

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft I

Januar- bis Märzszung

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges.

Von Ludwig Burmester.

Mit einer lithographierten Tafel.

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Februar 1918.

I. Grundlehren der sphärischen Bewegung, abgeleitet aus der ebenen Bewegung.

In der Lehre von der Bewegung des Auges haben die irrtümlichen Begriffe „Raddrehung“ und „Rollung“ Anlaß gegeben zu vielen Mißverständnissen und Schwierigkeiten, die durch kinematische Aufklärung erledigt werden. J. Purkinje¹⁾, der die Bewegung des Auges eine Musik des Auges nennt, hat schon vor nahe hundert Jahren darauf hingewiesen, daß die Gesetze dieser Bewegung ihre Gültigkeit in der Phoronomie haben, die nunmehr Kinematik genannt wird. Demnach sind zur Lehre von der Bewegung des Auges die Grundlehren der sphärischen Bewegung erforderlich, die aber bedingt wird durch das aus dem Listingschen Gesetz gefolgerte Hauptgrundgesetz der Bewegung des Auges.

Bei der theoretischen Betrachtung der Bewegung des Auges wird der Augapfel als eine Kugel und deren Mittelpunkt als einen in dem Kopfe festen Drehpunkt angenommen, weil nach experimentellen Beobachtungen seine Lage sich während der Bewegung des Auges nur um Bruchteile eines Millimeters verändert²⁾. Demzufolge kann die Bewegung des Auges, mithin auch die Bewegung der Ansätze der sechs Augenmuskeln als sphärische Bewegung betrachtet werden, und zur Diagnose dienen.

Die Gesamtheit beliebig vieler in einer Ebene oder in einer Kugelfläche liegenden, starr miteinander verbundenen Punkte wird ein ebenes Gebilde oder ein sphärisches Gebilde genannt. Die Bewegung eines ebenen Gebildes in einer Ebene heißt ebene Bewegung, und die Bewegung eines sphärischen Gebildes auf einer Kugelfläche sphärische Bewegung. Durch die sphärische Bewegung, die wir aus der ebenen ableiten, wird die Vorstellung von der Bewegung des Auges veranschaulicht und erleichtert.

Wird in Fig. 1 der Tafel ein ebenes Gebilde G in einer ruhenden Ebene aus einer Lage G_1 in eine andere Lage G_2 beliebig bewegt, so sind G_1, G_2 kongruente ebene Gebilde. Indem wir die entsprechenden gleichen Strecken $A_1 B_1, A_2 B_2$ als gegeben annehmen, erhalten wir zu einem beliebigen Punkt C_1 in G_1 den entsprechenden Punkt C_2 in G_2 durch das zu dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ konstruierte kongruente Dreieck $A_2 B_2 C_2$; mithin sind durch zwei entsprechende Punktpaare $A_1 B_1, A_2 B_2$ je zwei Lagen G_1, G_2 eines ebenen Gebildes bestimmt.

Errichten wir auf den Verbindstrecken $A_1 A_2, B_1 B_2$ in deren Mitten m_a, m_b die Normalen $m_a \mathfrak{P}_{12}, m_b \mathfrak{P}_{12}$, die sich im Punkt $\mathfrak{P}_{12}$ schneiden, so sind die Dreiecke $A_1 B_1 \mathfrak{P}_{12}, A_2 B_2 \mathfrak{P}_{12}$ wegen ihrer entsprechenden gleichen Seiten kongruent; und in dem Punkt $\mathfrak{P}_{12}$ liegen zwei entsprechende Punkte der Gebilde G_1, G_2 vereint, der als solcher der einzige selbstentsprechende Punkt dieser Gebilde ist. Denn wenn noch zwei andere entsprechende Punkte vereint wären, dann decken sich die beiden kongruenten Gebilde. Der selbstentsprechende Punkt $\mathfrak{P}_{12}$ heißt der Pol der beiden Lagen G_1, G_2 . Demnach gehen alle in den Mitten auf den Verbindstrecken der entsprechenden Punkte errichteten Normalen durch den Pol $\mathfrak{P}_{12}$; und ein ebenes Gebilde kann durch Drehung um den Pol aus der einen zweier gegebener Lagen in die andere gebracht werden.

Sonach ergeben sich die Sätze:

1. Die Normalen in den Mitten auf den Verbindstrecken der entsprechenden Punkte zweier in einer

Ebene liegenden kongruenten Gebilde gehen durch den Pol.

2. Jede ebene Bewegung eines ebenen Gebildes aus einer Lage in eine andere kann durch Drehung um den Pol ersetzt werden.

Wenn insonderheit die beiden Lagen parallel sind, dann liegt der Pol im Unendlichen.

