

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1921. Heft I

Januar- bis März-sitzung

München 1921

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über die Reihen von Laplace und Legendre.

Von Otto Volk.

Vorgelegt von F. Lindemann in der Sitzung am 5. Februar 1921.

Die folgende Arbeit gibt im ersten Paragraphen des I. Teils einen elementaren Beweis eines Satzes von Gronwall über die Hölderschen Mittel erster Ordnung der Laplaceschen Reihe, der außer den bekannten Laplaceschen Formeln für die Kugelfunktionen keines weiteren Hilfsmittels bedarf. In einem zweiten Paragraphen wird ein Satz von L. Fejér über die Hölderschen Mittelwerte zweiter Ordnung der speziellen Reihe $\sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta)$ auf direktem Wege bewiesen. Im letzten Paragraphen des I. Teils werden einige mit den vorhergehenden verwandte Reihen betrachtet, die ebenfalls mit der Potentialtheorie in engem Zusammenhang stehen. Im II. Teile wird der in I, § 1 bewiesene Satz von Gronwall in derselben elementaren Weise für Cesarosche Mittelwerte der Ordnung $\frac{1}{2} < k < 1$ bewiesen.

I. Höldersche Mittel der Ordnung $k \geq 1$.

§ 1. Die Hölderschen Mittelwerte erster Ordnung der Laplaceschen Reihe.

Von der Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} F(\vartheta') P_n(\cos \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta',$$

auf die sich bekanntlich die Laplacesche Reihe durch Koor-

dinatentransformation zurückführen¹⁾ läßt, haben Fejér²⁾ und Gronwall³⁾ gezeigt, daß die Folge der Hölderschen und also auch der Cesaroschen Mittelwerte zweiter und erster Ordnung der Partialsummen nach $F'(0)$ konvergiert. Der Kernpunkt der Ableitung Gronwalls liegt in dem Nachweise, daß

$$(2) \quad \int_0^\pi |K_n^*(1, \vartheta)| \sin \vartheta \, d\vartheta$$

für alle n unterhalb einer festen Grenze bleibt, wenn

$$(3) \quad K_n(1, \vartheta) = \frac{1}{2} P_0(\cos \vartheta) + \frac{3}{2} P_1(\cos \vartheta) + \dots + \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta),$$

$$(4) \quad K_n^*(1, \vartheta) = \frac{1}{n+1} (K_0(1, \vartheta) + K_1(1, \vartheta) + \dots + K_n(1, \vartheta))$$

ist. Dieses Resultat hat kürzlich E. Hilb¹⁾ abgeleitet, indem er als wesentlich neues Hilfsmittel eine asymptotische Darstellung von $P_n(\cos \vartheta)$ benützte, die bei großen n für alle Werte $0 \leq \vartheta \leq \pi$ gilt. Im folgenden soll dieses Ergebnis nur mit Hilfe der Laplaceschen Formeln⁴⁾ abgeleitet werden.

Bekanntlich ist nach Laplace:

$$(5) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \varphi)^n \, d\varphi,$$

$$(6) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \varphi)^{n+1}}.$$

¹⁾ Vgl. z. B. E. Hilb, Über die Laplacesche Reihe. Math. Zeitschrift, Bd. 5, 1919, S. 17.

²⁾ L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe. Math. Annal., Bd. 67, 1909, S. 76–109.

³⁾ T. H. Gronwall, Über die Laplacesche Reihe. Math. Annal., Bd. 74, 1913, S. 213–270. Weitere Literatur s. E. Hilb, l. c.

⁴⁾ In ähnlicher Weise hat C. Neumann (Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben, Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Kl., Bd. XXXV, VII (1920), S. 526 f.) die Laplaceschen Formeln zur Berechnung von $\sum P_n(\cos \vartheta)$ verwendet.

Setzt man zur Abkürzung

$$(7) \quad w = \cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \varphi,$$

mithin

$$(8) \quad 1 - w = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \left(\sin \frac{\vartheta}{2} + i \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi \right),$$

so ergibt sich aus (7) und (8)

$$(9) \quad |w| = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi},$$

$$(10) \quad |1 - w| = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \varphi},$$

Aus (5) und (7) folgt:

$$(11) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w^n d\varphi,$$

mithin

$$\begin{aligned} \sum_0^n \frac{(2\nu+1)}{2} P_\nu(\cos \vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sum_0^n (2\nu+1) w^\nu \cdot d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(2 \cdot w \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+1}}{1-w} \right) + \frac{1-w^{n+1}}{1-w} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi \frac{1+w}{(1-w)^2} d\varphi - (2n+3) \int_0^\pi \frac{w^{n+1}}{(1-w)^2} d\varphi \right. \\ &\quad \left. + (2n+1) \int_0^\pi \frac{w^{n+2}}{(1-w)^2} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1+w}{(1-w)^2} = -\frac{1}{(1-w)} + \frac{2}{(1-w)^2},$$

daher

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1+w}{(1-w)^2} d\varphi = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-w} + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-w)^2},$$

folglich nach (8)

$$= -\frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin \frac{\vartheta}{2} + i \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi}$$

$$+ \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(\sin \frac{\vartheta}{2} + i \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \varphi \right)^2}$$

und nach (6)

$$= -\frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} P_0 \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right) + \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \cdot P_1 \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} = 0.$$

