Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft II
Mai- bis Juli- und November- u. Dezembersitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Flächen mit gemeinsamem sphärischen Bilde der Krümmungslinien.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 2. Juli 1921.

Das Problem der Bestimmung aller Flächen, deren Krümmungslinien dasselbe sphärische Bild ergeben wie die Krümmungslinien einer gegebenen Fläche, ist von Darboux in Bd. 4 seiner Leçons de géométrie eingehend behandelt und auf die Integration einer Laplaceschen partiellen Differentialgleichung mit gleichen Invarianten zurückgeführt. Zu einer andersartigen Lösung des Problems kommt man durch Anwendung der Methoden, welche ich kürzlich in einer Abhandlung über die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche[1]) entwickelt habe und die im wesentlichen auf einer Darstellung der Koordinaten der Flächenpunkte durch die Parameter der Minimalkurven beruhen. Nach Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung, durch welche die Minimalkurven bestimmt werden, ist zur Lösung noch die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung nötig, die von einer willkürlichen Funktion abhängt. Damit ist auch die Lösung einer jeden Laplaceschen Gleichung mit gleichen Invarianten auf eine solche partielle Gleichung erster Ordnung reduziert, sobald drei partikuläre Lösungen der Laplaceschen Gleichung bekannt sind.

[1]) Vgl. Abhandlungen der Bayer. Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, Bd. 29, 3. Abhandlung, München 1921. Diese Arbeit wird im folgenden kurz als „Abhandlung" zitiert.

Dieselbe Methode läßt sich anwenden, um alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien dasselbe sphärische Bild geben, wie ein auf einer gegebenen Fläche vorgegebenes Kurvensystem (z. B. das System der Haupttangentenkurven).

1. Sind auf einer gegebenen Fläche α, β die Parameter der Minimalkurven, so lassen die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche (vgl. die Gleichungen (17) meiner Abhandlung) sich in folgender Form darstellen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= i\int [W_\alpha \sin\lambda\, d\alpha - W_\beta \cos\mu\, d\beta],\\ y &= i\int [W_\alpha \sin\lambda\, d\alpha - W_\beta \sin\mu\, d\beta],\\ z &= \int [W_\alpha\, d\alpha + W_\beta\, d\beta] = W. \end{aligned}$$

Die Gleichungen $\lambda = \text{Const.}$ und $\mu = \text{Const.}$ stellen auf der Fläche diejenigen Kurven dar, welche bei der sphärischen Abbildung in die Minimalgeraden der Kugel übergehen. Es ist, wenn $\omega = \lambda - \mu$ gesetzt wird:

$$(2)\qquad \lambda_\beta = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta}, \qquad \mu_\alpha = -\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha},$$

also auch, wenn $W_{\alpha\beta}$ nicht verschwindet:

$$(3)\qquad \lambda_\beta\cdot W_\alpha = -\mu_\alpha W_\beta.$$

Nach Gleichung (26) der Abhandlung werden die Krümmungslinien der Fläche (1) durch die Gleichung

$$(3\text{a})\qquad W_\beta\,\mu_\beta\, d\beta^2 + W_\alpha\,\lambda_\alpha\, d\alpha^2 = 0$$

gegeben, oder wegen (3):

$$(4)\qquad \lambda_\beta\,\mu_\beta\, d\beta^2 - \lambda_\alpha\,\mu_\alpha\, d\alpha^2 = 0.$$

Wir stellen eine zweite Fläche dar durch die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_1 &= i\int [\Omega_\alpha\cdot\operatorname{cosin}\Phi\cdot d\alpha - \Omega_\beta\cdot\cos\Psi\cdot d\beta],\\ y_1 &= i\int [\Omega_\alpha\cdot\sin\Phi\quad\cdot d\alpha - \Omega^\beta\cdot\sin\Psi\cdot d\beta],\\ z_1 &= \int [\Omega_\alpha\, d\alpha + \Omega_\beta\, d\beta], \end{aligned}$$

wo Φ und Ψ Funktionen von α und β bedeuten, und wo:

$$(6)\qquad \Phi_\beta = \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg\Omega_\alpha}{\partial\beta},\quad \Psi_\alpha = -\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg\Omega}{\partial\alpha},\quad w = \Phi - \Psi.$$

