

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen

(nach Ideen von Boltzmann und Jacobi).

Von Heinrich Liebmann.

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1918.

§ 1. Boltzmanns „Beweis“ für das Dirichletsche Prinzip.

1. Der Ansatz von Boltzmann und seine Bedeutung. Ludwig Boltzmann hat in München im Wintersemester 1892/1893 eine Vorlesung über das mechanische Potential gehalten, die nach dem tragischen Ende des Forschers in dankenswerter Weise von seinem Schüler, dem Astronomen Hugo Buchholz verarbeitet worden ist¹⁾. Einen Glanzpunkt erblickt der Bearbeiter in der Behandlung, die Boltzmann dem Dirichletschen Prinzip zu teil werden ließ; es sieht hier einen „neuen Beweis“ des Prinzips und ruft den „reinen“ Mathematiker herbei, um die Frage in diesem Sinne weiter zu behandeln.

Ungehört, so scheint es, ist dieser Ruf verklungen; ja, man berichtet, daß maßgebende Forscher den eingeschlagenen Weg für durchaus ungeeignet erachten, zu einem neuen strengen Beweis zu gelangen. Wir werden dazu unten (§ 2, 2) Stellung nehmen, dürfen uns im übrigen darauf berufen, daß angesichts der von C. Neumann, H. A. Schwarz, Poincaré und Hilbert gegebenen Beweise ein neuer Beweis wohl kaum als Bedürfnis

¹⁾ Hugo Buchholz, Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann und die Theorie der Figur der Erde. Leipzig 1908. (Insbesondere S. VIII und Kap. VIII, S. 150—176.)

empfunden wird. Wir wollen dahin gestellt sein lassen, ob in diesem Sinne — „dabei überhaupt gar nichts herauskommt“, neigen aber zu einer milderen Auffassung.

Jedenfalls läßt sich Boltzmanns Idee *und darin dürfte ihr unbestreitbarer bleibender Wert liegen* — zu einer praktisch durchführbaren angenäherten Lösung der Randwertaufgabe ausbauen, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt und wohl verdient, neben dem Verfahren von Runge¹⁾ in den Dienst der angewandten Mathematik gestellt zu werden.

Boltzmann ersetzt die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

durch die Differenzengleichung

$$\begin{aligned} D_2 u \equiv u(x - \varepsilon, y) + u(x + \varepsilon, y) + u(x, y - \varepsilon) + u(x, y \\ + \varepsilon) - 4u(x, y) = 0, \end{aligned}$$

und er kann dann die (erste) Randwertaufgabe zunächst für ein Quadrat angenähert in folgender Weise lösen: Das Quadrat wird durch äquidistante Parallelen zu den Seiten in ein Netz von n^2 Quadraten zerlegt, so daß ein Gitter von $(n - 1)^2$ inneren Punkten und $4(n - 1)$ Randpunkten entsteht — die vier Eckpunkte spielen zunächst keine Rolle. Zur Bestimmung der Werte u_{ik} der Lösung der Differenzengleichung dienen dann die $(n - 1)^2$ Gleichungen, die der Forderung Ausdruck verleihen, daß — gemäß der Differenzengleichung — u_{ik} gleich

¹⁾ Das Gebiet der numerischen und graphischen Integration ist im Artikel II C 2 der math. Enzyklopädie (Runge und Willers) ausführlich dargestellt. In Betracht kommen hier vor allem die in Kap. III (Graphische und numerische Integration partieller Differentialgleichungen) besprochenen Arbeiten von Runge selbst (Fußnote 529, S. 165, 549, S. 173) und seinem inzwischen auf dem Felde der Ehre gefallenen Schüler Rottsieper, endlich die umfangreiche Arbeit von Richardson (Fußnote 548, S. 173). Auf die letztgenannte: Approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems (London R. S. Philos. Trans. A 210 (1910), p. 507—537) kommen wir noch zu sprechen (§ 3, 3), weil sie trotz gänzlich verschiedener Methode doch von allen genannten die engste Berührung mit unseren Darlegungen zeigt.

dem arithmetischen Mittel der Werte in den vier benachbarten Gitterpunkten sein soll; die 4 $(n - 1)$ Werte am Rand sind gegeben. Man erhält dann die u_{ik} durch Auflösung dieser Gleichungen.

Ob sich der Grenzübergang für $n = \infty$ unmittelbar durchführen läßt, zu dieser Frage nehmen wir noch Stellung, unsere Hauptfrage ist: *Wie kann man die Differenzgleichung auflösen?*

2. Eine Reihe von Fragen. Wir haben, der durch Boltzmann (bzw. Buchholz) gegebenen Anregung folgend, eine Reihe von Aufgaben zu besprechen, die wir hier getrennt aufzählen.

1. Unmittelbare Bestimmung der Werte der Gitterfunktion durch Auflösung der Differenzgleichung für $n = 2, 3, 4 \dots$ — Es zeigt sich, wie zu erwarten, bald eine Schranke, an der die Rechenfreudigkeit erlahmt.

2. *Angenäherte* Auflösung der Differenzgleichung und Nachweis der Konvergenz gegen die strenge Auflösung. Hierzu gab ein gelegentlich von Jacobi verwendeter Gedanke den Anlaß¹⁾; die Erinnerung an diese Überlegungen erst war es, *die die praktische Durchführung von Boltzmanns Idee möglich machte.*

3. Änderung des Gebietes: An Stelle des Quadrats können andere einfach zusammenhängende Gebiete der Ebene treten, die etwa durch einen Treppenpolygonzug oder, allgemein zu reden, durch eine gezeichnet vorliegende Kurve begrenzt sind.

4. Ersetzung des rechtwinkligen Parallelkoordinatennetzes durch andere isotherme Koordinaten, die der Randform angepaßt sind. Insbesondere kommt das von Runge mit bestem Erfolg verwendete Netz isotherm geteilter Polarkoordinaten in Betracht.

5. Anwendung auf die konforme Abbildung des Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf das Kreisinnere.

¹⁾ Jacobi gibt an, wie man lineare Gleichungen, deren unmittelbare Lösung unbequem ist, einem iterierenden Approximationsverfahren zugänglich machen kann (Ges. Werke III (Berlin 1884), S. 467—478). In erster Linie denkt Jacobi an die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate.

Ist — durch eine eigentümliche aufs engste mit den jetzt so viel genannten „Verzerrungssätzen“ zusammenhängende Methode — diese Abbildung einmal geleistet, so ist damit (wovon auch Runge Gebrauch macht) die Randwertaufgabe für dieses Gebiet auf die Randwertaufgabe für den Kreis zurückgeführt. Wir werden weiter gehen und zeigen, wie man ein schlichtes, von einer äußeren und einer inneren Randkurve begrenztes Gebiet der Ebene konform auf das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen abbilden kann. Diese Aufgabe, bei der bekanntlich nur der Radius des einen Kreises willkürlich gewählt werden kann, hat auch eine hervorragende praktische Bedeutung für die Bestimmung des Auftriebs von Zweideckern¹⁾.

6. Ansatz für die Lösung der Randwertaufgabe im Raum, auf die Buchholz (später Richardson) in diesem naheliegenden Zusammenhang hingewiesen hat. Mit gehöriger Geduld wird auch das „ungelöste Problem Dirichlets“, die Lösung der Randwertaufgabe für den Würfel, der wirklichen Berechnung zugänglich. Freilich, zu geschlossenen Ausdrücken, die sich aus bekannten Funktionen und Operationssymbolen zusammensetzen, gelangt man von den Differenzgleichungen aus nicht. Aber es läßt sich z. B. die Temperaturverteilung im Innern eines Berges bei gegebenen Oberflächenwerten, dieses in der Literatur über Tunnelbau vielfach behandelte Problem, auf diesem Wege angreifen. Nebenbei bemerkt: Tabellarische Lösung, das war doch ursprünglich einer der Endzwecke analytischer Untersuchungen, und, wo die Zurückführung auf „bekannte Funktionen“ — also bekannte Tabellen — nicht gelingt, da setzt eben die angewandte Mathematik ein, die in jedem Fall den Weg zur unmittelbaren Tabulierung sucht.

Am geeignetsten wäre für das zu beschreibende Verfahren die Bezeichnung: *Methode des arithmetischen Mittels*. Da sie aber durch die grundlegenden Forschungen von C. Neumann

¹⁾ Die Kutta-Joukowski-Theorie des Auftriebs eines Tragflächenprofils (diese Berichte 1910 und 1911) erfordert die Ermittlung konformer Abbildungen. Vgl. auch v. Mises, Z. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, S. 157 ff. — Vgl. auch unten § 4, 3.

bereits in anderer Bedeutung festgelegt ist, so wählen wir das Wort *Ermittlung*, das den Gang der Rechnung vollkommen wiedergibt.