Somit wird

$$K_n(1, \vartheta) = \sum_0^n \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(\cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left[-(2n+3) \int_0^{\pi} \frac{w^{n+1}}{(1-w)^2} d\varphi \right.$$

$$\left. + (2n+1) \int_0^{\pi} \frac{w^{n+2}}{(1-w)^2} d\varphi \right]$$

und daher nach (4)

$$K_n^*(1, \vartheta) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \left[- \int_0^{\pi} \sum_0^n (2\nu+3) w^{\nu+1} \cdot \frac{d\varphi}{(1-w)^2} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} \sum_0^n (2\nu+1) w^{\nu+2} \cdot \frac{d\varphi}{(1-w)^2} \right].$$

Führt man die Summation aus, so erhält man:

$$K_n^{(*)}(1, \vartheta) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \left[- \int_0^{\pi} 2w \cdot \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+2}}{1-w} \right) \frac{d\varphi}{(1-w)^2} - \int_0^{\pi} \frac{w(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} 2w^2 \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+2}}{1-w} \right) \cdot \frac{d\varphi}{(1-w)^2} - \int_0^{\pi} \frac{w^2(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} d\varphi \right]$$

oder:

$$(12) \quad K_n^*(1, \vartheta) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \left[-2 \int_0^\pi w \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+2}}{1-w} \right) \frac{d\varphi}{1-w} - \int_0^\pi \frac{(w^2+w)(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} d\varphi \right].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+2}}{1-w} \right) \frac{w d\varphi}{1-w} &= \int_0^\pi \left(\frac{w(1-w^{n+2})}{(1-w)^3} - \frac{(n+2)w^{n+2}}{(1-w)^2} \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{w + w^2 + \dots + w^{n+2}}{(1-w)^2} - \frac{(n+2)w^{n+2}}{(1-w)^2} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Da nach (9)

$$|w| \leq 1$$

ist, so folgt bei Berücksichtigung von (10)

$$\left| \int_0^\pi \frac{w + w^2 + \dots + w^{n+2}}{(1-w)^2} d\varphi \right| \leq \frac{(n+2)}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \cdot \left| \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \varphi} \right|.$$

Nun ist

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \varphi\right)} = \frac{4}{\sin \vartheta} (2\vartheta - \pi),$$

somit wird

$$(13a) \quad \left| \int_0^\pi \frac{w + w^2 + \dots + w^{n+2}}{(1-w)^2} d\varphi \right| \leq \frac{n+2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} \cdot |2\vartheta - \pi|,$$

eine Ungleichung, die für alle Werte von ϑ gilt, die dem Intervall $0 < \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon$ angehören, wo ε eine beliebige kleine Zahl bedeutet. Für ϑ , die kleiner als ε bzw. größer als $\pi - \varepsilon$ sind, kann man näherungsweise im Zähler $w = 1$ setzen; wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
 (13b) \quad \left| \int_0^\pi \frac{w + w^2 + \dots + w^{n+2}}{(1-w)^2} d\varphi \right| &\approx (n+2) \left| \int \frac{d\varphi}{(1-w)^2} \right| \\
 &\approx \frac{(n+2)\pi}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \cdot P_1 \left(\sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\
 &\approx \frac{n+2}{4 \sin \frac{\vartheta}{2}} \pi.
 \end{aligned}$$

In ganz derselben Weise ergibt sich

$$(13c) \quad (n+2) \left| \int_0^\pi \frac{w^{n+2}}{(1-w)^2} d\varphi \right| \leq \begin{cases} \frac{n+2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} |2\vartheta - \pi| & \text{für } \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon \\ \frac{n+2}{4 \sin \frac{\vartheta}{2}} \pi & \text{für } \begin{cases} 0 \leq \vartheta \leq \varepsilon \\ \pi - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi. \end{cases} \end{cases}$$

Aus (13a), (13b) und (13c) folgt nun, daß

$$(14a) \quad \left| \int_0^\pi \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+2}}{1-w} \right) \cdot \frac{w}{1-w} d\varphi \right| \leq \begin{cases} \frac{2(n+2)}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} |2\vartheta - \pi| \\ \frac{(n+2)\pi}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} \end{cases}$$

ist, je nachdem $\begin{cases} 0 < \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon \\ 0 \leq \vartheta \leq \varepsilon, \quad \pi - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$ ist.

In ganz analoger Weise findet man, daß

$$(14b) \quad \left| \int_0^\pi \frac{(w^2 + w)(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} dw \right| \leq \begin{cases} \frac{2(n+1)}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} |2\vartheta - \pi| \\ \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \pi \text{ ist.} \end{cases}$$