Das sphärische Bild der Fläche (1) ist gegeben durch:

$$(7)\quad X = \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda + \mu)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda - \mu)}, \quad Y = \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda + \mu)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda - \mu)}, \quad Z = i \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\lambda - \mu),$$

und dasjenige der Fläche (5) durch:

$$(8)\quad X_1 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)}{\cos \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)}, \quad Y_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)}{\cos \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)}, \quad Z_1 = i \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\Phi - \Psi).$$

2. Es soll nun das sphärische Bild der Krümmungslinien der Fläche (1) identisch sein mit dem sphärischen Bilde der Krümmungslinien der Fläche (5). Das erstere Bild wird durch die Gleichungen (7) gegeben, wenn zwischen α und β diejenige Relation besteht, welche sich aus dem Integrale der Gleichung (4) ergibt. Führt man statt α, β die Größen λ, μ als neue Variable ein, so geht diese Relation in eine solche zwischen λ und μ über, für welche dann das sphärische Bild direkt durch (7) geliefert ist. Diese Relation gewinnt man auch, wenn man die Differentialgleichung (4) in Variabeln λ, μ schreibt, und sodann integriert. Die transformierte Differentialgleichung (4) wird von der Form:

$$(9)\qquad d\lambda - f(\lambda, \mu)\, d\mu = 0.$$

Für die Krümmungslinien der zweiten Fläche ergibt sich dasselbe sphärische Bild, wenn die Differentialgleichung von der Form

$$(10)\qquad d\Phi - f(\Phi, \Psi)\, d\Psi = 0$$

wird, während letztere Gleichung ursprünglich in der zu (4) analogen Form

$$\Phi_\beta \Psi_\beta\, d\beta^2 - \Phi_\alpha \Psi_\alpha\, d\alpha^2 = 0$$

erscheint. Sollen die beiden sphärischen Bilder identisch sein, so ergibt sich:

$$\Phi_\alpha - f \cdot \Psi_\alpha = m \sqrt{\Phi_\alpha \Psi_\alpha}, \quad \Phi_\beta - f \cdot \Psi_\beta = m \sqrt{\Phi_\beta \Psi_\beta},$$

und hieraus:

$$(\Phi_\alpha - f \cdot \Psi_\alpha)^2\, \Phi_\beta \Psi_\beta - (\Phi_\beta - f \cdot \Psi_\beta)^2\, \Phi_\alpha \Psi_\alpha = 0$$

oder, da die Funktionaldeterminante $\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha$ nur bei abwickelbaren Flächen verschwinden:

$$\Phi_\alpha \Phi_\beta - f^2 \cdot \Psi_\alpha \Psi_\beta = 0. \tag{11}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die eine der beiden Funktionen Φ, Ψ als Funktion von α, β bestimmt, wenn die andere gegeben ist. Hat man sie gelöst, so findet man Ω aus den Gleichungen (6), und damit ist nach (5) die allgemeinste Fläche gefunden, deren Krümmungslinien dasselbe sphärische Bild haben wie die Krümmungslinien der gegebenen Fläche (1).

Es ist noch zu erörtern, ob die Gleichungen (6) eine gemeinsame Lösung Ω zulassen. Nach Gleichung (16) meiner Abhandlung folgt aus ihnen die weitere Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \log \Omega_\alpha}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \log \Omega_\beta}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta}.$$

Da α und β konjugiert imaginär sind, ω rein imaginär ist, hat diese Gleichung sicher reelle Lösungen Ω, und somit gilt das gleiche auch für die Gleichungen (6), wo Φ und Ψ konjugiert imaginär werden, wenn Ω reell ist. Dementsprechend sind die Lösungen der Gleichung (11) zu wählen. Man kann letztere in der Form

$$(R + iS)\,\Phi_\alpha \Phi_\beta - (R - iS)\,\Psi_\alpha \Psi_\beta = 0 \tag{12}$$

schreiben, wo R und S reelle Funktionen von Φ und Ψ bezeichnen. Sei nun

$$\Phi = U + iV, \quad \Psi = U - iV, \quad p = \alpha + \beta, \quad iq = \alpha - \beta,$$

wo U, V, p, q reell sind, so geht (12) über in:

$$2R(U_p V_p + U_q V_q) + S(U_p^2 + U_q^2 - V_p^2 - V_q^2) = 0. \tag{13}$$

Hierdurch ist dann V bestimmt, wenn U als willkürliche Funktion von p und q gegeben wird.