Um die analogen Beziehungen bei der sphärischen Bewegung darzulegen, betrachten wir anstatt jener ebenen Gebilde G_1, G_2 und jener ebenen Dreiecke $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2$ nun in der schematischen Fig. 1a die übereinstimmend bezeichneten kongruenten sphärischen Gebilde G_1, G_2 und die kongruenten sphärischen Dreiecke $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2$ auf einer gedachten, um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugelfläche. Die Seiten dieser sphärischen Dreiecke können Bögen von Kleinkreisen und Großkreisen der Kugelfläche sein, während bei einem gewöhnlichen sphärischen Dreieck die drei Seiten Bögen von Großkreisen sind.

Anstatt jener in Fig. 1 in den Mitten m_a, m_b auf den Verbindstrecken $A_1 A_2, B_1 B_2$ errichteten Normalen, die den Pol $\mathfrak{P}_{12}$ bestimmen, legen wir in Fig. 1a durch die Mitten m_a, m_b auf die Verbindsehnern $A_1 A_2, B_1 B_2$ der Kugelfläche Normalebenen, die sich in einer durch den Mittelpunkt O gehenden Geraden schneiden, die wir die Polachse der beiden Lagen G_1, G_2 nennen. Die Polachse schneidet die Kugelfläche in zwei Punkten, von denen nur der eine eingezeichnete $\mathfrak{P}_{12}$ in Betracht kommt und der Pol der beiden Lagen heißt. Hiernach ergeben zu 1 und 2 die analogen auf der Kugelfläche geltenden Sätze:

1a. Die Normalebenen in den Mitten auf den Verbindsehnern der entsprechenden Punkte zweier auf einer Kugelfläche liegenden kongruenten Gebilde gehen durch die Polachse.

2a. Jede sphärische Bewegung eines sphärischen Gebildes aus einer Lage in eine andere kann durch Drehung um die Polachse ersetzt werden.

Die Normalebene in der Mitte auf der Verbindsehne zweier entsprechender Punkte schneidet die Kugelfläche in einem durch den Pol gehenden Großkreis, den wir den Normalgroßkreis für die Mitte der Verbindsehne nennen. Sonach folgen ferner die analogen Sätze:

1b. Die Normalgroßkreise für die Mitten der Verbindsehn der entsprechenden Punkte zweier auf einer Kugelfläche liegenden kongruenten Gebilde gehen durch den Pol.

2b. Jede sphärische Bewegung eines sphärischen Gebildes aus einer Lage in eine andere kann durch Drehung um den Pol ersetzt werden.

Nach diesen Darlegungen ergeben sich fernerhin sinngemäß zu den Beziehungen der ebenen Bewegung analoge Beziehungen der sphärischen Bewegung.

In Fig. 2 sind durch die drei entsprechenden Strecken B_1C_1 , B_2C_2 , B_3C_3 die drei Lagen G_1 , G_2 , G_3 eines ebenen Gebildes G bestimmt, und die zugehörigen drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{13}$ konstruiert. Sind umgekehrt die drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gegeben, so sind dadurch auch die drei zugehörigen Lagen bestimmt, und können in einfacher Weise konstruiert werden, wenn wir z. B. in G_1 einen beliebigen Punkt A_1 annehmen.

Zu dem selbstentsprechenden Punkt $\mathfrak{P}_{23}$ in G_2 , G_3 ergibt sich der entsprechende Punkt $\mathfrak{P}_{23}^1$ in G_1 als zweiter Schnittpunkt der durch $\mathfrak{P}_{23}$ gehenden, um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ beschriebenen Kreisbögen, und der Punkt $\mathfrak{P}_{23}^1$ liegt mithin symmetrisch zu dem Punkt $\mathfrak{P}_{23}$ in Bezug auf die Gerade $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$. Ferner beschreiben wir um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ die durch den Punkt A_1 gehenden Bahnkreise α_{12} , α_{13} , die sich in einem zweiten Punkt A_1 schneiden. Drehen wir nun um $\mathfrak{P}_{12}$ das Dreieck $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{23}^1A_1$ nach $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{23}A_2$, so ist $\mathfrak{P}_{23}A_2 = \mathfrak{P}_{23}^1A_2 = \mathfrak{P}_{23}A_1$; und drehen wir ferner um $\mathfrak{P}_{13}$ das Dreieck $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{23}^1A_1$ nach $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{23}A_3$, so ist auch $\mathfrak{P}_{23}A_3 = \mathfrak{P}_{23}^1A_3 = \mathfrak{P}_{23}A_1$, wobei die gedrehten Dreiecke strichpunktliert gekennzeichnet sind; folglich schneidet der um $\mathfrak{P}_{23}$ mit dem Radius $\mathfrak{P}_{23}A_1$ beschriebene Bahnkreis α_{23} die Bahnkreise α_{12} , α_{13} in den Punkten A_2 , A_3 . Da hiernach

$\mathfrak{P}_{23}^1 A_1$, $\mathfrak{P}_{23} A_2$, $\mathfrak{P}_{23} A_3$ entsprechende Strecken in den Lagen G_1 , G_2 , G_3 sind, so ergeben sich in diesen auch die entsprechenden kongruenten Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$.