Aus (12), (14 a) und (14 b) folgt

$$(15) \quad |K_n^*(1, \vartheta)| \leq \begin{cases} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} = \frac{3n+5}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \vartheta} \\ \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}} = \frac{3n+5}{4(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\vartheta}{2}}, \end{cases}$$

je nachdem $\begin{cases} 0 < \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon \\ 0 \leq \vartheta \leq \varepsilon, \pi - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$ ist; hieraus ergibt sich

$$(16) \quad \begin{aligned} & \int_0^\pi |K_n^*(1, \vartheta)| \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^\varepsilon |K_n^*(1, \vartheta)| \sin \vartheta d\vartheta \\ & + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi |K_n^*(1, \vartheta)| \sin \vartheta d\vartheta + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} |K_n^*(1, \vartheta)| \sin \vartheta d\vartheta \\ & \leq \frac{3n+5}{2(n+1)} \left[\int_0^\varepsilon \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right] \\ & \leq \frac{3n+5}{n+1} \left[1 + \sin \frac{\varepsilon}{2} - \cos \frac{\varepsilon}{2} + \cot^2 \frac{\varepsilon}{2} - \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \right]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite nimmt, da ε zwar immer sehr klein ist, aber doch nie den Wert Null annehmen darf, für alle Werte von n einen endlichen Wert an. Es ist

somit durch (16) bewiesen, daß $\int_0^\pi |K_n^*(1, \vartheta)| \sin \vartheta d\vartheta$ für alle Werte von n unterhalb einer endlichen Schranke M_0 bleibt.

§ 2. Über einen Satz von L. Fejér über die Hölderschen Mittelwerte der speziellen Legendreschen Reihe

$$\sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(x).$$

Von der Reihe $\sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(x)$ hat L. Fejér¹⁾ den Satz bewiesen:

Für die Hölderschen Mittel zweiter Ordnung s_n'' ist $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n''(x) = 0$, wenn $-1 \leq x < 1$ ist.

Dieser Satz, den Fejér mittels der Cesaroschen Mittelwerte bewies, soll auf direktem Wege bewiesen werden.

Nach (12) ist, wenn wir $x = \cos \vartheta$ setzen:

$$s_n'' = 2 K_n^* (1, \vartheta) = \frac{1}{(n+1)\pi} \left[- \int_0^{\pi} w \frac{d}{dw} \left(\frac{1-w^{n+2}}{1-w} \right) \cdot \frac{d\varphi}{1-w} \right. \\ \left. - \int_0^{\pi} \frac{(w^2 + w)(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} d\varphi \right].$$

Somit wird:

$$s_n'' = \frac{1}{(n+1)\pi} \left[- 2 \int_0^{\pi} \frac{d}{dw} \left(\sum_0^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{w^{n+2}}{n+1} \right) \right) \frac{w d\varphi}{1-w} \right. \\ (17) \quad \left. - \int_0^{\pi} \frac{w + w^2}{(1-w)^3} \sum_0^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{w^{n+1}}{n+1} \right) d\varphi \right].$$

Nun ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \log(n+1) + C,$$

wo C die Eulersche Konstante ist; ferner

$$(18) \quad \sum_0^n \frac{w^{n+2}}{n+1} = w \int_0^w (1+w+\cdots+w^n) dw = w \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw,$$

¹⁾ Vgl. L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe. Math. Ann., Bd. 67, 1909, S. 81 ff.

$$(19) \quad \sum_0^n \frac{w^{n+1}}{n+1} = \int_0^w (1+w+\dots+w^n) dw = \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw.$$

Es wird daher

$$\begin{aligned} s_n'' &= \frac{1}{(n+1)\pi} \left[-2 \int_0^\pi \frac{dw}{dw} \left\{ \left(\log(n+1) + C - w \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw \right) \frac{1}{1-w} \right\} \frac{w}{1-w} d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \frac{w+w^2}{(1-w)^3} \left(\log(n+1) + C - \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw \right) d\varphi \right] \\ (17a) \quad &= \frac{1}{(n+1)\pi} \left[-(\log(n+1) + C) \int_0^\pi \frac{3w+w^2}{(1-w)^3} d\varphi + \int_0^\pi \frac{3w+w^2}{(1-w)^3} d\varphi \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^\pi \frac{w^2(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Nun ist¹⁾

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{3w+w^2}{(1-w)^3} d\varphi &= \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1-w} - 5 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-w)^2} + 4 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-w)^3} \\ &= \pi \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}} - \frac{5}{4 \sin \frac{\vartheta}{2}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{3}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} \right) = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}}. \end{aligned}$$

Da ferner nach (9) und (10)

$$|w| = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi} \leq 1, \\ |1-w| = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \varphi} \geq \sin \vartheta \text{ ist, so ist}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{w^2(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} d\varphi \right| &\leq \int_0^\pi \frac{|w|^2}{|1-w|^3} d\varphi + \int_0^\pi \frac{|w|^{n+3}}{|1-w|^3} d\varphi \\ &\leq \frac{\pi}{\sin^3 \vartheta} + \frac{\pi}{\sin^3 \vartheta} = \frac{2\pi}{\sin^3 \vartheta} \end{aligned}$$

¹⁾ Im folgenden ist zunächst vorausgesetzt, daß $0 < \vartheta < \pi$ ist.