3. In gleicher Weise kann man eine Fläche (5) so bestimmen, daß das sphärische Bild ihrer Haupttangenten-Kurven mit dem sphärischen Bilde der Haupttangenten-Kurven von (1) zusammenfällt. Man hat nur die Differentialgleichung

$$W_\alpha \, d\lambda \, d\alpha - W_\beta \, d\mu \, d\beta = 0 \text{ oder } \mu_\alpha \, d\lambda \, d\alpha + \lambda_\beta \, d\mu \, d\beta = 0$$

der Haupttangenten-Kurven durch Einführung der Variabeln λ, μ auf die Form (9), d. i.

$$d\lambda - f_1(\lambda, \mu)\, d\mu = 0$$

zu transformieren. Es muß dann die Differentialgleichung

$$d\Phi - f_1(\Phi, \Psi)\, d\Psi = 0$$

mit der Gleichung

$$\Psi_\alpha \, d\Phi \, d\alpha + \Phi_\beta \, d\Psi \, d\beta = 0$$

identisch sein; und die Elimination von $d\alpha : d\beta$ ergibt

$$\Phi_\alpha \Psi_\alpha (\Phi_\beta - f_1 \Psi_\beta)^2 - 2\Phi_\beta \Psi_\alpha (\Phi_\beta - f_1 \Psi_\beta)(\Phi_\alpha - f_1 \Psi_\alpha) \\ + \Phi_\beta \Psi_\alpha (\Phi_\alpha - f_1 \Psi_\alpha)^2 = 0$$

oder entwickelt:

$$(\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha)\,[\Phi_\alpha \Phi_\beta + f_1^2 \Psi_\alpha \Psi_\beta] = 0\,.$$

Hieraus sind Φ und Ψ als Funktionen von α und β zu bestimmen, und dann findet man Ω wieder aus (6).

Ersetzt man in (11) die mittels (9) definierte Funktion $f(\Phi, \Psi)$ durch die jetzige Funktion f_1, so ist das sphärische Bild der Krümmungslinien der Fläche (5) zugleich das sphärische Bild der Haupttangenten-Kurven der Fläche (1). Während die bekannte Liesche Transformation jeder Fläche eine andere so zuordnet, daß die Krümmungslinien der einen in die Haupttangenten-Kurven der andern übergehen, ergibt sich hier eine Transformation, die nur einer ganz bestimmten Fläche unendlich viele andere Flächen in solcher Weise zuordnet. Es ist zu beachten, daß man nach einem Satze von Dini das sphärische Bild der Haupttangenten-Kurven nicht beliebig wählen darf.

In ähnlicher Weise kann man die Aufgabe behandeln, alle Flächen zu bestimmen, für welche das sphärische Bild der Krümmungslinien identisch ist mit dem sphärischen Bilde eines auf einer gegebenen Fläche definierten Kurvensystems und umgekehrt.

4. Die Bestimmung aller Flächen, welche mit einer gegebenen Fläche das sphärische Bild der Krümmungslinien gemein haben, wird sonst auf eine Laplacesche Gleichung mit gleichen Invarianten zurückgeführt, d. h. auf eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = k \cdot \Theta, \tag{14}$$

wo k eine gegebene Funktion von u und v bedeutet; die Variabeln u, v sind hier die Parameter der Krümmungslinien. Umgekehrt ist durch obige Entwicklung die Lösung der Gleichung (14) auf die partielle Gleichung erster Ordnung (11) zurückgeführt. Um dies näher zu verfolgen, müssen wir die betreffenden Untersuchungen von Darboux[1]) kurz mitteilen.

Die Gleichung der Tangentialebene der Kugel an einem Punkte des sphärischen Bildes ist nach (7):

$$\cos\frac{\lambda+\mu}{2} \cdot x + \sin\frac{\lambda+\mu}{2} \cdot y + i \sin\frac{\lambda-\mu}{2} \cdot z + \cos\frac{\lambda-\mu}{2} = 0,$$

also die Gleichung der parallelen Tangentialebene der gegebenen Fläche, wenn

$$\sigma = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \lambda, \qquad \tau = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} \mu \tag{15}$$

gesetzt und x durch z, y durch x, z durch y ersetzt wird, wie bei Darboux:

$$(\sigma + \tau) x + i (\tau - \sigma) y + (\sigma \tau - 1) z + \xi = 0, \tag{16}$$

wo ξ eine Funktion von σ und τ bezeichnet. Sind dann p, q die partiellen Differentialquotienten von ξ nach σ und τ, also

$$\xi = \int (p \, d\sigma + q \, d\tau),$$

so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$dp \, d\sigma - dq \cdot d\tau = 0. \tag{17}$$

Hat man diese integriert und bedeuten u, v die Parameter der Krümmungslinien, so bestehen Gleichungen der Form:

[1]) Vgl. a. a. O. t. IV, p. 21 ff. und 170 ff.