§ 2. Die direkte Lösung des Gitterproblems.

1. Die Randwertaufgabe für Quadrat, Rechteck und Würfel. Eine erste ganz rohe Annäherung für die Lösung der Randwertaufgabe beim Quadrat, zugleich die exakte Lösung der Differenzgleichung, oder, wie wir anschaulicher sagen wollen, des *Gitterproblems* für $n = 2$ beim Quadrat wäre, daß man dem Mittelpunkt des Quadrates, als Funktionswert das arithmetische Mittel der vier für die Mittelpunkte der Seiten vorgeschriebenen Werte zuweist.

Wir wollen noch die Ergebnisse für $n = 4$ (neun Punkte im Innern) und $n = 6$ (25 Punkte im Innern) mitteilen, teils in Form einer Tabelle der *Gewichte*, teils in Form einer Tabelle der *Koeffizienten* der Randwerte.

Für $n = 4$ geben die folgenden Tabellen die Gewichte

	1	2	1		11	37	11		
1	.	.	.	1	11	.	u_{12}	.	11
2	.	u_{22}	.	2	7	.	.	.	7
1	.	.	.	1	3	.	.	.	3
	1	2	1		3	5	3		
	[p] = 16				[p] = 112				

	67	22	7		
	67	u_{11}	.	.	7
	22	.	.	.	6
	7	.	.	.	3
	7	6	3		
	[p] = 224				

Sie drücken aus, mit welchen Gewichten die 12 Werte am Rande zu versehen sind, um den betreffenden Wert der Gitterfunktion zu berechnen. Man hat also, um das gewünschte

$u_{i,k}$ zu erhalten, die Summe der Funktionswerte in den Randpunkten des Gitters, jedes Glied multipliziert mit seinem Gewicht, zu bilden und dann durch die betreffende Gewichtsumme $[p]$ zu teilen. Das folgende einfache Beispiel mit den Randwerten 1, 2, 3 und 4

$$\begin{array}{rcc}
 a_{01} = 1 & a_{02} = 1 & a_{03} = 1 \\
 a_{10} = 4 \quad u_{11} = \frac{35}{14} = 2,50 & u_{12} = \frac{109}{56} = 1,95 & u_{13} = \frac{25}{14} = 1,79 \quad a_{14} = 2 \\
 a_{20} = 4 \quad u_{21} = \frac{171}{56} = 3,05 & u_{22} = \frac{5}{2} = 2,50 & u_{23} = \frac{123}{56} = 2,20 \quad a_{24} = 2 \\
 a_{30} = 4 \quad u_{31} = \frac{45}{14} = 3,21 & u_{32} = \frac{157}{56} = 2,80 & u_{33} = \frac{35}{14} = 2,50 \quad a_{34} = 2 \\
 a_{41} = 3 & a_{42} = 3 & a_{43} = 3
 \end{array}$$

wird ohne weiteres verständlich sein, wenn auch die ersten Zwischenrechnungen fortgelassen sind.

Für $n = 6$, also bei 25 inneren Gitterpunkten, steigt die Gewichtsumme — nachdem selbstverständlich die Gewichte so gewählt sind, daß sie keinen gemeinsamen Teiler mehr haben — im ungünstigsten Fall u_{12} immerhin schon auf 102960 an.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 3 & 6 & 8 & 6 & 3 \\
 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\
 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\
 8 & \cdot & \cdot & u_{33} & \cdot & \cdot & 8 \\
 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 \\
 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\
 & & 3 & 6 & 8 & 6 & 3 \\
 & & [p] & = & 104 & &
 \end{array}$$

Es mag daher genügen, die Gewichtstabelle nur für den Mittelpunkt (u_{33}) anzugeben, im übrigen aber nur die Koeffizienten, also die Gewichte dividiert durch die Gewichtsumme $[p]$ auf vier Dezimalen, hier mitzuteilen. Die jeweils wegen der Symmetrie von selbst mitgegebenen Koeffizienten brauchen nicht nochmals geschrieben zu werden. Wir schreiben sie in der Folge an, daß wir zunächst mit dem Koeffizienten von a_{01}

beginnen und dann den Rand des Quadrats im Sinne des Uhrzeigers umlaufen.

Für u_{11} : 0,3012, 0,1035, 0,0402, 0,0169, 0,0064;
0,0064, 0,0088, 0,0079, 0,0055, 0,0027.

Für u_{22} : 0,0720, 0,1439, 0,0928, 0,0492, 0,0208;
0,0208, 0,0341, 0,0322, 0,0227, 0,0114.

Für u_{33} : 0,02885, 0,0577, 0,0769 usw.

Bei den Koeffiziententabellen für u_{13} und u_{23} beginnen wir mit dem Koeffizienten von a_{03} und enden mit dem von a_{53} . Es kommt

Für u_{13} : 0,3483, 0,1203, 0,0402;
0,0402, 0,0405, 0,0288, 0,0172, 0,0079;
0,0079, 0,0143, 0,0170.

Für u_{23} : 0,1527, 0,0928, 0,0405;
0,0405, 0,0690, 0,0577, 0,0367, 0,0172;
0,0172, 0,0322, 0,0396.

Die Koeffiziententabelle für u_{12} endlich zeigt gar keine Symmetrie mehr, ist daher vollständig anzuschreiben.

Für u_{12} : 0,1035, 0,3420, 0,1203, 0,0466, 0,0169;
0,0169, 0,0208, 0,0172, 0,0114, 0,0055;
0,0055, 0,0106, 0,0143, 0,0143, 0,0088;
0,0088, 0,0208, 0,0404, 0,0720, 0,1035.

Der Koeffizient des dem betreffenden u_{ik} nächsten Randpunktes wurde jedesmal unterstrichen, er hat immer den größten Wert in der Reihe; die Koeffizienten nehmen selbstverständlich mit zunehmender Entfernung von Gitterpunkt und Randpunkt ab.

Ob man auf diesem Wege zu einem Gesetz gelangt, mag dahingestellt bleiben; jedenfalls gelangt man bald zu einem Bild des Verlaufes, das für viele praktische Zwecke eine ausreichende Orientierung gibt.

Beiläufig seien noch einige Bemerkungen über *Rechteck* und *Würfel* gestattet. Bei dem Rechteck mit $3 \cdot 7 = 21$ inneren Gitterpunkten steigt die Gewichtsumme schon auf 161 352 128 an!¹⁾ Die Rechnung wurde durch Anwendung eines *Ver-schmelzungsverfahrens* durchgeführt, das Verwandtschaft mit den Methoden der Potentialtheorie zeigt: Man legt zwei Quadrate, die je neun innere Gitterpunkte aufweisen, so aneinander, daß die rechte Seite des ersten mit der linken des zweiten zusammenfällt, drückt dann die neun Werte

$$u_{ik} \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3)$$

und die neun Werte

$$u_{ik} \quad (i = 1, 2, 3; k = 5, 6, 7)$$

durch die vorgeschriebenen Randwerte auf der linken und rechten Hälfte des Rechtecks aus und die unbekanntes u_{14} u_{24} u_{34} auf der mittleren Vertikalen. Nimmt man dann noch die drei Gleichungen hinzu, die aus dem Verbindungsstück

$$\begin{array}{ccc} & a_{14} & \\ u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ & a_{44} & \end{array}$$

entstehen, also die Gleichungen, die aus den Gewichtstabellen

$$\begin{array}{ccc} 15 & & 1 & & 1 \\ 15 & u_{14} & 15 & & 1 & . & 1 \\ 4 & . & 4 & 4 & u_{24} & 4 & 4 & . & 4 \\ 1 & . & 1 & 1 & . & 1 & 15 & u_{34} & 15 \\ & 1 & & & 1 & & & 15 & \\ [p] = 56 & & [p] = 14 & & [p] = 56 & & & & \end{array}$$

abzulesen sind, so kann man die 21 Gleichungen lösen *mit Benützung früherer Ergebnisse*.

¹⁾ Zu ähnlichen Zahlenungetümen gelangt Runge bei der Integration von $\Delta u = \text{const}$ (Z. f. Math. u. Phys. 56 (1908), S. 225—233), wo 43 Unbekannte zu bestimmen waren.