$$\left| \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw \right| \leq \log(n+1) + C$$

und

$$\int_0^\pi \left| \frac{3w + w^2}{(1-w)^3} \right| d\varphi \leq \frac{4\pi}{\sin^3 \vartheta};$$

somit wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| -(\log(n+1) + C) \int_0^\pi \frac{3w + w^2}{(1-w)^3} d\varphi + \int_0^\pi \frac{3w + w^2}{(1-w)^3} \int_0^w \frac{1-w^{n+1}}{1-w} dw \right. \\ \left. + 2 \int_0^\pi \frac{w^2(1-w^{n+1})}{(1-w)^3} d\varphi \right| \leq 8(\log(n+1) + C) \cdot \frac{1}{\sin^3 \vartheta} + \frac{2}{\sin^3 \vartheta}, \end{aligned}$$

woraus nach (17 a) sofort für $0 < \vartheta < \pi$ folgt:

$$\begin{aligned} (17b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n''| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8(\log(n+1) + C)}{n+1} \cdot \frac{1}{\sin^3 \vartheta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{(n+1) \sin^3 \vartheta} \right) = 0. \end{aligned}$$

Für $\vartheta = \pi$ erhält man, da

$$P_n(-1) = (-1)^{n+1}$$

ist:

$$s_n = (-1)^n (n+1), \quad s_{2n}' = \frac{n+1}{2n+1}, \quad s_{2n+1}' = -\frac{1}{2},$$

$$s_{2n}'' = \frac{1 + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2(2n+1)}}{2n+1} < \frac{\log 2(2n+1) + C}{2n+1},$$

$$s_{2n+1}'' = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2(2n+1)}}{2n+2} < \frac{\log 2(2n+1) + C}{2n+2};$$

hieraus folgt sofort

$$(17c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n'' = 0,$$

womit der Fejérsche Satz für $0 < \vartheta < \pi$ und somit für $-1 \leq x < 1$ bewiesen ist.

§ 3. Über die Reihen $\sum_0^{\infty} (2n-1) \int_x^1 P_n(x) dx$,

$$\sum_0^{\infty} (2n-1)^2 \int_x^1 P_n(x) dx \text{ und } \sum_0^{\infty} (2n-1)^3 \int_x^1 P_n(x) dx.$$

Das Potential W einer doppelt belegten, unendlich dünnen Kreisscheibe läßt sich durch die unendliche Reihe darstellen:

$$(20) \quad W = \sum_0^{\infty} \frac{(4n+3)}{Q_{2n+1}(i \cdot 0)} \int_0^1 P_{2n+1}(\mu) d\mu \cdot P_{2n+1}(v) Q_{2n+1}(u);$$

dabei ist

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi; & \varrho &= \text{Coj } \lambda \cdot \cos \vartheta; & u &= i \text{Sin } \lambda, \\ y &= \varrho \sin \varphi; & z &= \text{Sin } \lambda \cdot \sin \vartheta; & v &= \sin \vartheta. \\ \varepsilon &= z; \end{aligned}$$

Auf der Scheibe selbst, d. h. für $u = i \cdot 0$ nimmt W für $v > 0$ den Wert $+1$, für $v < 0$ den Wert -1 an¹⁾. Es ist also

$$(21) \quad \sum_0^{\infty} (4n+3) \int_0^1 P_{2n+1}(\mu) d\mu \cdot P_{2n+1}(v) = 1 \quad \text{für } v > 0$$

$$(22) \quad \sum_0^{\infty} (4n+3) \int_0^1 P_{2n+1}(\mu) d\mu \cdot P_{2n+1}(v) = -1 \quad \text{für } v < 0.$$

Wir betrachten zunächst die Reihe (21) für $v = 1$, wobei wir aber statt der untern festen Grenze des Integrals die veränderliche x einführen. Wir erhalten so die Reihe²⁾

¹⁾ Vgl. hierzu meine nicht im Druck erschienene Dissertation an der Technischen Hochschule in München: Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie, S. 11 ff.; vgl. auch C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Zylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen. Leipzig 1881. S. 111 ff.

²⁾ Es genügt, die Reihe (23) zu betrachten, da sich das folgende durch eine geometrische Betrachtung leicht auf die allgemeinere Reihe (21) übertragen läßt. Vgl. meine eben in 1) genannte Dissertation I. c. und C. Neumann, I. c.; vgl. auch C. Chapman, On the Summability of Series of Legendres Functions. Math. Annal. Bd. 72. 1912, S. 218.

$$(23) \quad S = \sum_0^{\infty} (4n+3) \int_x^1 P_{2n+1}(\mu) d\mu.$$

Entwickelt man den Ausdruck $\sqrt{1-2\lambda x + \lambda^2}$ nach positiven Potenzen von λ , so erhält man

$$\sqrt{1-2\lambda x + \lambda^2} = L_0(x) + L_1(x) \cdot \lambda + L_2(x) \lambda^2 + \dots + L_n(x) \cdot \lambda^n + \dots;$$

die Funktionen $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $+$ $\dots$ sind mit den Heineschen Zugeordneten $\mathfrak{P}_1^{n-1}(x)$ ¹⁾ oder den metasphärischen Funktionen $K^{-\frac{1}{2},2}(x)$ Nielsens²⁾ identisch und es ist:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x,$$

$$(24) \quad L_n(x) = \int_x^1 P_{n-1}(x) dx \quad (n > 1).$$

Ferner ist³⁾

$$(25) \quad L_n(x) = P_n(x) - 2x P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß

$$2x P_{n-1}(x) = \frac{1}{2n-1} (n P_n(x) + (n-1) P_{n-2}(x))$$
 ist:

$$(26) \quad L_n(x) = \frac{1}{2n-1} P_{n-2}(x) - P_n(x) = \int_x^1 P_{n-1}(x) dx \quad (n > 1).$$

Setzt man diesen Wert in (23) ein, so erhält man

$$(27) \quad S = P_0(x) - P_2(x) + P_2(x) - P_4(x) + \dots \text{ oder } S = P_0(x) = 1 \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Für $x = \pm 1$ nimmt S den Wert 0 an.