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= m^2 \frac{\partial \sigma}{\partial u}, & \frac{\partial p}{\partial u} &= m^2 \frac{\partial q}{\partial u}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= -m^2 \frac{\partial \sigma}{\partial v}, & \frac{\partial p}{\partial v} &= -m^2 \frac{\partial q}{\partial v}, \end{aligned}$$

wo m eine gewisse Lösung der Gleichung (14) bezeichnet; und letztere wird auch durch die Ausdrücke

$$m \cdot \sigma, \quad m \cdot \tau, \quad m \cdot p, \quad m \cdot q$$

befriedigt; sie kann also in der Form

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial u \partial v}$$

geschrieben werden. Ist die Fläche (1) gegeben, so sind σ, τ bekannt und m ist durch (18) bestimmt, also auch k bekannt. Ist aber k gegeben, d. h. soll eine Gleichung (14) mit gegebener Funktion k integriert werden, so hat man hiernach in folgender Weise zu verfahren.

Man suche drei partikuläre Lösungen

$$(19)\qquad \Theta_1 = m, \quad \Theta_2 = m\sigma, \quad \Theta_3 = mp$$

der vorgelegten Gleichung (14), bestimme ferner Funktionen q und τ mittels der Gleichungen (18). Damit sind σ und τ als Funktionen von u, v bekannt, also auch umgekehrt die Parameter u, v als Funktionen von σ und τ gegeben. Es handelt sich darum, die letzteren noch als Funktionen unserer Variabeln α, β darzustellen. Die von den Ebenen (16) umhüllte Fläche findet man durch Differenzieren nach σ, τ; es ergibt sich nach Darboux (a. a. O., Bd. 2, S. 246)

$$(20)\qquad \begin{gathered} z = \frac{\xi - p\sigma - q\tau}{1 + \sigma\tau}, \\ x + iy = -\frac{\tau(\xi - p\sigma - q\tau)}{1 + \sigma\tau} - p, \quad x - iy = -\frac{\sigma(\xi - p\sigma - q\tau)}{1 + \sigma\tau} - q, \end{gathered}$$

und das Quadrat ihres Linienelementes wird

$$ds^2 = (z\,d\sigma + dq)(z\,d\tau + dp) = 2F\,d\alpha\,d\beta.$$

Setzt man $dp = r\,d\sigma + s\,d\tau$, $dq = s\,d\sigma + t\,d\tau$, so hat man also die beiden Gleichungen

$$[\xi - p\sigma - q\tau + s(1+\sigma\tau)]\,d\sigma + t(1+\sigma\tau)\,d\tau = 0,$$
$$[\xi - p\sigma - q\tau + s(1+\sigma\tau)]\,d\tau + s(1+\sigma\tau)\,d\sigma = 0$$

zu integrieren und die Multiplikatoren zu bestimmen, welche die linken Seiten zu vollständigen Differentialen machen; dann wird α und β als Funktion von σ, τ bekannt, also auch umgekehrt σ, τ als Funktion von α, β. Damit ist nach (15) und (7) das sphärische Bild der Fläche (20) vollständig bekannt, und die Koordinaten ihrer Punkte können in der Form der Gleichungen (1) als Funktionen von α, β dargestellt werden, wobei statt σ, τ durch die Gleichungen (15) wieder λ, μ einzuführen sind, und W durch die Größe z der Gleichungen (20) zu ersetzen ist. Man hat jetzt die Differentialgleichung (4) der Krümmungslinien in der Form (9) darzustellen und die daraus hervorgehende partielle Gleichung (11) zwischen Φ und Ψ zu integrieren. Die allgemeinste Fläche, für welche das sphärische Bild der Krümmungslinien durch das Bild der Krümmungslinien der Fläche (1) gegeben ist, wird dann durch die Gleichungen (5) dargestellt, nachdem Ω durch (6) bestimmt ist. Setzt man noch $\sigma_1 = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\Phi$, $\tau_1 = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\Psi$, so erscheint diese Fläche, analog zu (16), als Enveloppe der Ebene

$$(\sigma_1 + \tau_1)x + i(\tau_1 - \sigma_1)y + (\sigma_1\tau_1 - 1)z + \xi_1 = 0,$$

wodurch auch ξ_1 bekannt ist.