Will man allgemein die Koeffizienten einer durch Verschmelzung zweier Figuren entstehenden Figur bestimmen, so ist dabei ein mißlicher Umstand zu beachten: Es ist schwer, die vorzuschreibende Genauigkeit für die Koeffizienten der Teilfiguren und des Verschmelzungstreifens anzugeben, die erforderlich wäre, um bei der Gesamtfigur die Koeffizienten auf eine vorgeschriebene Anzahl von Dezimalen genau zu erhalten!

Endlich wollen wir noch ein Ergebnis für den *Würfel* anführen bei 125 inneren Gitterpunkten, also 25 Punkten auf jeder Seitenfläche. Im Raum hat man die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

zu ersetzen durch die Differenzgleichung

$$D_2 u \equiv u(x - \varepsilon, y, z) + u(x + \varepsilon, y, z) + u(x, y - \varepsilon, z) + u(x, y + \varepsilon, z) + u(x, y, z - \varepsilon) + u(x, y, z + \varepsilon) - 6u(x, y, z) = 0$$

und man erhält in dem betrachteten Fall, wenn man den Wert der Gitterfunktion im Mittelpunkt berechnen will, auf jeder Seitenfläche dieselbe, selbstverständlich wieder in sich symmetrische Gewichtstabelle

5	10	13	10	5
10	21	29	21	10
13	29	44	29	13
10	21	29	21	10
5	10	13	10	5

die auch wieder die überall erkennbare qualitative Verteilung mit Gewichtsmaximum bei dem Punkt der Berandung scharf hervortreten läßt, der dem inneren Gitterpunkt — hier also dem Mittelpunkt des Würfels — am nächsten liegt. Die Gewichtssumme ist hier

$$6 \cdot \{44 + 4(29 + 21 + 13 + 5) + 8 \cdot 10\} = 2376.$$

2. Die Konvergenz der Gitterfunktion gegen die harmonische Funktion. Wir glauben, mit dem rauen Urteil beginnen zu müssen, daß eine *allgemein gehaltene* Untersuchung der Konvergenz der Gitterfunktion gegen die gesuchte

harmonische Funktion keinen Wert hat, so fest wir überzeugt sind, daß diese Konvergenz bei zunehmender Verdichtung des Gitters und Entnahme der vorzuschreibenden Werte der Gitterfunktion in den Randpunkten aus dem Werteverrat der am Rande vorgeschriebenen, im Innern zu bestimmenden harmonischen Funktion eben gegen diese Funktion hin sehr gut fortschreitet. Gewiß, man kann sehr wohl eine Schätzung vornehmen, bei der man die Gitterfunktion zerlegt in die harmonische, vermehrt um ein Restglied, dessen einer Faktor die dritte Potenz der Intervallgröße ε ist, während der andere durch ein mit Zahlenkoeffizienten versehenes Aggregat aus den Mittelwerten der dritten partiellen Differentialquotienten gegeben ist¹⁾. Aber diese dritten Differentialquotienten werden ja nur unter sehr engen Voraussetzungen im *ganzen Innern* innerhalb endlicher Schranken bleiben! Dieses schwere Bedenken gegen eine *gleichmäßige* Restschätzung ließe sich ja zum Teil durch die Überlegung besänftigen, daß man bei n^2 Punkten im Innern (n eine *gegebene* Zahl) doch niemals in die Nähe des kritischen Randes kommt, wo die Endlichkeit der Differentialquotienten aufhört.

Jedenfalls ist die Konvergenz der Gitterfunktion gegen die — *als existierend vorausgesetzte* — Lösung der Randwertaufgabe durch eine allen Fällen gerecht werdende Methode nur schwer zu erweisen, und um so schlimmer scheint es zu stehen mit dem Versuch, gar erst aus der Gitterfunktion für $\limes n = \infty$ die Existenz der Lösung der Randwertaufgabe nachweisen zu wollen!

Viel günstiger scheinen die Dinge zu liegen, wenn man z. B. die Differentialgleichung

$$\Delta u = k^2 u$$

und die zugeordnete Differenzgleichung

$$D_2 u \equiv u(x - \varepsilon, y) + u(x + \varepsilon, y) + u(x, y - \varepsilon) + u(x, y + \varepsilon) - 4u(x, y) = \varepsilon^2 k^2 u(x, y)$$

betrachtet.

¹⁾ Ähnlich bei Richardson, a. a. O., p. 310.

Wenn man nämlich für $\Delta u = 0$ und $\Delta u = k^2 u$, vielmehr für die beiden zugeordneten Differenzgleichungen die fortschreitende Teilung in der Weise vornimmt ($n = 2, 4, 8, 16 \dots$), daß jeder bei einer Teilung auftretende Gitterpunkt bei allen folgenden wieder vorkommt, so zeigt sich, daß die Werte

$$u(x, y) \dots \left(x = \frac{\mu}{2^m}, \quad y = \frac{\nu}{2^m} \dots \mu, \nu, m \text{ gegeben} \right)$$

der Lösung der ersten Differenzgleichung mit zunehmender Feinteilung des Netzes eine (selbstverständlich konvergente) nicht monotone Folge bilden, während diese Folge bei der allgemeineren Differenzgleichung von Anfang an monoton ist und jedenfalls auch bei anderen Beispielen von einer bestimmten Stelle an monoton wird. Wenn sich der monotone Charakter der Folge erweisen läßt, wird der Konvergenzbeweis gewiß leichter zu führen sein. So scheinen alle näheren Umstände darauf hinzudeuten, daß auf dem Wege über die Differenzgleichung die Existenz der Lösung der Randwertaufgabe zuerst für die allgemeinere Differentialgleichung geführt werden kann und dann wohl auch durch Grenzübergang für $k = 0$. Es würde sich dann bei der „Ermittlungsmethode“ Boltzmanns genau wiederholen, was C. Neumann für seine Methode des arithmetischen Mittels festgestellt hat¹⁾: daß sie nämlich bei von Null verschiedenem k leichter zum Existenzbeweis führt, als für $k = 0$.

So viel vorläufig über die Durchführung der Idee des Boltzmannschen „Existenzbeweises“.

3. Ein Beispiel. Wieweit die Übereinstimmung zwischen Gitterfunktion und harmonischer Funktion „unter günstigen Umständen“ gehen kann, zeigt das Beispiel der harmonischen Funktion

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

Berechnet man sie für die Gitterpunkte

$$x = \frac{k}{8}, \quad y = \frac{l}{8} \dots (k, l = 0, 1, \dots 8),$$

¹⁾ Siehe Math. Enc. II A 7 c: Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Sommerfeld), Nr. 11.

so gilt die Differenzgleichung im Quadrat genau bis auf drei Einheiten der fünften Dezimalstellen! Einige wenige Zahlen dieses Beispiels wollen wir anführen.

Es ist

$$\begin{aligned} u(0, \frac{1}{2}) &= u(\frac{1}{2}, 0) = u(1, 0) = u(0, 1) = 0 \\ u(1, \frac{1}{2}) &= 0,43848, \quad u(\frac{1}{2}, 1) = 0,56329, \\ u(1, 1) &= 0,98889 \end{aligned}$$

und endlich

$$u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0,24982.$$

Mit diesem wirklichen Wert ist der ganz roh gebildete Mittelwert

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(u(0, \frac{1}{2}) + u(\frac{1}{2}, 0) + u(1, \frac{1}{2}) + u(\frac{1}{2}, 1)) = 0,25405$$

schon in sehr guter Übereinstimmung.

Man kann das Mittel auch — durch Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\pi:4$ — so bilden, daß man von den Ecken statt von den Seitenmitten ausgeht (*Diagonal-* oder *Quincunx-Mittel*) und erhält dann

$$\bar{f}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(u(0, 0) + u(0, 1) + u(1, 0) + u(1, 1)) = 0,24722.$$

Noch näher kommt man dem richtigen Wert, wenn man die Näherungswerte mittelt mit Rücksicht auf ihre Gewichte, die jedenfalls den Abständen des Gitterpunktes $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ von den zur Mittelbildung herangezogenen (hier sehr weit entfernten) „Nachbarpunkten“ umgekehrt proportional anzusetzen sind. Man erhält dann in unserem Fall

$$\frac{\sqrt{2}f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + 1 \cdot \bar{f}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{1 + \sqrt{2}} = 0,24980 \text{ (statt } 0,24982).$$

Dieses Beispiel legt nun den Gedankengang nahe, der zum Ziel führt: Sollte man nicht zur Berechnung der Gitterfunktion gelangen, indem man zunächst durch rohe Mittelung einen Wert für den Mittelpunkt des Quadrats gewinnt, dann unter Benützung dieses Wertes weiter rechnet usw.? Und kann man nicht ein auf diesem oder anderem Weg erhaltenes System von Rohwerten der Funktion für n^2 Gitterpunkte nachträglich aus-

gleich, so daß man den gesuchten Werten, die ja durch direkte Auflösung von n^2 Gleichungen nur auf dem Wege langer und mühseliger Rechnung zu gewinnen wären, unbegrenzt näher kommt?