¹⁾ Vgl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Leipzig 1878, Bd. I, S. 148.

²⁾ Vgl. N. Nielsen, Théorie des fonctions metasphériques, Paris 1911, S. 56.

³⁾ Vgl. C. Neumann, Beiträge zum Studium von Randwertaufgaben. Abhandl. d. sächs. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Kl. XXXV, VII, S. 519.

⁴⁾ Vgl. E. Heine, l. c., S. 91.

Wir betrachten jetzt die Reihe

$$(28) \quad S_1 = \sum_0^{\infty} (2n-1) L_n(x).$$

Setzen wir für $L_n(x)$ wieder seinen Wert aus (26) ein, so erhalten wir

$$S_1 = -P_0(x) - P_1(x) + P_0(x) - P_2(x) + P_1(x) - P_3(x) + \dots$$

oder

$$(29) \quad S_1 = 0 \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Für $x = +1$ wird $S_1 = -2$.

In ganz ähnlicher Weise findet man

$$S_2 = \sum_0^{\infty} (4n+1) L_{2n+1}(x) = -P_1(x) + P_1(x) - P_3(x) + P_3(x) - P_5(x) + \dots \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

$$(30) \quad S_2 = 0.$$

Für $x = +1$ wird $S_2 = -1$, für $x = -1$ $S_2 = +1$.

Beachtet man, daß

$$\begin{aligned} S &= \sum_0^{\infty} (4n+3) L_{2n+2}(x) = \sum_0^{\infty} (4n-1) L_{2n}(x) + L_0(0) \\ &= \sum_0^{\infty} (4n-1) L_{2n}(x) + 1 \quad \text{für } -1 < x < 1 \end{aligned}$$

ist, so folgt aus (27) und (29) wieder (28).

In ähnlicher Weise lassen sich die Reihen

$$\sum_0^{\infty} (2n-1)(2n+1) L_n(x) \quad \text{und} \quad \sum_0^{\infty} (2n-1)^2 L^n(x)$$

leicht summieren. Man erhält

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (2n-1)(2n+1) L_n(x) &= -P_0(x) - 3P_1(x) + 5(-P_2(x) \\ &+ P_0(x)) + 7(-P_3(x) + P_1(x)) + \dots = 4(P_0(x) + P_1(x) \\ (31) \quad &+ P_2(x) + \dots) = 2V2 \cdot \frac{1}{V1-x} \quad \text{für } -1 < x < 1, \end{aligned}$$

da
$$\sum_0^{\infty} P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

ist¹⁾. Wird $x = +1$, so nimmt die Reihe (31) den Wert -4 , und für $x = -1$ den Wert $+2$ an. Für die 2. Reihe ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (2n-1)^2 L_n(x) &= L_0(x) + L_1(x) + 9L_2(x) + \dots \\ &= P_0(x) - P_1(x) + 3(P_0(x) - P_2(x)) + 5(P_1(x) - P_3(x)) + \dots \\ &= 4(P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) + \dots) \\ (32) \qquad \qquad &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{für } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Für $x = +1$ nimmt die Reihe (32) den Wert 0, für $x = -1$ den Wert $+2$ an.

Da $|P_n(x)| < \varepsilon$

durch hinreichende Vergrößerung der Zahl n gemacht werden kann und zwar gleichzeitig für alle x , die dem Intervalle -1 bis 1 mit Ausschluß von ± 1 angehören, und für $n = n, n+1, n+2^2), \dots$, ferner

$$\sum_0^{\infty} P_n(x)$$

für alle x desselben Intervalls gleichmäßig konvergiert³⁾, so bleiben die Formeln (27), (29), (30), (31), (32) gültig und gleichmäßig konvergent für alle x des Intervalls

$$-1 < x < 1.$$

Wir erhalten somit zusammenfassend:

$$\sum_0^{\infty} (4n+3) L_{2n+2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{für } x = \pm 1; \end{cases}$$

¹⁾ Vgl. z. B. C. Neumann, l. c., S. 528 ff.

²⁾ Vgl. C. Neumann, l. c., S. 527.

³⁾ Vgl. z. B. C. Neumann, l. c., S. 528.

$$\sum_0^{\infty} (4n+1) L_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{für } x = 1 \\ +1 & \text{für } x = -1; \end{cases}$$

$$\sum_0^{\infty} (2n-1) L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ -2 & \text{für } x = 1; \end{cases}$$

$$\sum_0^{\infty} (2n-1)(2n+1) L_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{für } -1 < x < 1 \\ -4 & \text{für } x = 1 \\ +2 & \text{für } x = -1; \end{cases}$$

$$\sum_0^{\infty} (2n-1)^2 L_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{für } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ +2 & \text{für } x = -1. \end{cases}$$

Wir untersuchen noch die Reihe

$$(33) \quad \sum_0^{\infty} (2n-1)^3 L_n(x).$$

Setzen wir wieder den Wert von $L_n(x)$ aus (26) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (2n-1)^3 L_n(x) &= 8(P_0(x) + 3P_1(x) + 5P_2(x) + \cdots) \\ &= 8 \sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(x). \end{aligned}$$

Die Reihe (33) ist somit eine divergente Reihe, die die Eigenschaften der Reihe $\sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(x)$ hat.