Demnach erhalten wir den bei der ebenen und der sphärischen Bewegung geltenden Satz:

3. Die um die drei Pole dreier Lagen eines ebenen oder sphärischen Gebildes beschriebenen drei Bahnkreise eines Punktes des Gebildes schneiden sich in einem Punkt.

Weiter folgt für die ebene und die sphärische Bewegung die Konstruktion:

4. Wenn in Fig. 2 drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gegeben sind, beschreibe man um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ die durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ gehenden Kreisbögen, die sich in dem zweiten Punkt $\mathfrak{P}_{23}^1$ schneiden, ferner um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ die durch einen beliebigen in G_1 angenommenen Punkt A_1 gehenden Bahnkreise α_{12} , α_{13} und um $\mathfrak{P}_{23}$ den durch ihren zweiten Schnittpunkt A_1 gehenden Bahnkreis α_{23} , der α_{12} , α_{13} in den Punkten A_2 , A_3 schneidet; dann sind $\mathfrak{P}_{23}^1 A_1$, $\mathfrak{P}_{23} A_2$, $\mathfrak{P}_{23} A_3$ entsprechende Strecken in G_1 , G_2 , G_3 , und dadurch die Lagen bestimmt.

Sind B_1 , Γ_1 die Schnittpunkte je drei der um die drei Pole beschrieben gedachte Bahnkreise der Punkte B , C des Gebildes G ; dann ist das Dreieck $A_1 B_1 \Gamma_1$ symmetrisch zu den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ bezüglich der Geraden $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{13}$. Von diesen Geraden werden also die Strecken $A_1 A_1$, $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ senkrecht halbiert³⁾.

Sind nur die beiden Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gegeben und nehmen wir den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in beliebigen Lagen an, so werden für jede Lage desselben die beiden zugehörigen Lagen G_2 , G_3 durch die Schnittpunkte bestimmt, die der um $\mathfrak{P}_{23}$ beschriebene, durch den Punkt A_1 gehende Bahnkreis α_{23} mit den Bahnkreisen α_{12} , α_{13} bildet. Wird der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in den Punkt A_1 gelegt, so schrumpft der Bahnkreis α_{23} in dem Punkt A_1 zusammen und die beiden Lagen G_2 , G_3 decken sich. Wird der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in die Gerade $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{13}$ gelegt, so fallen die drei Lagen G_1 , G_2 , G_3 zusammen. Diese Beziehungen dreier Lagen eines Gebildes in

der Ebene gelten auch sinngemäß bei drei Lagen eines Gebildes auf einer Kugelfläche.

In Fig. 3 sind die Bahnkurven α , β zweier Punkte A , B eines bewegten ebenen Gebildes G gegeben, und dadurch ist dessen Bewegung in einer Ebene bestimmt. Denn nehmen wir zwei Lagen A_1B_1 , A_2B_2 an, so erhalten wir durch die kongruenten Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und mehrere solche die Bahnkurve γ des dritten Punktes C . Ebenso ergeben sich die Bahnen aller Punkte des Gebildes G . Denken wir uns das Gebilde aus der Lage A_1B_1 in eine unendlich nahe Lage bewegt, so kann diese Bewegung als eine unendlich kleine Drehung um den Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1$ der Normalen $A_1\mathfrak{P}_1$, $B_1\mathfrak{P}_1$ an den Bahnkurven α , β aufgefaßt werden, den wir den Augenblickspol für die Lage A_1B_1 nennen; und $C_1\mathfrak{P}_1$ ist mithin auch die Normale an der Bahnkurve γ . Demnach ergibt sich der Satz:

5. In jeder Lage eines in einer Ebene bewegten Gebildes gehen die Normalen aller Bahnkurven durch den zugehörigen Augenblickspol.

Wenn wir durch die Normalen $A_2\mathfrak{P}_2$, $B_2\mathfrak{P}_2$ an den Bahnkurven α , β den Augenblickspol $\mathfrak{P}_2$ für die Lage A_2B_2 und ebenso für mehrere Lagen bestimmen, dann bilden die Augenblickspole $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, ... eine Kurve π , auf der sich der Augenblickspol in der ruhenden Ebene bewegt. Diese Kurve nennen wir schlechthin die Rastpolbahn. Zugleich bewegt sich der Augenblickspol auch in dem bewegten ebenen Gebilde auf einer Kurve p . Um sie zu konstruieren, betrachten wir A_1B_1 als eine Anfangslage des Gebildes, zeichnen an A_1B_1 das Dreieck $A_1B_1\mathfrak{P}_{II}$, welches dem Dreieck $A_2B_2\mathfrak{P}_2$ kongruent ist, und verfahren ebenso für mehrere aufeinander folgende Lagen; dann bilden die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_{II}$, ... die zu dem bewegten Gebilde gehörende Kurve p , die wir schlechthin die Gangpolbahn nennen. Wenn nun das Gebilde in die Lage A_2B_2 bewegt wird, gelangt $\mathfrak{P}_{II}$ nach $\mathfrak{P}_2$, weil die Dreiecke $A_1B_1\mathfrak{P}_{II}$, $A_2B_2\mathfrak{P}_2$ kongruent sind.

