}_{zz} \cdot \mathfrak{B}_{tt}}, \end{aligned}$$

wenn $\mathfrak{S}_{xx} = \Omega_{yy} \Omega_{xx} - \Omega_{xy}^2$ die linke Seite der Gleichung des Asymptotenkegels bezeichnet. Der Winkel ψ zweier Diametralebenen v, w ist bestimmt durch

$$(7) \quad \cos \frac{\psi}{k'} = \frac{\Psi_{vw}}{\sqrt{\Psi_{vv} \Psi_{ww}}} = \frac{(abc v)(abc w)}{\sqrt{(abc v)^2 \cdot (def w)^2}}.$$

Andererseits berühren die beiden zur Bestimmung des den Winkel definierenden Doppelverhältnisses dienenden Ebenen, die durch den Schnitt von v und w gehen, auch den Kegel $\mathfrak{S}_{xx} = 0$ und den Kegelschnitt, in dem dieser Kegel die Fläche $\Omega_{xx} = 0$ berührt. Die Gleichung des letzteren in Ebenenkoordinaten u ist

$$P_{uu} \equiv 2(u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\alpha u_\beta v_\alpha v_\beta) \equiv (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)^2 = 0,$$

wenn $v_i = c_i c_y = d_i d_y$ gesetzt wird; es ist:

$$\begin{aligned} (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)^2 &= (u_\alpha c_\beta - u_\beta c_\alpha)(u_\alpha d_\beta - u_\beta d_\alpha) c_y d_y \\ &= 2(u_\alpha^2 c_\beta d_\beta c_y d_y - u_\alpha u_\beta c_\alpha d_\beta c_y d_y). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} c_\beta d_\beta c_y d_y &= \frac{1}{4} (cabe) d_y [(dabe) c_y - (dabc) e_y - (dace) b_y - (dcbe) a_y] \\ &= \frac{1}{4} (cabe)^2 d_y^2 = \frac{1}{4} A \cdot \Omega_{yy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\beta u_\alpha c_\alpha d_\beta c_y d_y &= (abc u)(fgh u)(abc c)(fgh d) c_y d_y \\ &= \frac{1}{4} (abc u)(abc c) c_y (fgh d)^2 u_y \\ &= \frac{1}{16} (abc c)^2 (fgh d)^2 u_y^2 = \frac{1}{16} A^2 \cdot u_y^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} P_{uu} &= \frac{1}{2} A \cdot \Omega_{yy} \cdot (abc u)^2 - \frac{1}{8} A^2 u_y^2, \\ P_{uv} &= \frac{1}{2} A \cdot \Omega_{yy} \cdot (abc u)(abc v) - \frac{1}{8} A^2 u_y v_y. \end{aligned}$$

Da nun $v_y = 0$ und $w_y = 0$ ist, so folgt:

$$\cos \frac{\psi}{k'} = \frac{P_{vw}}{\sqrt{P_{vv} P_{ww}}} = \frac{(abc v)(abc w)}{\sqrt{(abc v)^2 \cdot (abc w)^2}},$$

wie in (7), wodurch das geometrisch evidente Resultat auch rechnerisch bestätigt wird. Zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke gelten also in der nicht-euklidischen Geometrie dieselben Formeln wie zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreiecks (oder des euklidischen sphärischen Dreiecks).

3. Um den Winkel φ durch einen Bogen auf der nicht-euklidischen Kugel zu ersetzen, müssen wir allgemein den Bogen einer Kurve durch den zugehörigen Zentriwinkel ausdrücken. Das Quadrat des Bogenelementes ist allgemein

$$(8) \quad \frac{ds^2}{k^2} = \frac{\Omega_{xx} \Omega_{dx dx} - \Omega_{x dx}^2}{\Omega_{xx}^2}$$

und das Quadrat des unendlich kleinen Winkels der Linien u und $u + du$

$$(9) \quad \frac{d\varphi^2}{k'^2} = \frac{\Psi_{uu} \Psi_{du du} - \Psi_{u du}^2}{\Psi_{uu}^2},$$

wo $\Omega = 0$ und $\Psi = 0$ die Gleichungen des Fundamentalkegelschnittes in Punkt- bzw. Linienkoordinaten seien. Die Gleichung des Kreises mit dem Zentrum y und dem Radius r ist:

$$(10) \quad R \cdot \Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0, \text{ wo } R = \cos^2 \frac{r}{k},$$

und die Differentiale genügen der Bedingung:

$$(11) \quad R \cdot \Omega_{x dx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy} \Omega_{y dx} = 0$$

Nach (1), (10) und (11) haben wir, wenn zur Abkürzung $dx_i = z_i$, $du_i = w_i$ gesetzt wird:

$$\Psi_{uu} = 2(\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2) = 2(1 - R) \Omega_{xx} \Omega_{yy},$$

$$\Psi_{ww} = 2(\Omega_{yy} \Omega_{zz} - \Omega_{yz}^2) = \frac{2 \Omega_{yy}}{\Omega_{xx}} (\Omega_{xx} \Omega_{zz} - R \Omega_{xz}^2),$$

$$\Psi_{uw} = 2(\Omega_{xz} \Omega_{yy} - \Omega_{xy} \Omega_{yz}) = 2(1 - R) \Omega_{yy} \Omega_{xz},$$

folglich:

$$\frac{d\varphi^2}{k'^2} = \frac{\Omega_{xx} \Omega_{zz} - \Omega_{xz}^2}{\Omega_{xx}^2 (1 - R)} = \frac{ds^2}{k^2} \frac{1}{1 - R},$$

oder:

$$\frac{ds^2}{k^2} = \frac{d\varphi^2}{k'^2} (R - 1)^2 = \frac{d\varphi^2}{k'^2} \left(\sin \frac{r}{k} \right)^2,$$

womit die bekannte Formel zwischen Bogenelement eines Kreises und zugehörigem Zentriwinkel erhalten ist:

$$\frac{s}{k} = \sin \frac{r}{k} \cdot \frac{\varphi}{k'},$$

und der in (5) berechnete Winkel zwischen den Strahlen $y-z$ und $y-t$ kann durch einen Bogen auf der Kugel (4) ersetzt werden, so daß auf der nicht-euklidischen Kugel dieselben trigonometrischen Formeln gelten wie auf der euklidischen Kugel.

4. Die angewandte Methode ist besonders geeignet, die Sätze über die Höhenlothe und die Mittellinien eines Dreiecks abzuleiten; es ist das schon von Coolidge geschehen¹⁾, weshalb wir darauf nicht mehr eingehen.

¹⁾ The Elements of non-euclidean geometry, Oxford 1902.