§ 3. Die Anwendung der Methode von Jacobi.

1. Die Gitterfunktion beim Quadrat. Es handelt sich um die Auflösung des Gleichungssystems

$$4u_{ik} = u_{i-1,k} + u_{i+1,k} + u_{i,k-1} + u_{i,k+1} \\ (i, k = 1, 2 \dots n-1),$$

wobei die Randwerte

$$u_{0k} = a_{0k}, \quad u_{nk} = a_{nk}, \quad u_{i0} = a_{i0}, \quad u_{in} = a_{in}$$

als gegebene Zahlen zu betrachten sind. Die Gleichungen entstehen aus der Forderung, daß die Summe der Quadrate der Differenzen

$$\sum \sum \{ (u_{i-1,k} - u_{i,k})^2 + (u_{i+1,k} - u_{i,k})^2 + (u_{i,k-1} - u_{i,k})^2 \\ + (u_{i,k+1} - u_{i,k})^2 \}$$

über alle inneren Punkte des Quadrats erstreckt, bei gegebenen Randwerten möglichst klein werden soll — das war der an sich sehr nahe liegende Gedanke von Boltzmann. Auf der andern Seite hat Jacobi an der oben erwähnten Stelle die approximative Auflösung der „Normalgleichungen“ gelehrt, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt. *Da liegt es eigentlich auf der Hand, die Jacobische Methode auf die Boltzmannschen Differenzgleichungen anzuwenden.*

Wir beschreiben das Verfahren für unseren Zweck, eine Modifikation des Gedankens von Jacobi, und beweisen dann seine Konvergenz, die sehr einfach zu erbringen ist.

Wenn man (bei gegebenem n) zunächst irgend welche Rohwerte u_{ik}^0 den inneren Gitterpunkten zuordnet und dann die Werte der dem Rande nächsten inneren Reihen und Zeilen mit Hilfe der Differenzgleichung selbst ausgleicht, also die Rohwerte

$$\begin{aligned}
 u_{ik}^0 & \quad (i = 1; k = 1, \dots, n - 1) \\
 & \quad (i = n - 1; k = 1, \dots, n - 1) \\
 & \quad (i = 1, \dots, n - 1; k = 1) \\
 & \quad (i = 1, \dots, n - 1; k = n - 1)
 \end{aligned}$$

jeweils ersetzt durch

$$u'_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k}^0 + u_{i+1,k}^0 + u_{i,k-1}^0 + u_{i,k+1}^0)$$

— die Randwerte sind fest gegeben — so wird dadurch die Gitterfunktion der ersten und letzten inneren Zeile und Reihe verbessert. Mit diesen verbesserten Werten und den Rohwerten der dritten und $(n - 3)^{\text{ten}}$ Reihe und Zeile verbessert man die Werte in der zweiten und $(n - 2)^{\text{ten}}$ Zeile und Reihe usw. Ist man bis zum innersten Quadrat vorgeschritten, so beginnt man aufs neue von außen her, rechnet bis zur Mitte durch usw.

Wir behaupten, daß die in dieser Weise verbesserten Werte in geometrischer Progression gegen die gesuchten Werte konvergieren.

Wir wissen, daß es bei gegebenen Randwerten eine einzige, wohl bestimmte Gitterfunktion gibt, welche die Differenzengleichung streng erfüllt und daher durch das Approximationsverfahren nicht mehr verändert wird. Diese strenge Lösung sei mit U bezeichnet, bzw. mit U_{ik} . Ist dann v_{ik} ein beliebiger Ansatz, aber mit richtigen Randwerten, so ist zu zeigen, daß die Methode, angewendet auf

$$u_{ik}^0 = U_{ik} - v_{ik}$$

bei unbegrenzter Wiederholung die Werte dieser Gitterfunktion gegen Null konvergieren läßt.

Zum Beweis genügt es also völlig, wenn wir zeigen, daß bei einheitlich vorgeschriebenen Randwerten Null die nach dem angegebenen Verfahren verbesserten Werte nach Null konvergieren. Sei in diesem Falle $-M_1$ der kleinste negative und $+M_2$ der größte positive unter den willkürlich angenommenen Rohwerten, so liegen nach der ersten Verbesserung die Werte auf dem ersten inneren Ring von Gitterpunkten zwischen den Schranken

$$-\frac{3M_1}{4} \quad \text{und} \quad +\frac{3M_2}{4}.$$

Verbessert man dann auf dem zweiten Innenring, so erhält man für die verbesserten Werte die Schranken

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{3M_1}{4} + 3M_1 \right) = -M_1 \left(1 - \frac{1}{16} \right)$$

und
$$\frac{1}{4} \left(\frac{3M_2}{4} + 3M_2 \right) = M_2 \left(1 - \frac{1}{16} \right)$$

Allgemein gelten für den k^{ten} Innenring die Schranken

$$-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^{k-1}} + 3 \right) M_1 = -M_1 \left(1 - \frac{1}{4^k} \right)$$

und
$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^{k-1}} + 3 \right) M_2 = M_2 \left(1 - \frac{1}{4^k} \right)$$

Für den innersten Ring, der sich übrigens bei geradem n auf einen Punkt reduziert, erhält man also nach Durchführung der ersten Verbesserung von außen nach innen die Schranken

$$-M_1 \left(\frac{1}{4^{n_1}} \right) \text{ und } M_2 \left(1 - \frac{1}{4^{n_1}} \right) \cdots n_1 = \frac{n}{2} \text{ bzw. } \frac{n-1}{2}.$$

Auf jeden Fall liegen nach der ersten vollständig durchgeführten Verbesserung alle Werte zwischen den Schranken

$$-M_1 \alpha \text{ und } M_2 \alpha,$$

wobei α ein echter Bruch ist. Die nächste Verbesserung verringert die Schranken auf

$$-M_1 \alpha^2 \text{ und } M_2 \alpha^2,$$

und damit tritt die Konvergenz klar zu Tage, die selbstverständlich viel rascher fortschreitet, als dieses äußerst rohe Abschätzungsverfahren angibt.

Wie aber hat man die ersten Rohwerte zu wählen? Auf diese Frage gibt das Beispiel § 2, 3 die Antwort. Im Falle $n = 4$, wobei sich auf Grund der Gewichtstabelle (§ 2, 1) übrigens die Rechnung noch leicht direkt durchführen ließe, setzt man zuerst

$$u_{22}^0 = \frac{1}{4} (a_{02} + a_{20} + a_{42} + a_{24}),$$

dann berechnet man auf den Diagonalschnittpunkten der vier Teilquadrate

$$u_{11}^0 = \frac{1}{4}(a_{00} + a_{02} + a_{20} + u_{22}^0)$$

usw., sodann

$$u_{12}^0 = \frac{1}{4}(a_{02} + u_{11}^0 + u_{13}^0 + u_{22}^0)$$

usw. und schließlich gleicht man aus, jeweils mit Benützung der nächsten Nachbarwerte. Man kann aber mit der vorläufigen Interpolation auch ohne Schaden noch einige Schritte weiter gehen, also von $n = 4$ zu $n = 8, 16 \dots$ fortschreiten, ohne sich weit von den wirklichen gesuchten Werten zu entfernen. So wurde z. B. das oben § 2, 3 besprochene Beispiel behandelt, das nach dieser Methode auf vier Dezimalen berechnet, bei fünfmaliger Durchrechnung Übereinstimmung bis auf 2 Einheiten dieser Dezimale ergab.