II. Die Cesaroschen Mittel der Ordnung $k \leq \frac{1}{2}$ der Laplaceschen Reihe.

Im folgenden soll der entsprechende Hilfssatz für die Cesarosche Summierung der Partialsummen der Laplaceschen Reihe für die Ordnung $k > \frac{1}{2}$ abgeleitet werden, wie es im § 1 des I. Teils dieser Abhandlung für die Mittel der Ordnung

$k = 1$ geschehen ist. Die Ableitung wird sich im wesentlichen ebenso elementar gestalten wie dort, so daß sie es wohl verdient, neben der erst kürzlich von E. Hilb¹⁾ gegebenen mitgeteilt zu werden.

§ 1. Ausführung der Summation.

Wir wollen zeigen, daß

$$(34) \quad S_{\omega, k} = \int_0^{\pi} \left| \sum_0^n (2r+1) P_r(\cos \vartheta) \cdot \left(1 - \frac{r}{\omega}\right)^k \right| \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

wo $n < \omega \leq n+1$ ist, für alle Werte von n und ω unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, wenn $1 > k > \frac{1}{2}$, dagegen für $k = \frac{1}{2}$ mit n ins Unendliche wächst. Setzen wir wieder

$$(35) \quad P_r(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \varphi)^n d\varphi,$$

$$(36) \quad (\omega - r)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} \int \frac{e^{-(\omega-r)z}}{(-z)^{k+1}} dz,$$

wo der Integrationsweg in der komplexen z -Ebene von $+\infty$ um den Nullpunkt im Uhrzeigersinn herum, dann nach $+\infty$ zurückzuführen ist, in (34) ein, so erhalten wir, wenn wir wie in (7) (S. 169) $w = \cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos \varphi$ setzen und die Summation ausführen:

$$(37) \quad S_{\omega, k} = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi^2 i} \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int \left[\frac{1 + we^z}{(1 - w \cdot e^z)^2} \cdot \frac{e^{-\omega z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)w^{n+2}e^{(n+2)z} - (2n+3)w^{n+1} \cdot e^{(n+1)z}}{(1 - we^z)^2} \cdot \frac{e^{-\omega z}}{\omega^k \cdot (-z)^{k+1}} \right] dz,$$

somit

$$(38) \quad \left| \frac{2\pi^2}{\Gamma(k+1)} \cdot S_{\omega, k} \right| \leq T_{\omega, k} + U_{\omega, k}, \quad \text{wo}$$

¹⁾ E. Hilb, Über die Laplacesche Reihe (II. Teil). Mathem. Zeitschrift, Bd. 8, 1920, S. 79–90.

$$(39) \quad T_{\omega, k} = \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \left[\int_0^{\pi} d\varphi \int \frac{dz \cdot e^{-\omega z}}{\omega^k \cdot z^{k+1}} \cdot \frac{1 + we^z}{(1 - we^z)^2} \right],$$

$$(40) \quad U_{\omega, k} = \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \left[\int_0^{\pi} d\varphi \int \frac{dz \cdot e^{-\omega z}}{\omega^k \cdot z^{k+1}} \right. \\ \left. \frac{(2n+1)w^{n+2}e^{(n+2)z} - (2n+3)w^{n+1}e^{(n+1)z}}{(1 - we^z)^2} \right].$$

Wir haben also zu zeigen, daß $T_{\omega, k}$ und $U_{\omega, k}$ unter endlichen Schranken bleiben.

§ 2. Abschätzung von $T_{\omega, k}$.

$T_{\omega, k}$ kann große Werte nur dann annehmen, wenn der absolute Betrag des Nenners sehr klein wird. Dies ist der Fall für $z = 0$ und $|1 - we^z| = 0$; im letzteren Falle wird ($z = x + iy$ gesetzt):

$$(41) \quad \begin{aligned} 1 - e^x (\cos \vartheta \cos y + \sin \vartheta \sin y \cos \varphi) &= 0, \\ \cos \vartheta \sin y + \sin \vartheta \cos y \cos \varphi &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$(41a) \quad e^x = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}}, \quad \operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi.$$

Es wird somit $y = 0$ für $\vartheta = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$; diesen Werten entspricht $x = 0$ bzw. $x = \log \frac{1}{\cos \vartheta}$ ($0 \leq \cos \vartheta \leq 1$).

Wir wählen nun den Integrationsweg so, daß er von $+\infty$ längs der Achse des Reellen verläuft, dabei einen kleinen Halbkreis um den Punkt $x_0 = \log \frac{1}{\cos \vartheta}$, dann einen kleinen Kreis um den Nullpunkt (im Uhrzeigersinn) beschreibt, dann schließlich längs der Achse des Reellen noch $+\infty$ zurückkehrt, indem er wieder um den Punkt $x_0 = \log \frac{1}{\cos \vartheta}$ einen

kleinen Halbkreis beschreibt, der den ersten zu einem Kreise ergänzt.