Nehmen wir an, daß sich A_2B_2 unendlich nahe an A_1B_1 befinde, so sind die Strecken $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_{II}$ unendlich klein.

Demnach ist $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ ein Element der Rastpolbahn π und $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_{II}$ ein Element der Gangpolbahn p . Da die Bewegung des Gebildes aus der Lage $A_1 B_1$ in die unendlich nahe Lage durch eine unendlich kleine Drehung um den Augenblickspol $\mathfrak{P}_1$ erfolgt, so fällt das Element $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_{II}$ mit dem Element $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ zusammen, und das nämliche gilt für alle aufeinander folgenden unendlich kleinen Bewegungen. Eine Kurve, die sich so auf einer anderen bewegt, daß stets gleich lange Bögen in Berührung kommen, rollt auf der anderen Kurve. Sonach erhalten wir den Satz:

6. Bei der ebenen Bewegung eines ebenen Gebildes rollt dessen Gangpolbahn auf der Rastpolbahn, und der Berührungspunkt der beiden ist der jeweilige Augenblickspol, nach dem in jeder Lage des bewegten Gebildes die Normalen der Bahnkurven gehen.

Bei einer Drehung eines ebenen Gebildes in einer Ebene um einen Drehpunkt entartet die Gangpolbahn und die Rastpolbahn in den Drehpunkt.

Für die sphärische Bewegung gelten die analogen Beziehungen wie bei der ebenen Bewegung. Wir nehmen in Fig. 3 an, daß α , β gegebene sphärische Bahnkurven zweier Punkte A , B eines sphärischen Gebildes sind. In den Punkten A_1 , B_1 und A_2 , B_2 dieser Bahnkurven denken wir uns auf ihnen normale Bögen von Großkreisen der ruhenden Kugelfläche als sphärische Normalen errichtet, die sich in den sphärischen Augenblickspolen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ schneiden, und bei jeder unendlich kleinen Bewegung des Gebildes dreht es sich um einen jeweiligen Augenblickspol. Durch die Augenblickspole ergeben sich die sphärische Rastpolbahn π und sphärische Gangpolbahn p . Sonach folgen die zu 5. und 6. analogen Sätze:

5a. In jeder Lage eines auf einer Kugelfläche bewegten Gebildes gehen die sphärischen Normalen aller Bahnkurven durch den jeweiligen Augenblickspol.

6a. Bei der sphärischen Bewegung eines sphärischen Gebildes rollt dessen sphärische Gangpolbahn auf der sphärischen Rastpolbahn, und der Berührungspunkt

der beiden ist der jeweilige Augenblickspol, nach dem die sphärischen Normalen der Bahnkurven gehen.

Die Normalebenen in den Punkten A_1 , B_1 auf den sphärischen Bahnkurven α , β oder auf deren Tangenten schneiden sich in einer durch den Mittelpunkt O der gedachten Kugel- fläche gehenden Augenblickspolachse. Die während der Bewegung des sphärischen Gebildes entstehenden Augenblicks- polachsen bilden die Mantellinien eines Kegels $O\pi$ und die Mantellinien eines Kegels Op . Jenen nennen wir den Rast- polachsenkegel und diesen den Gangpolachsenkegel. Hiernach erhalten wir zu 5a, 6a die analogen Sätze:

5b. In jeder Lage eines auf einer Kugelfläche be- wegten sphärischen Gebildes gehen die Normalebenen aller Bahnkurven durch die jeweilige Augenblicks- polachse.

6b. Bei der sphärischen Bewegung eines sphä- rischen Gebildes rollt dessen Gangpolachsenkegel auf den Rastpolachsenkegel, und die Berührmantellinie der beiden ist die jeweilige Augenblickspolachse, nach der die Normalebenen der Bahnkurven gehen.

Wenn wir bei der ebenen Bewegung in den Polen Senkrechte auf der ruhenden Ebene errichten, so können die Drehungen des ebenen Gebildes um die Pole auch durch Drehungen um diese Senkrechten als Polachsen erfolgen; demnach sind bei ebener Bewegung die Polachsen parallel und bei sphärischer Bewegung gehen sie durch den Mittelpunkt der ruhenden Kugelflächen.