Die Integration der Gleichung (14) geschieht schließlich in folgender Weise: Man definiere eine Funktion m_1 durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial u} = m_1^2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial v} = -m_1^2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial v},$$

dann ist

$$m_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}\right)^{-1}} = \sqrt{-\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}\right)^{-1}}$$

das allgemeinste Integral der Differentialgleichung (14); derselben Gleichung genügen auch die Ausdrücke

$$m_1\sigma_1, \quad m_1\tau_1, \quad m_1 p_1, \quad m_1 q_1,$$

wenn p_1 und q_1 die partiellen Differentialquotienten von ξ_1 nach σ_1 und τ_1 bezeichnen. Die Fläche (5) muß sich auch in der Form (20) darstellen lassen, wenn man alle vorkommenden Größen mit dem Index 1 versieht.

5. Bei den Untersuchungen von Darboux ist k eine komplexe Funktion der reellen Variabeln u, v; und reelle Flächen ergeben sich nur, wenn die Gleichung (14) eine Lösung von absolutem Betrage Eins zuläßt. Bei Darboux handelt es sich dann darum, alle Gleichungen der Form (14) zu bestimmen, die diesen Forderungen genügen. Bei unserer Untersuchung dagegen dachten wir k ganz beliebig gegeben; die ausgeführten Rechnungen sind unabhängig von irgend einer Beschränkung der Funktion k; sie geben immer die Lösung der partiellen Laplaceschen Gleichung (14), deren allgemeine Integration also geleistet werden kann, wenn man drei partikuläre Lösungen (19) derselben kennt.

Auf eine partielle Gleichung der Form (14) führt auch das Problem der unendlich kleinen Verbiegungen; vgl. § 14 der Abhandlung. Indem man von einer gegebenen Fläche ausgeht, setzt man auch bei diesem Problem partikuläre Lösungen als bekannt voraus, auf welche die allgemeine Lösung zurückgeführt wird.

6. Im Beispiel der Minimalflächen ist zu setzen (vgl. § 13 der Abhandlung):

$$W = A + B, \quad \lambda = 2\alpha, \quad \mu = 2\beta, \tag{21}$$

wenn A eine Funktion von α, B eine solche von β bedeutet. Die Krümmungslinien sind nach (3a) bestimmt durch:

$$B'\,d\beta^2 + A'\,d\alpha^2 = 0,$$

und hierin wären mittels (21) die Variabeln λ, μ statt α, β einzuführen. Handelt es sich um die Rotationsfläche der Kettenlinie, so ist $A = -ia\alpha$, $B = ia\beta$, wo a eine Konstante bezeichnet, und man erhält

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0, \text{ also auch } d\lambda^2 - d\mu^2 = 0.$$

In Gleichung (9) ist also $f = 1$ und in (13) $R = 1$, $S = 0$ zu nehmen, so daß die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

zu integrieren wäre, wenn U eine willkürlich gegebene reelle Funktion von $2\alpha = p + iq$ und $2\beta = p - iq$ bezeichnet. Die Gleichung der Charakteristiken wird

$$\frac{dp}{U_p} = \frac{dq}{U_q} = \frac{dV}{0}.$$

Ist z. B. $U = \varphi(p+q)$ nur von $p+q$ abhängig, so wird $V = \varphi_1(p-q)$, wo φ und φ_1 willkürliche Funktionen bezeichnen, und

$$\Phi = \varphi(p+q) + i\varphi_1(p-q) = \varphi(\alpha + \beta - i(\alpha - \beta)) \\ + i\varphi_1(\alpha + \beta + i(\alpha - \beta)),$$

woraus Ψ durch Vertauschung von i mit $-i$ entsteht. Zur Bestimmung von Ω hat man aus (6):

$$\frac{\Omega_{\alpha\beta}}{\Omega_\alpha} = \operatorname{tang}\{i\varphi_1(\alpha + \beta + i(\alpha - \beta))\} \cdot [(1+i)\varphi' \\ + i(1-i)\varphi_1'],$$

woraus sich Ω durch zweimalige Quadratur ergibt.