Betrachten wir $T'_{\omega,k}$ zunächst auf dem Kreise um $x_0 = \log \frac{1}{\cos \vartheta}$, wobei vorerst $0 < \cos \vartheta < 1$ sei. Wir setzen

$$z = x_0 + \varrho e^{i\psi}, \quad dz = i\varrho e^{i\psi} d\psi,$$

wo ϱ so gewählt werden kann, daß innerhalb des Kreises mit dem Radius ϱ außer $z = x_0$ keine weitere Nullstelle des Nenners liegt. Es wird nun

$$(42) \quad \int \frac{dz \cdot e^{-\omega z}}{\omega^k \cdot z^{k+1}} \cdot \frac{1 + we^z}{(1 - we^z)^2} \\ = i \cdot \frac{1}{\varrho} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi \cdot e^{i\psi} \cdot e^{-\omega(x_0 + \varrho e^{i\psi})}}{\omega^k (x_0 + \varrho e^{i\psi})^{k+1}} \cdot \frac{1 + \cos \vartheta \cdot e^{x_0 + \varrho e^{i\psi}}}{e^{2i\psi} (1 + \dots)},$$

wo also, da ja ϱ beliebig klein gemacht werden kann, in dem rechts stehenden Integral $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $w = \cos \vartheta$ gesetzt ist.

Hieraus erkennt man sofort, daß das Integral (42) für alle Werte von ω unter einer endlichen Schranke bleibt, falls nur $\varrho < x_0$ ist.

Wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, somit $x_0 = \infty$, so bleibt der Ausdruck

$$\frac{e^{-\omega z} (1 + we^z)}{z^{k+1} \cdot (1 - we^z)^2}$$

endlich, daher auch $T'_{\omega,k}$. Wird $\vartheta = 0$, so gilt, wie das folgende zeigt, dasselbe.

Wir untersuchen jetzt das Integral

$$J_1 = \int \frac{dz \cdot e^{-\omega z}}{\omega^k \cdot z^{k+1}} \cdot \frac{1 + we^z}{(1 - we^z)^2},$$

erstreckt über den Kreis um den Nullpunkt. Machen wir die Substitution:

$$(43) \quad z = \frac{\omega}{\zeta},$$

so erhalten wir

$$(44) \quad J_1 = \int \frac{d\zeta \cdot e^{-\zeta}}{\zeta^{k+1}} \cdot \frac{1 + w \cdot e^{\omega \zeta}}{(1 - w e^{\omega \zeta})^2},$$

wo der Integrationsweg wieder ein Kreis um den Nullpunkt der ζ -Ebene ist. Ist $\vartheta > 0$, so kann der Radius dieses Kreises so gewählt werden, daß $1 - w e^{\omega \zeta}$ innerhalb desselben einschließlich der Begrenzung nie Null wird; J_1 bleibt also immer endlich. Ist $\vartheta = 0$, also $w = 1$, so entwickeln wir im Nenner $(1 - w e^{\omega \zeta})^2$ in eine Potenzreihe und erhalten:

$$(45) \quad J_2 = \omega^2 \int \frac{d\zeta \cdot e^{-\zeta} (1 + e^{\omega \zeta})}{\zeta^{k+3} \cdot (1 + \dots)}.$$

Der Integrationsweg ist wieder ein Kreis um den Nullpunkt der ζ -Ebene, dessen Radius kleiner als 2π sein muß. Es wird somit

$$\left| \int \frac{d\zeta \cdot e^{-\zeta} \cdot (1 + e^{\omega \zeta})}{\zeta^{k+3} (1 + \dots)} \right|$$

unter einer endlichen Schranke M_1 bleiben; somit wird

$$(46) \quad |J_2| \leq \omega^2 \cdot M_1.$$

Zerlegen wir das Integral $T'_{\omega, k}$ in (39) in die beiden Integrale

$$(47) \quad T_{\omega, k} = \int_0^n + \int_1^n;$$

aus (42), (43) und (44) folgt dann sofort, daß das zweite Integral $\int_1^n$ für alle Werte von n und ω unter einer endlichen Schranke bleibt. Für das erste Integral gilt, bei Berücksichtigung von (46) und Ersetzung von $\sin \vartheta$ durch ϑ , für große Werte von n

$$(48) \quad \int_0^1 \frac{\omega^2}{2n^2} M_1.$$

Da $n < \omega \leq n+1$ ist, so folgt, daß $T_{\omega,k}$ für alle Werte von ω unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

§ 3. Abschätzung von $U_{\omega,k}$.