Die Darlegungen, bei denen nur ein bewegtes ebenes und sphärisches Gebilde beziehlich in der Ebene und auf der Kugel- fläche betrachtet wurde, wollen wir der Vollständigkeit halber noch ergänzen. Die Bewegung eines Gebildes in einem ruhen- den Gebilde wird absolute Bewegung und die Bewegung eines Gebildes in einem bewegten relative Bewegung ge- nannt. Um bei ebener Bewegung diese beiden Bewegungs- weisen in Fig. 4 im Zusammenhang zu betrachten, bezeichnen wir zur Unterscheidung von den vorherigen Lagen eines Ge- bildes das ruhende Gebilde mit G^1 , das in ihm bewegte Ge-

bilde mit G^2 und das in diesem bewegte Gebilde mit G^3 . Diese drei Gebilde sind in der Zeichnung von beliebigen Ovalen unbestimmt umgrenzt. Wir nehmen an, daß das Gebilde G^2 in dem ruhenden Gebilde G^1 eine unendlich kleine Drehung um den Augenblickspol $\mathfrak{P}_{12}$ und das Gebilde G^3 in dem bewegten Gebilde G^2 eine unendlich kleine Drehung um den Augenblickspol $\mathfrak{P}^{23}$ ausführt, daß ferner ein Punkt B^3 von G^3 auf einer Bahnkurve β_{13} in G^1 eine unendlich kleine Bewegung macht. Hiernach wird, weil sich $\mathfrak{P}^{23}$ als Punkt von G^2 und G^3 um $\mathfrak{P}^{12}$ momentan dreht, durch die Normale im Punkt B^3 der Bahnkurve β_{13} auf der Geraden $\mathfrak{P}^{12}\mathfrak{P}^{23}$ der Augenblickspol $\mathfrak{P}^{13}$ von G^1 und G^3 bestimmt, um den sich G^3 in Bezug auf G^1 dreht; mithin liegen die drei Pole $\mathfrak{P}^{12}$, $\mathfrak{P}^{23}$, $\mathfrak{P}^{13}$ in einer Geraden. Sonach folgen für ebene und sphärische Bewegung beziehlich die Sätze:

7. Während einer unendlich kleinen ebenen Bewegung zweier ebenen Gebilde in einem anderen liegen die drei Augenblickspole in einer jeweiligen Geraden.

7a. Während einer unendlich kleinen sphärischen Bewegung zweier sphärischer Gebilde in einem anderen liegen die drei Augenblickspole in einem jeweiligen Großkreis und die drei Augenblickspolachsen in einer jeweiligen Ebene.

In Fig. 5 nehmen wir an, daß die ebene Bewegung des Gebildes G^2 in Bezug auf das ruhende G^1 durch Rollung der Gangpolbahn p auf der Rastpolbahn π bestimmt ist, die sich in dem Augenblickspol $\mathfrak{P}^{12}$ berühren; daß ferner die Gebilde G^2 , G^3 gleichsam durch eine Achse in dem Pol $\mathfrak{P}^{23}$ gelenkig verbunden sind, und ein Punkt B^3 von G^3 sich auf einer gegebenen Bahnkurve β_{13} in G^1 bewegt. Demnach trifft die Normale an der Bahnkurve β_{13} für den Punkt B^3 die Gerade $\mathfrak{P}^{12}\mathfrak{P}^{23}$ in dem Augenblickspol $\mathfrak{P}^{13}$, und die Bewegung des Gebildes G^3 in Bezug auf das ruhende G^1 ist durch die Rollung einer Gangpolbahn p' auf einer Rastpolbahn π' bestimmt. Analog bei der sphärischen Bewegung.

Zu dieser Darlegung möge noch ein einfaches anschau-

liches Beispiel dienen, für einen auf einem Wagen sitzenden Beobachter vollzieht das Wagenrad Drehungen um die Achse; aber für einen auf der Straße stehenden Beobachter dreht sich das Wagenrad nicht um die bewegte Achse, sondern es dreht sich in jedem Moment theoretisch um den jeweiligen Berührungspunkt mit der Straße, auf der es rollt. Für einen neben dem Wagen mit dessen Geschwindigkeit gehenden Beobachter vollzieht das Wagenrad Drehungen um die gleichsam mit ihm verbunden gedachte Achse.

In Fig. 6 ist die Straße S das Gebilde G^1 und der sich auf der Straße bewegende, schematisch gezeichnete Wagen W das Gebilde G^2 , das sich in einer zu G^1 gehörenden Hülse verschiebt und sich also um den unendlich fernen Pol $\mathfrak{P}_\infty^{12}$ dreht. Ferner ist das sich um die Achse $\mathfrak{P}^{23}$ in G^2 drehende, auf der Straße rollende Wagenrad R das Gebilde G^3 und dessen Berührungspunkt mit G_1 der jeweilige Augenblickspol $\mathfrak{P}^{13}$, nach dem die Normale der von einem Punkt B^3 des Wagenrades R beschriebenen Bahnkurve β_{13} geht. Demnach folgt der für die ebene und sphärische Bewegung allgemein geltende Satz:

8. Für einen in Ruhe befindlichen Beobachter dreht sich ein in einer Ebene oder auf einer Kugelfläche bewegtes Gebilde nicht um eine in Bezug auf ihn bewegte Achse; denn es rollt auf einem ruhenden Gebilde oder dreht sich insonderheit um eine feste Achse.