Selbstverständlich erleichtern Symmetrieeigenschaften der zu berechnenden Funktion die Feinteilung sehr. Ist z. B. auf einem Quadrat als Randwert $+1$ für das eine Paar, -1 für das andere Paar von Gegenseiten vorgeschrieben, so ist auf der Diagonale die gesuchte Funktion Null und es genügt die Berechnung für einen Oktanten, wofür man in sehr kurzer Zeit die Tabelle findet:

0,789	0,784	0,766	0,733	0,677	0,579	0,395	0
0,591	0,581	0,549	0,490	0,395	0,243	0	
0,414	0,401	0,359	0,285	0,170	0		
0,266	0,251	0,205	0,122	0			
0,150	0,133	0,084	0				
0,066	0,050	0					
0,016	0						
0							

die für $15^2 = 225$ innere Punkte ausreicht. Die starke Änderung in der Ecke erklärt sich aus der Unstetigkeit des von $+1$ zu -1 springenden vorgeschriebenen Wertverlaufes am Rande. Übrigens ist hier leicht durch nahe liegende Hilfsmittel der Funktionentheorie nachzuhelfen, die bei allen derartigen Aufgaben zur Verfügung stehen. Bezeichnet man den

Winkel, den ein von der Ecke ausgehender Strahl mit der oberen Quadratseite einschließt, durch φ , so ist in der Nähe der Ecke

$$u = 1 - \frac{4\varphi}{\pi}$$

zu setzen und damit sind die Richtungen bekannt, unter denen die Linien $u = \text{const.}$ von den Ecken ausgehen.

An solchen Stellen kann man sich auch dadurch helfen, daß man hier das Netz enger wählt, also die Randwertaufgabe nochmals für ein kleineres Gebiet löst, wobei einerseits die gegebenen Randwerte, andererseits, soweit nämlich der neue Rand im Innern des Grundgebietes verläuft, auf diesem die durch graphische und numerische Interpolation ergänzten Werte der bis dahin durchgeführten Rechnungen zu benützen sind.

[Analytisch könnte, wenn $u(x, y)$ eine erste Annäherung, eine für jeden Punkt gegebene Funktion ist, das Verfahren dahin verfeinert werden, daß man um jeden Punkt im Innern einen kleinen, den Rand nicht überschreitenden Kreis legt und $u(x, y)$ jedesmal durch den Mittelwert der Funktion auf der Kreisperipherie ersetzt. Man hätte dann die Radien dieser Kreise nach Null konvergieren zu lassen, um die harmonische Funktion zu erhalten. Auf diese Weise ließe sich der Grundgedanke von Boltzmann umformen, um für die Analysis verwendbar zu werden]. —

Wir haben bisher nur vom Quadrat gesprochen. Ist der Rand sodann ein Treppenpolygonzug, so ändert sich im Grunde nichts am Konvergenzbeweis, nur tritt an die Stelle der Zahl $\frac{1}{4}$ die Zahl $\frac{1}{8}$, woraus zu entnehmen ist, daß auch rechnerisch die Konvergenz etwas langsamer fortschreiten wird.

Liegt als Rand eine gezeichnete oder analytisch gegebene Kurve vor, so ist dort die Differenzgleichung in leicht erkennbarer Weise umzuwandeln. Sind z. B. $P(x, y)$, $P_1(x + \varepsilon, y)$, $P_2(x, y - \varepsilon)$ Punkte im Innern mit „Rohwerten“ u^0 , u_1^0 , u_2^0 und schneiden die durch P gehenden Parallelen zu den Achsen die Randkurve in den Punkten $S_1(x - \alpha_1 \varepsilon, y)$ bzw. $S_2(x, y + \alpha_2 \varepsilon)$, wobei α_1 und α_2 zwischen Null und Eins liegen, sind ferner

in diesen Punkten die Randwerte a_1 und a_2 vorgeschrieben, so wird der verbesserte Wert in P

$$u' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_1 + a_1 u_1^0}{1 + a_1} + \frac{a_2 + a_2 u_2^0}{1 + a_2} \right\}$$

2. Die Ermittlung der konjugierten Funktion. Verwendung isothermer Netze. Mit der Funktion $u(x, y)$, die man für ein hinreichend enges Gitter berechnet hat, ist zugleich bis auf eine Integrationskonstante die konjugierte harmonische Funktion $v(x, y)$ bestimmt, welche die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned}$$

oder allgemein zu reden

$$\frac{\partial v}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial s_2}$$

erfüllt, wobei in der letzten Formel die Differentialquotienten nach zwei zueinander senkrechten, im positiven Drehungssinn aufeinander folgenden Richtungen auftreten.

Je enger das Netz, mit um so mehr Recht kann man den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzen. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir einmal annehmen, es sei u berechnet für die Punkte

$$\begin{aligned} y = 0, x = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots & \quad (u = u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0 \dots), \\ y = \varepsilon, x = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots & \quad (u = u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1 \dots). \end{aligned}$$

Wenn man dann beachtet, daß der Differentialquotient in der Mitte des Intervalls durchschnittlich dem Differenzenquotienten am nächsten kommt, so gelangt man dazu, auf der Geraden $y = \varepsilon : 2$ vom Anfangswert $v(0, \varepsilon/2) = c$ ausgehend, die Werte aufzutragen

$$\begin{aligned} v(\varepsilon/2, \varepsilon/2) &= c + \frac{1}{2}(u_1^1 - u_0^0), \\ v(3\varepsilon/2, \varepsilon/2) &= c + \frac{1}{2}(u_0^1 - u_0^0) + (u_1^1 - u_1^0) = v(\varepsilon/2, \varepsilon/2) + (u_1^1 - u_1^0) \\ v(5\varepsilon/2, \varepsilon/2) &= v(3\varepsilon/2, \varepsilon/2) + (u_2^1 - u_2^0) \end{aligned}$$

usw., also sind nur Rechnungen zu vollziehen, die sich bequem im Kopf ausführen lassen. Noch gewissenhafter wäre es freilich, die Simpsonsche Regel zu benützen. Man kann auch durch einen Punkt die Geraden oder auch ein Kurvenbüschel legen und auf jeder dieser Kurven die Schnittpunkte mit den Linien $v = \text{const.}$ bestimmen, sobald nur das Gefälle von u in der Richtung senkrecht dazu hinreichend genau bekannt ist. Die Linien $u = \text{const.}$ braucht man also gar nicht zu zeichnen. Selbstverständlich wird man zum Schluß die Augenprobe des Senkrechtschneidens der beiden Kurvenscharen nicht versäumen. Auf diese Weise kann man die Kurven

$$u = a, 2a, 3a, 4a, \dots$$

leicht mit den Orthogonaltrajektorien

$$v = c, c + a, c + 2a, \dots$$

zu einem isothermen Netz ergänzen.

Endlich kann man auch auf einem isothermen Netz, etwa Polarkoordinaten $(\log r, \varphi)$ oder elliptischen Koordinaten von vorneherein rechnen, statt auf rechtwinkligen Parallelkoordinaten, denn die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ bleibt ja erhalten, wenn man vom gewöhnlichen Koordinatensystem zu beliebigen isothermen Koordinaten übergeht. Man kann auch bei einer Aufgabe mit dem Netz wechseln in verschiedenen Teilen des Gebietes. Alles das sind Fragen, die mit ganz einfachen „strategischen“ Grundgedanken im einzelnen mit taktischem Geschick behandelt sein wollen, das durch Übung ziemlich schnell erworben wird.

3. Die Untersuchungen von Richardson. Schon die Vollständigkeit verlangt eine Stellungnahme zu der umfangreichen und verdienstvollen Arbeit Richardsons, die mir übrigens erst zu Gesicht kam, als meine Gedankengänge in allen Einzelheiten feststanden.

Bei Richardson findet sich derselbe Grundgedanke, nämlich die auch von Runge in seiner mehrfach angeführten

Arbeit gebrauchte Zurückführung der Differentialgleichung auf eine Differenzgleichung, sodann aber die Aufstellung und Durchführung von Überlegungen, welche gleichfalls das Ziel verfolgen „ausgehend von einer Werttabelle, die die Randbedingungen genau erfüllt und im Innern (für innere Gitterpunkte) den gesuchten Werten möglichst nahe kommt, nach bestimmten Methoden die Tabelle zu modifizieren und zu bewirken, daß sie sich unbegrenzt dem Integral der Differenzgleichung nähert“ (a. a. O., p. 318).

Der Weg aber ist ein völlig anderer, nicht die Jacobische, so einfache und handliche Approximaticusmethode.