Aus (40) ergibt sich sofort durch eine einfache Zerlegung

$$(49) \quad U_{\omega,k} \leq \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \left[\int_0^\pi d\varphi \int \frac{dz (2n+1) \cdot e^{(-\omega+n+1)z} w^{n+1}}{\omega^k \cdot z^{k+1} (1 - w e^z)} \right] \\ + 2 \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \left[\int_0^\pi d\varphi \int \frac{dz \cdot e^{(-\omega+n+1)z} w^{n+1}}{\omega^k \cdot z^{k+1} \cdot (1 - w e^z)^2} \right].$$

Das zweite Integral der rechten Seite in (49) erledigt sich in ganz analoger Weise wie die in § 2 behandelten Integrale. Es genügt daher, das erste Integral J_1 näher zu betrachten. Setzt man

$$(50) \quad z = \omega \cdot u,$$

so erhält man für dieses Integral

$$(51) \quad \int \frac{dz \cdot (2n+1) e^{(-\omega+n+1)z} w^{n+1}}{\omega^k \cdot z^{k+1} (1 - w e^z)^2} \\ = \int \frac{2n+1}{\omega^{2k}} \cdot \frac{e^{(-\omega+n+1)\omega u} w^{n+1}}{(e^{-\omega u} - w)^2 \cdot u^{k+1}} du.$$

Hieraus folgt nach dem im § 2 Gesagten, daß $U_{\omega,k}$ endlich bleibt für alle Werte von ω , wenn nur u und ϑ nicht gleichzeitig kleine Werte annehmen. Wir können uns daher darauf beschränken, das erste Integral eingehender zu untersuchen, wenn ϑ sehr klein wird.

Für kleine Werte von ϑ wird $w \approx 1$; führen wir nun zuerst die Integration nach φ aus, was gestattet ist, so erhalten wir;

$$\begin{aligned}
 N &= \int_0^{\pi} (2n+1) \frac{w^{n+1}}{(1-we^z)} d\varphi \approx \frac{1}{1-e^z} \int_0^{\pi} (2n+1) w^{n+1} d\varphi \\
 (52) \quad &\approx \frac{(2n+1)\pi}{1-e^z} P_{n+1}(\cos \vartheta).
 \end{aligned}$$

Machen wir jetzt von der Hilbschen Formel¹⁾ Gebrauch:

$$(53) \quad |P_{n+1}(\cos \vartheta)| < \frac{M_2}{V(2n+1)\vartheta},$$

(M_2 eine von n unabhängige endliche Konstante),

die für alle Werte $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt²⁾, so wird, wenn wir von allen endlich bleibenden Faktoren absehen und dies mit $\approx$ bezeichnen:

$$(54) \quad N \approx \frac{1}{1-e^z} \cdot \frac{V2n+1}{V\vartheta}.$$

Setzen wir jetzt noch

$$(55) \quad z = \vartheta \cdot v,$$

so wird

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \int_1^n \sin \vartheta d\vartheta \left| \int_0^{\pi} d\varphi \int \frac{dz \cdot (2n+1) e^{(-\omega+n+1)z} w^{n+1}}{\omega^k \cdot z^{k+1} \cdot (1-we^z)} \right| \\
 (56) \quad &\approx \int_1^n \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{V2n+1}{\omega^k V\vartheta \cdot \vartheta^{k+1}} \cdot \left| \int \frac{e^{(-\omega+n+1)\vartheta v}}{v^{k+2}} dv \right|.
 \end{aligned}$$

Die Integration nach v ist über einen Kreis der v -Ebene mit endlichem Radius zu erstrecken; sie gibt also immer etwas Endliches. Wir können somit schreiben:

¹⁾ Vgl. E. Hilb, Über die Laplacesche Reihe. Math. Zeitschr., Bd. 5, 1919, S. 22.

²⁾ Für $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi$ hat man auf der rechten Seite von (53) ϑ durch $\pi - \vartheta$ zu ersetzen.

$$(57) \quad J_3 \approx \frac{\sqrt{2n+1}}{\omega^k} \int_1^n \frac{\sin \vartheta \, d\vartheta}{\vartheta^{k+\frac{1}{2}}}$$

oder wenn wir statt $\sin \vartheta$ ϑ setzen:

$$(58) \quad J_3 \approx \frac{\sqrt{2n+1}}{\omega^k} \int_1^n \frac{d\vartheta}{\vartheta^{k+\frac{1}{2}}} \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{2n+1}}{\omega^k} \cdot \frac{n^k}{\sqrt{n}} & k > \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{\omega}} \cdot \log n & k = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

J_3 bleibt also unter einer endlichen Schranke, wenn $k > \frac{1}{2}$ ist; für $k = \frac{1}{2}$ wird J_3 unendlich wie $\log n$.

Man überzeugt sich leicht, daß das Integral

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \sin \vartheta \, d\vartheta \left| \int_0^{\pi} d\varphi \int \frac{dz (2n+1) e^{(-\omega+n+1)z} w^{n+1}}{\omega^k \cdot z^{k+1} (1 - w e^z)} \right|$$

immer endlich bleibt, welchen Wert auch ω annimmt.

Es ist somit gezeigt, daß für jedes noch so große ω $U_{\omega,k}$ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, wenn $k > \frac{1}{2}$. Dasselbe gilt daher nach (38), (47), (48) auch für $S'_{\omega,k}$. Da für $k = \frac{1}{2}$ alles andere endlich bleibt, abgesehen von J_3 , so sieht man mittels der zweiten Gleichung (58) sofort, daß $S_{\omega,k}$ für $k = \frac{1}{2}$ mit n wie $\log n$ unendlich wird.