In der irrtümlichen Auffassung, daß sich für einen in Ruhe befindlichen Beobachter das Wagenrad um seine Achse drehe, ist die Benennung „Raddrehung“, und für diese vermeintliche Drehung auch die Benennung „Rollung“ entstanden, ohne zu beachten, daß das Wagenrad auf der Straße rollt. Diese Benennungen, die beide für diese Bewegung aus Irrtum gebraucht wurden, haben Anlaß zu vielen Verwirrungen gegeben.

In Fig. 7 betrachten wir noch eine besondere ebene oder sphärische Bewegung, bei der sich in dem ruhenden Gebilde G^1 die beiden Gebilde G^2 , G^3 beziehlich um die festen Pole $\mathfrak{P}^{12}$, $\mathfrak{P}^{13}$ drehen und die beiden Kurven k^2 , k^3 dieser Gebilde während der Drehungen berühren; dann trifft die gemeinsame Normale

dieser Kurven die Gerade $\mathfrak{P}^{12} \mathfrak{P}^{13}$ in dem Augenblickspol $\mathfrak{P}^{23}$, der auf dieser Geraden wandert. Hierbei wird das eine der Gebilde G^2, G^3 von dem anderen geführt, und deshalb heißt diese Art der relativen Bewegung eine Führungsbewegung. Diese Führungsbewegung kommt bei zweien ineinander greifenden Zahnrädern vor, und die Kurven k^2, k^3 vertreten die zylindrischen Zahnflächen. Dieser Bewegungsvorgang kommt auch, wenn die eine der Kurven k^2, k^3 in einem Punkt zusammenschrumpft, als sphärische Bewegung später theoretisch bei der Bewegung des Auges in Betracht.

Wir haben die Grundlehren der sphärischen Bewegung in der Weise umfassend behandelt, daß sie nicht nur zur Aufklärung, sondern fürderhin jeder Zeit auch zu weiterer Untersuchung der Bewegung des Auges dienen können.

II. Die Bewegung des Auges.

Zur Veranschaulichung der Bewegung des Auges ist in Fig. 8 die Augenhöhle als Kugelfläche schrägbildlich dargestellt, deren Mittelpunkt O der Drehpunkt des Auges und deren Umriß die mit e bezeichnete Ellipse ist. Von den drei in O aufeinander senkrechten Durchmesser $\overline{XX}$, $\overline{YY}$, $\overline{ZZ}$ liegen die beiden $\overline{XX}$, $\overline{ZZ}$ in der Bildebene, und $\overline{YY}$ ist das Bild des gedachten, auf der Bildebene im Raum senkrechten Durchmessers $Y, \overline{Y}_r$. Dabei haben wir der Einfachheit halber angenommen, daß $\overline{YY}$ gegen $\overline{XX}$ unter dem Winkel von 30° geneigt und OY gleich der Hälfte des entsprechenden Kugelradius OY_r ist. Die drei aufeinander senkrechten Ebenen XOY , XOZ , YOZ , von denen die erste wagrecht ist und die beiden anderen lotrecht sind, schneiden die Kugelfläche in den Kreisen ζ, ν, ξ . An dieser festen Kugelfläche denken wir uns eine bewegliche Kugelfläche liegend, auf der ein sphärisches Gebilde das bewegte Auge vertritt. Bei unseren Darlegungen werden wir nur das eine, das rechte Auge betrachten, und da bei der sphärischen Bewegung des Auges jede Polachse durch dessen Drehpunkt geht, so braucht dies fernerhin in den Beschreibungen nicht mehr besonders erwähnt zu werden.

Nach Helmholtz⁴⁾ heißt die von dem Drehpunkt nach einem fixierten Punkt gehende Gerade die Blicklinie, und er schreibt: „Sie ist nicht ganz identisch mit der Gesichtslinie, die dem ungebrochenen Lichtstrahl entspricht. Doch wird die Abweichung beider Linien voneinander in den meisten Fällen zu vernachlässigen sein.“ Demgemäß können wir annehmen, daß die Abbildung eines fixierten Punktes mittels des ungebrochenen Lichtstrahls auf der Netzhaut in dem Mittelpunkt der Netzhautgrube erfolgt, also in der Stelle des deutlichsten Sehens. Den mit A_3 bezeichneten Schnittpunkt, in dem eine Blicklinie OA_3 die bewegliche Kugelfläche trifft und der mithin auf dem Augapfel in der Mitte der Hornhaut liegt, nennen wir den Sehpunkt, und die Ebene, die durch die Anfangslage und die Endlage einer beliebig bewegten Blicklinie geht, die Sehebene. Ferner wollen wir die später S. 189 definierte Blickrichtung, die wir in der Geraden OX liegend annehmen, die Hauptlage der Blicklinie OA_1 und den Sehpunkt A_1 den Hauptsehpunkt nennen. Die übliche Benennung „Primärstellung“ oder „Primärlage“ der Blicklinie ist nicht zulässig, weil jede Lage, in der eine Bewegung der Blicklinie beginnt, als eine Anfangslage zu betrachten ist. Der zu dem Hauptsehpunkt A_1 diametrale Punkt Ω heißt nach Helmholtz der Okzipitalpunkt. Die auf der festen Kugelfläche liegenden, durch A_1 und Ω gehenden Kreise werden Hauptkreise genannt.