Seine Methode erstreckt sich auf Differenzgleichungen, die aus der Forderung hervorgehen, „daß eine bestimmte homogene quadratische positive Funktion ein Minimum wird.“

Unsere auf Jacobi fußende Methode gilt jedenfalls auch für alle Differentialgleichungen, die aus der Forderung

$$\delta \iint \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + k^2 u^2 \right) dx dy = 0$$

oder jeder anderen durch Koordinatentransformation hervorgehenden entspringen. Denn einerseits kann Koordinatentransformation an ihrer Giltigkeit nichts ändern, andererseits gilt sie, wie wir sogleich sehen werden, für die aus dem genannten Variationsproblem folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 u.$$

Hier erhält man die erweiterte Differenzgleichung

$$\begin{aligned} u(x - \varepsilon, y) + u(x + \varepsilon, y) + u(x, y - \varepsilon) + u(x, y + \varepsilon) \\ = (4 + \varepsilon^2 k^2) u(x, y) \end{aligned}$$

und wenn man sie im Sinne von Jacobi zur Korrektur der angesetzten Rohwerte benützt, so erkennt man alsbald, daß die Konvergenz noch kräftiger ist als für den Fall $k^2 = 0$. — Im übrigen ist mit den hier aufgezählten Fällen das Anwendungsgebiet sicher noch nicht erschöpft. —

Richardson geht dann hauptsächlich auf physikalisch-technische Probleme ein, z. B. die Druckverhältnisse in Staudämmen und belegt seine Methoden durch umfangreiche Tabellen¹⁾.

Die Einführung beliebiger isothermer Systeme, die Berechnung von Paaren konjugierter harmonischer Funktionen und schließlich die Einbeziehung der konformen Abbildung, auf die besonderes Gewicht zu legen ist, lag den Zielen des englischen Autors fern.

§ 4. Die konforme Abbildung.

1. Die Technik der Köbeschen Methode. Es hieße Eulen nach Athen tragen, wollte man über die Bedeutung der konformen Abbildung des Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf das Kreisinnere sprechen, die P. Köbe gegeben hat — liegt doch bereits eine Literatur vor, welche diese Ideen dem klassischen Bildungsschatz der Mathematik einzuverleiben und einzuarbeiten als eines ihrer vornehmsten Ziele sich gesetzt hat²⁾. Da indessen neben der Bedeutung für die bis dahin ungelösten Probleme der Funktionentheorie auch ihre Wichtigkeit für praktische Durchführung sehr stark unterstrichen worden ist, so wäre es in diesem Zusammenhang geradezu eine Pflichtversäumnis, nicht zu der technischen Durchführung Stellung zu nehmen.

¹⁾ Über die Hilfsmittel des englischen Forschers gibt folgende Stelle Auskunft, die durch jeden Übersetzungsversuch nur verlieren würde und die deshalb in der Ursprache angeführt werden möge: „So far J have paid piece rates [Stücklohn] for the operation D_2u of about $n/18$ pence per coordinate point, n being the number of digits [Stellen]. The chief trouble to the computers has been the intermixture of plus and minus signs. As to the rate of working, one of the quickest boys [!] averaged 2000 operations D_2u per week, for number of three digits, those done wrong being discounted.“

²⁾ Z. B. seien genannt: E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, zweites Heft (Leipzig 1913). — L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung. Sammlung Göschen. Leipzig 1915.

Köbe benutzt bekanntlich die Abbildung¹⁾

$$\frac{\sqrt{a-w}}{1-\sqrt{\bar{a}}\sqrt{w}} = \sqrt{\frac{a-z}{1-\bar{a}z}},$$

wobei a und \bar{a} konjugiert imaginäre Zahlen sind, und $|a| < 1$ angenommen ist. Man kann übrigens a als reelle positive Zahl annehmen, wenn man immer noch Drehungen und Spiegelungen, die den Einheitskreis auf sich selbst abbilden, hinzunimmt. Will man jetzt die Köbesche Kette von Abbildungen durchführen und das Innere eines Gebietes, das den Einheitskreis nirgends überschreitet und für das der Nullpunkt ein innerer Punkt ist, konform auf das gesamte Innengebiet des Kreises abbilden, so ergibt sich die Folge von Schritten, die wir jetzt schildern wollen.

Man bestimmt auf dem Rand des abzubildenden Gebietes den einzigen — oder, falls mehrere vorhanden sind — einen dem Nullpunkt nächst gelegenen Punkt A . Man legt dann die x -Achse durch diesen Punkt und führt die Transformation aus mit $a = OA$. Auf der neuen Randkurve sucht man wieder den innersten Punkt A_1 und wiederholt die Transformation mit $a_1 = OA_1$ und Verlegung der positiven x -Achse durch A_1 . Dieses Verfahren ist unbegrenzt durchzuführen und verwandelt asymptotisch den Rand in die Peripherie des Einheitskreises.

Bei der ersten Transformation geht das Innere des von $x = a$ bis $x = 1$ aufgeschnittenen Einheitskreises über in das Gebiet, das teils von der Peripherie des Einheitskreises, teils

¹⁾ Die wesentliche geometrische Eigenschaft dieser Transformation ist, daß sie zwei bestimmte zueinander orthogonale Kreisbüschel der z -Ebene in zwei entsprechende der w -Ebene überführt. Die von ihr grundsätzlich nicht verschiedene Transformation

$$z = w + \frac{a^2}{w}$$

tritt in der Kuttaschen Theorie auf und dient hier dazu, die Berechnung des hydrodynamischen durch Zirkulationsstrom bedingten Auftriebs einer Tragfläche (senkrecht zur z -Ebene) mit kreisbogenförmigem Profil auf die entsprechende Berechnung für einen (die w -Ebene senkrecht schneidenden) Kreiszylinder zurückzuführen.

von dem innerhalb des Einheitskreises gelegenen Peripheriestück des Kreises begrenzt wird, der über dem Durchmesser $A_1 A_1'$ steht, wobei A_1 die Koordinaten $x = \sqrt{a}$, $y = 0$ und A_1' die Koordinaten $x = 1 : \sqrt{a}$, $y = 0$ besitzt. Jedem Punkt P werden zwei Punkte Q_1, Q_1' zugeordnet, die, nebenbei bemerkt, durch Spiegelung an dem Schnittkreis und der x -Achse auseinander hervorgehen. Uns interessiert aber hier nur der eine Teil, für den der Nullpunkt ein innerer Punkt ist.

Zur Vervollständigung der Abbildung ist zu beachten, daß die Kreise des hyperbolischen Büschels mit den Nullkreisen A und A' ($y = 0$, $x = 1 : a$) in die Kreise des hyperbolischen Büschels mit den Nullkreisen A_1 und A_1' übergehen. Dasselbe gilt dann auch für die Kreise der dazu orthogonalen elliptischen Büschel. Bei den erstgenannten Kreisen rechnet man einfach die Schnittpunkte mit der x -Achse aus, bei dem zweiten (elliptischen) Büschel und seinem Bild hat man zu beachten, daß im Punkt A die Winkeltreue aufhört und jeder Winkel bei der Abbildung durch den halben ersetzt wird. Danach ist

die Zeichnung auszuführen. Wir wählten hier (Fig. 1) $a = e^{-\frac{\pi}{8}}$, um ein isothermes Netz von 64 quadratischen Feldern sowohl in der z -Ebene wie in der w -Ebene bequem zeichnen zu können. Auf der linken Seite ist fast kein Unterschied zwischen beiden Figuren, Abweichungen machen sich naturgemäß um so mehr

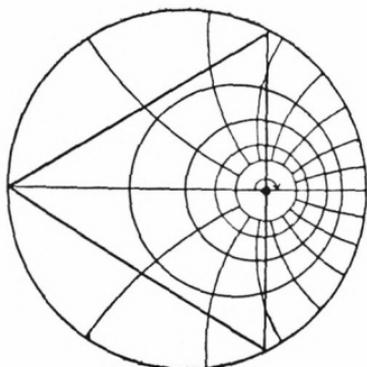


Fig. 1

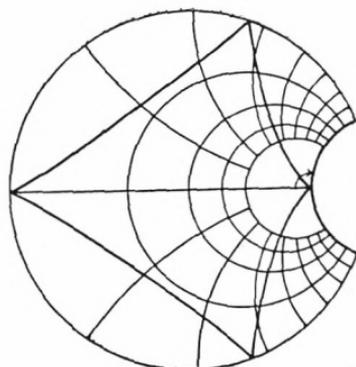


Fig. 2

bemerklich, je mehr man sich dem singulären Punkt nähert. In die beiden Figuren wurde dann noch ein Dreieck und sein erstes Bild eingezeichnet.

Damit ist der erste Schritt ausgeführt. Man hat dann weiter in diesem Bild den Randpunkt zu bestimmen (B), der dem Mittelpunkt am nächsten ist, und den auf der Verlängerung von OB aufgeschnittenen Kreis auf einen neuen Einheitskreis abzubilden, jetzt mit der Konstanten $b = OB$ an Stelle von a .

Im ganzen also hätte man sich eine Reihe von Paaren von „Köbenetzen“ anzulegen für verschiedene Zentralabstände des singulären Punktes — das muß im einzelnen dem Genauigkeitsbedürfnis des Richardsonschen „quick boy“, beziehungsweise seines gestrengen Auftraggebers überlassen werden — und den Rand so lange umzuzeichnen, bis er, bekanntlich mit einer Fülle von Ecken, der Kreisperipherie überall hinreichend nahe gekommen ist. Dabei darf aber auch die Umzeichnung des Innern nicht vergessen werden. Man wird also im Innern der abzubildenden Figur ein Gitter zeichnen, und hat sorgfältig darauf zu achten, daß bei der Umzeichnung dieser inneren Gitterpunkte genau verfahren wird. Dies erfordert seinerseits wieder eine möglichst engmaschige Anlage der benützten Köbenetze, zum mindesten jeweils in der Umgebung des singulären Punktes. Es dürfte sich empfehlen, A ein wenig außerhalb des Gebietsrandes bei den ersten Schritten anzunehmen, um eben die kritischen Stellen so lange wie möglich zu vermeiden.

Ein unbedingter Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß es rein zeichnerisch, allerdings unter Voraussetzung allergrößter Sorgfalt, durchgeführt werden kann.

Wir dürfen wohl nochmals betonen, daß diese Sorgfalt wegen der, sagen wir mindestens 10—20 mal erforderlichen Umzeichnung des inneren Netzes nicht aus dem Auge gelassen werden darf, da ja die Fehler sich leicht häufen können.

Auf diese Einzelheiten mußte wohl hingewiesen werden, denn der einmal apodiktisch aufgestellte Satz, daß nicht „zwischen reiner und angewandter Mathematik, sondern zwischen

richtiger und falscher Mathematik zu unterscheiden“ ist, erfordert doch wohl in anderen Regionen die Ergänzung, daß man sich über die technischen Einzelheiten einer zur Anwendung empfohlenen Methode Rechenschaft gibt nach dem — kategorisch ausgesprochenen — Grundsatz der angewandten Mathematik: „Zeichne so genau wie möglich und mißtraue Deinen Zeichnungen möglichst.“

2. Eine andere Methode. Nachdem die in § 3 entwickelte Boltzmannsche Methode der Lösung der Randwertaufgabe ausgearbeitet war, ergab sich die weitere Aufgabe, sie für die konforme Abbildung anzuwenden. Wir stellen uns also mit Runge die Aufgabe, für ein gegebenes Gebiet (von einfachem Zusammenhang) mit gegebenem „Quellpunkt“ die „Zirkulationslinien“ und die „Quell-Linien“, oder, wie wir sagen wollen, die „Niveaulinien“ und die „Kraftlinien“ zu ermitteln. Damit ist dann die konforme (oder vielmehr eine der ∞^3) Abbildung des Gebietes auf das Kreisinnere geleistet; den Niveaulinien entsprechen die konzentrischen Kreise ($\log r = \text{const.}$) und den Kraftlinien die Halbstrahlen ($\varphi = \text{const.}$). Wir bringen zunächst eine Figur mit sehr „allgemeinem“ Umriß, die gelegentlich eines Seminars nach der Rungeschen Methode auf Veranlassung von Herrn Geheimrat Finsterwalder gezeichnet worden ist.

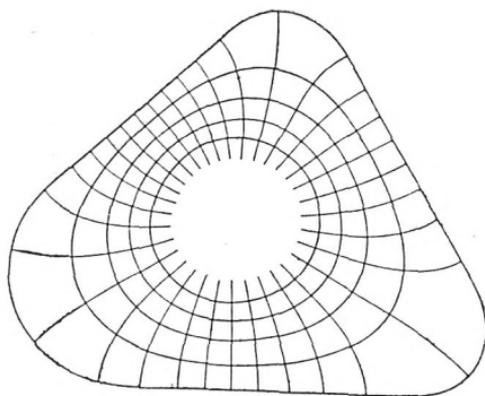


Fig. 3

Sodann aber geben wir die neue Methode an. Wir gehen zunächst von der Tatsache oder Erfahrung aus, daß die Niveaulinien in der Nähe des Quellpunktes nahezu kreisförmig sind, was ja auch unmittelbar aus der Reihenentwicklung

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

einer Abbildungsfunktion folgt. Mit Benützung dieses Umstandes berechnet man dann nach unserer Methode die Funktion, die sowohl auf dem Rand des Gebietes wie auf einem dem Quellpunkt „hinreichend nahe“ gelegenen Kreis einen konstanten Wert annimmt, selbstverständlich mit Benützung eines isotherm geteilten Polarkoordinatennetzes, wie es Runge empfohlen hat. Der Pol ist mit dem Quellpunkt zur Deckung zu bringen; auch nimmt man für die beiden an sich willkürlichen Konstanten runde Zahlenwerte. Die errechnete — vielmehr ermittelte und approximierte — Funktion wird, gleich const. gesetzt, *nahezu* die gesuchten Niveaulinien ergeben. Die Kraftlinien sind nach § 3, 2 ebenfalls zu bestimmen, können übrigens *ganz unabhängig* von den Niveaulinien gezeichnet werden, so bald auf die Gitterpunkte die Zahlenwerte der Niveaulinienfunktion eingetragen sind. Hervorzuheben ist, *daß dabei gerade auch die Ansatzpunkte der Kraftlinien am äußeren Rand genau berechnet werden können*, der bei der Köbeschen Methode ja in stark verbeultem Zustand der Kreisperipherie sich nähert.

Bei einspringenden Ecken häufen sich die Kraftlinien, aber hier kann man leicht durch Reihenentwicklung Genauigkeit erreichen. Selbstverständlich ist die Anlage eines isothermen Gitters erwünscht, dessen Kraftlinien im Quellpunkt unter gleichen Winkeln $\pi : 2^n$ einlaufen. Demgemäß hat man nachträglich die Niveaulinien auszusuchen bzw. zu interpolieren.

Das beigelegte Beispiel des Quadrates (Fig. 4), das nach dieser Methode gerechnet ist, zeigt deutlich die starke Tendenz der Niveaulinien, sich der Kreisgestalt zu nähern. Überhaupt, wenn das abzubildende Gebiet die Symmetrie des regulären n -Ecks besitzt und man als Quellpunkt den Mittelpunkt wählt,

so ist ja die Abbildung auf den Kreis (modulo einer Drehstreckung) gegeben durch

$$w(z) = z(1 + a_1 z^n + a_2 z^{2n} + \dots),$$

wobei die Koeffizienten reelle Zahlen sind. Hieraus geht „allgemein zu reden“ hervor, daß mit zunehmendem n die Schwankung von $|w(z)|$ bei konstantem $|z|$, wir wollen sie die „Rundung der Niveaulinien“¹⁾ nennen, in der Nähe des Quellpunktes stark zunimmt.

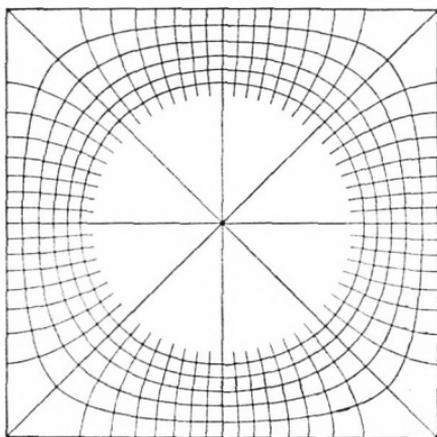


Fig. 4

Einen anderen, weitere Forschungen im Gebiet der „Verzerrungssätze“ erfordernden Gesichtspunkt gibt die folgende allgemeine Frage: Es sei

$$w(z) = z + \dots$$

die Abbildungsfunktion und es sei

$$m(\varrho) \leq |w(z)| \leq M(\varrho) \quad |z| = \varrho.$$

Dann soll die *Rundungsfunktion*

$$F(\varrho) = \frac{m(\varrho)}{M(\varrho)},$$

¹⁾ Vgl. a. Study, a. a. O., S. 110.

die für $\varrho = 0$ den Wert Eins annimmt, betrachtet werden. Verlangt wird vor allem, es soll, wenn $F(r)$ bekannt ist, der Verlauf an $F(\varrho)$ im Gebiet

$$r \geq \varrho \geq 0$$

geschätzt werden. Herr Bieberbach teilte mir auf meine schriftliche Anfrage mit, daß die Beziehung gilt

$$\left(\frac{R - \varrho}{R + \varrho}\right)^2 \leq F(\varrho) \leq 1,$$

wobei R die obere Schranke für die Radien der Kreise der z -Ebene ist, die durch die analytische Funktion noch auf ein schlichtes Gebiet der w -Ebene abgebildet werden¹⁾.

Die Schätzung der Rundungsfunktion wäre notwendig für die Kritik der neuen Methode. *Im übrigen gibt auch hier die Rechnung selbst eine Richtschnur.* Wenn nämlich die Schwankungen der errechneten harmonischen Funktion auf dem Kreis, der dem innersten bei der bisherigen Rechnung benutzten Kreis (auf dem die Funktion konstant angenommen wurde), nach außen als nächster folgt, sehr gering sind, so genügt die Approximation. Wenn sie aber noch zu groß sind, so geht man auf den nächstinneren Kreis des isothermen Netzes zurück.

Die neue Methode kann bei analytisch gegebenen Konturen, wie z. B. dem Quadrat, rein rechnerisch durchgeführt werden; *sie bedarf zur Durchführung keines gezeichneten Entwurfes.* Zur nachträglichen Zeichnung der Niveau- und Kraftlinien ist selbstverständlich ein so sorgfältig gezeichnetes isothermes Polarkoordinatennetz erwünscht, wie es mir Herr Runge gütigst zur Verfügung gestellt hat.

Bei der Rechnung genügen mehr schematisch angelegte Netze. Man braucht für eine Abbildung zwei Netze. Auf dem ersten trägt man in den Ecken eines weitmaschigen Netzes — also mit Unterdrückung der feineren Maschen — geschätzte

¹⁾ In einer späteren Mitteilung hat Herr Bieberbach die Schätzung verfeinert; ich bin ihm wie auch Herrn Köbe für das Interesse verpflichtet, das sie für diese Fragen zeigen.

Werte ein; das zweite dient zur Korrektur. Alsdann radiert man die Zahlen des ersten Netzes fort und benützt es zur Eintragung der korrigierten — sowohl auf engere Maschen wie auf mehr Stellen berechneten — Werte des zweiten Netzes. Dieses „alternierende Verfahren“ wird so lange fortgesetzt, bis die an entsprechenden Punkten stehenden Zahlen die gewünschte Übereinstimmung zeigen. Dabei stellt sich dann sehr bald von innen nach außen eine *Stabilisierung der Zahlenwerte* ein, so daß die späteren Rechnungen — mit nach Bedarf immer feiner verengenden Maschen — mehr und mehr nur in der Nähe des Randes auszuführen sind. Nebenrechnungen auf besonderem Papier können durchaus vermieden werden, da ja die späteren Rechnungen bei der Mittelbildung nur immer höhere Dezimalen beeinflussen.

Auch *ringförmige Gebiete* können in dieser Weise behandelt werden. Um z. B. (Fig. 5) das ringförmige Gebiet, das von zwei konzentrischen gleich gestellten Quadraten begrenzt ist, auf das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen abzubilden, berechnet man am besten mit Benützung von Koordinatenpapier die harmonische Funktion aus, die sowohl auf dem äußeren wie auf dem inneren Rand einen konstanten Wert (etwa Null und Hundert) annimmt. Dann fügt man die Niveau-

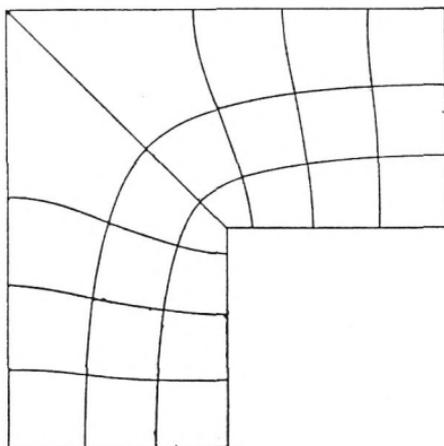


Fig. 5

linien dieser Funktion und die „Kraftlinien“ ein, welche die konjugierte Funktion gibt. Verlangt man eine bestimmte Anzahl, z. B. 64 Kraftlinien bei isothermer Teilung, so kommt dann auch dem inneren quadratischen Rand eine bestimmte Ordnungszahl bei der Zählung der Niveaulinien zu. Dementsprechend ergibt sich der innere Rand des Kreisrings (Fig. 6), wenn der äußere gegeben ist. — Auch die weitergehenden, von Köbe bewiesenen Sätze über die Abbildung mehrfach durchlöcherter Gebiete auf Gebiete, die von Kreisen begrenzt sind, werden dem Verfahren zugänglich.

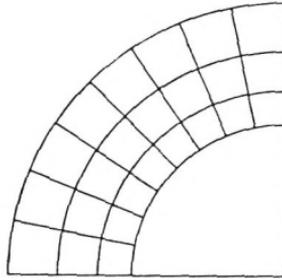


Fig. 6

3. Der Auftrieb von Tragflächen. Zum Schluß mag noch angegeben werden, wie sich nunmehr die Bestimmung des Auftriebs von Tragflächen mit gegebenem Profil in (zweidimensionaler) Luftströmung gestaltet.

Die in übersichtlicher Weise alle Hauptpunkte herausarbeitende Darstellung von Mises zeigt, daß es nur darauf ankommt, das Äußere des Profils auf das Äußere eines bestimmten in derselben Ebene gelegenen Kreises K konform abzubilden. Der Kreis ist so zu wählen, daß die Abbildung „im Unendlichen kongruent“ wird.

Wir bilden zunächst auf das Äußere des Einheitskreises ab, was sich leicht erreichen läßt, indem wir zunächst durch eine Inversion das Äußere des Profils in das Innere des invertierten Profils überführen, dieses nach unseren Methoden auf das Innere des Einheitskreises konform abbilden, und dann

durch Inversion einerseits zum Äußern des Profils, andererseits zum Äußern des Einheitskreises übergehen. Wir haben dann eine Abbildung, die sich analytisch in der Form

$$Z = a_0 + a_1 z + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$$

darstellen würde und die das Gebiet

$$|z| \geq 1$$

auf das Äußere des Profils konform abbildet.

Ordnen wir jetzt jedem Punkt z den Punkt

$$z_1 = a_0 + a_1 z$$

zu, so nimmt die Abbildungsformel die von Mises geforderte Gestalt an

$$Z = z_1 + b_{-1} z_1^{-1} + \dots,$$

und man sieht, daß der gesuchte Kreis K den Mittelpunkt

$$z_1 = a_0$$

und den Radius

$$r = |a_1|$$

besitzt. Wie aber bestimmt man die Konstanten a_0 und a_1 , wenn doch die analytische Darstellung der Abbildung nicht bekannt ist? Sie wären analytisch bestimmt durch die längs des geschlossenen Umfangs des Einheitskreises zu erstreckenden Integrale

$$\int \frac{Z}{z} dz = 2\pi a_0,$$

$$\int \frac{Z}{z^2} dz = 2\pi a_1,$$

und diese Integrale können wir, da die Zuordnung $z \rightarrow Z$ mit ausreichender Annäherung konstruiert ist, tatsächlich auch durch numerische Approximation bestimmen.

Mit der einfachen Kuttaschen Transformation lassen sich bekanntlich Kreise in sogenannte „Joukowski-profile“ unmittelbar überführen. Als Ergänzung dazu und für allgemein ge-

wählte Profile anwendbar ist unsere Entwicklung gedacht, die außer der konformen Abbildung noch zwei numerische Integrationen erfordert.

So erweisen sich die Ideen Boltzmanns, für praktische Durchführung handlich gemacht und nach einer Bemerkung von Jacobi über die approximative Auflösung eines Systems linearer Gleichungen zu einem konvergenten Verfahren durchgebildet, als eine Quelle aussichtsreicher, und, wie wir dargelegt zu haben hoffen, bereits erprobter Berechnungsmethoden, die einerseits einen Beitrag zur angewandten Mathematik liefern, anderseits im einzelnen Stützung finden, aber auch Anregung geben in neu erschlossenen, noch in lebhafter Entwicklung begriffenen Untersuchungen der Funktionentheorie.