Die Grundlage für die Bewegung des Auges ist das von Listing vermutete, von Ruete⁵⁾ nach ihm benannte und durch Beobachtungen bestätigte Listingsche Gesetz:

9. Jede Bewegung des Auges, bei der die Blicklinie aus der Hauptlage in eine andere Lage gelangt, kann ersetzt werden durch Drehung um die auf der Sehebene senkrechte Polachse.

Danach hat Ruete die Verallgemeinerung des Listingschen Gesetzes gefolgert:

10. Jede Bewegung des Auges, bei der die Blicklinie aus einer beliebigen Lage in eine andere gelangt

und die Sehebene durch die Hauptlage geht, kann ersetzt werden durch Drehung um die auf der Sehebene senkrechten Polachse.

Demnach liegen bei diesen Drehungen des Auges die Polachsen in der auf der Hauptlage OA_1 senkrechten Ebene YOZ und die Pole auf dem Kreis ξ . Ferner folgt aus dem Listing'schen Gesetz:

11. Jeder Lage der Blicklinie oder des Sehpunktes entspricht eindeutig eine Lage des Auges.

Ein in der Hauptlage A_1 des Sehpunktes auf dem Auge gezeichnetes Kreuz $l_1 A_1 w_1$, dessen lotrechter Stammstrich l_1 und dessen wagrechter Armstrich w_1 beziehlich in den Kreisen ν , ζ liegen, vertritt als sphärisches Gebilde das Auge. Dieses rechtwinkelige Kreuz, dessen Mittelpunkt also in A_1 liegt, wollen wir das Augkreuz nennen. Nach dem Listing'schen Gesetz ergibt sich für jede Blicklinie OA_3 die entsprechende Lage $l_3 A_3 w_3$ des Augkreuzes durch Drehung aus der Hauptlage $l_1 A_1 w_1$ um die auf der zugehörigen Sehebene senkrechte Polachse.

Bei einer allgemeinen Bewegung des Auges rollt dessen Gangpolachsenkegel auf dem zugehörigen Rastpolachsenkegel, und das Augkreuz ist fest mit dem Gangpolachsenkegel verbunden. Nehmen wir an, daß die Blicklinie aus der Hauptlage OA_1 beliebig bewegt in eine Lage OA_3 gelangt, so kann die Bewegung des Auges durch Drehung um die auf der Sehebene $A_1 OA_3$ senkrechte Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ ersetzt werden, wobei sich der Sehpunkt auf dem Bahnkreis α_{13} bewegt, der den Kreis ξ in einem Punkt Ξ schneidet und nach dem Okzipitalpunkt Ω geht. Die in der Mitte auf der Verbindsehne $A_1 A_3$ senkrechte Ebene schneidet die Ebene YOZ in der Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$, die sich als Senkrechte auf $O\Xi$ ergibt. Das aus dem Augkreuz $l_1 A_1 w_1$ und dem Großkreisbogen $A_1 \mathfrak{P}_{13}$ bestehendes sphärisches Gebilde dreht sich sonach um den auf dem Kreis ξ liegenden Pol $\mathfrak{P}_{13}$ aus der Lage $\mathfrak{P}_{13} l_1 A_1 w_1$ in die Lage $\mathfrak{P}_{13} l_3 A_3 w_3$, und es ist mit dem Großkreis fest verbunden. Aus diesen Darlegungen, wie auch aus dem allgemeinen Satz 8, folgt:

12. Es gibt keine Drehung des Auges um die Blicklinie.

Damit ist der seit 80 Jahren eingewurzelte, wahrscheinlich von Hueck⁶⁾ stammende Irrtum, daß sich das Auge um die Blicklinie drehe, widerlegt. Dieser Irrtum, der ein Wirrsal in der Lehre von der Bewegung des Auges verursacht hat, ist trotzdem, daß er von Joh. Müller⁷⁾, Meißner⁸⁾ und Donders⁹⁾ erkannt wurde, vorherrschend geblieben mit den beiden S. 180 schon erwähnten Benennungen „Raddrehung“, die, wie es scheint, zuerst bei Ruete¹⁰⁾ vorkommt, und „Rollung“, die vermutlich zuerst von Tourtual¹¹⁾ verwendet wurde. Dieser Irrtum ist noch besonders von Helmholtz¹²⁾ befestigt worden, indem er schreibt: „Für diese Art der Drehung des Augapfels, nämlich die Drehung um die Gesichtslinie, wollen wir den bezeichnenden Namen der Raddrehung beibehalten, da sich die Iris dabei wie ein Rad um ihren Mittelpunkt drehen würde.“ In einer gedankenreichen Abhandlung von 44 Seiten hat Meinong¹³⁾ sich vergeblich bemüht, Klarheit in der unrichtigen Auffassung der Bewegung des Auges zu erlangen. Auch v. Kries¹⁴⁾ ist es nicht gelungen. Unbegreiflich ist es, daß bei der leicht vorstellbaren, absoluten Bewegung des Auges so viele Mißverständnisse und Schwierigkeiten entstehen konnten.

In Fig. 9 bestimmen wir die Lage eines Sehpunktes A_3 oder einer Blicklinie OA_3 , indem wir als Koordinaten den Winkel $A_1OA_3 = \varrho$ und den Neigwinkel $A''A^xA_3 = \theta$ der Ebene des Bahnkreises α_{13} gegen die Ebene XOZ annehmen. Dieser Neigwinkel θ ist auch der Winkel bei A_1 zwischen den Kreisen α_{13} und ν . Die wahren Größen der Winkel ϱ , θ bezeichnen wir mit ϱ_0 , θ_0 . Zur Konstruktion der Lage OA_3 begrenzen wir auf dem Kreis ν den Bogen A_1P durch den Winkel $A_1OP = \varrho_0$, fallen auf OA_1 die Senkrechte PA^x , legen an sie den Winkel $PA^x\Theta = \theta_0$, wobei wir $A^x\Theta = A^xP$ machen, und fallen ferner auf OZ die Senkrechte ΘA^z , die A^xP im Punkt A'' schneidet. Sodann ergeben sich vermittels der beiden betreffenden Parallelogramme die senkrechten Projektionen A' , A'' , A''' des Sehpunktes A_3 auf die als Grundriß-, Aufriß- und

Seitenrißebene betrachteten Ebenen XOY , XOZ , YOZ . Der Ellipsenbogen $A_1 \alpha_{13} A_3$ ist als affin zu dem Kreisbogen $A_1 \nu P$ bezüglich der Affinitätsachse OA_1 konstruiert.

Da in Fig. 8 bei der Drehung des Augkreuzes um die Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ oder um den Pol $\mathfrak{P}_{13}$ der Winkel zwischen den Bögen $A_1 \alpha_{13}$, $A_1 l_1$ gleich θ ist, so wird die Lage des Auges, die dem Sehpunkt A_3 entspricht, durch den Winkel θ zwischen den Bögen $A_3 \Xi$, $A_3 l_3$ bestimmt. Und den Winkel θ nennen wir den Auglagewinkel in Bezug auf den Hauptkreis α_{13} . Demnach erhalten wir den Satz:

13. Die Lage des Sehpunktes und die Lage des Auges wird durch den Winkel ϱ und den Auglagewinkel θ bestimmt.

Insonderheit ist, je nachdem sich der Sehpunkt auf dem Kreis ν oder ζ bewegt, der Auglagewinkel gleich 0 oder 90 Grad.

Um die Lage des Auges in einer anderen Weise zu bestimmen, ziehen wir in Fig. 8 durch die Grundrißprojektion A' des durch θ , ϱ gegebenen Sehpunktes A_3 die Sehne ΩA_2 des Kreises ζ und durch deren Mitte M_2 den Radius $O\mathfrak{P}_{23}$, der mithin im Raum auf der Sehne ΩA_2 senkrecht ist und den Kreisbogen ΩA_2 halbiert. Ferner ist OY im Raum senkrecht auf ΩO ; folglich ist der Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = O\Omega A'$. Auf dem Kreis ζ machen wir den Bogen $A_1 \mathfrak{P}_{23} = A_2 \mathfrak{P}_{23}$, und weil $O\mathfrak{P}_{23}$ den Bogen ΩA_2 halbiert, ist $A_1 \mathfrak{P}_{23}^1 = \Omega \mathfrak{P}_{23}$ und der Punkt Y die Mitte des Bogens $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{23}^1$. Wird nun das Augkreuz um die Polachse $O\mathfrak{P}_{12}$ in die Lage $l_2 A_2 w_2$ und dann um die Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ gedreht, so beschreibt der Sehpunkt einen auf der Grundrißebene senkrechten Bahnkreis α_{23} , der ein Kleinkreis mit dem Mittelpunkt M_2 ist, und mithin durch den Sehpunkt A_3 nach dem Okzipitalpunkt Ω geht. Dabei bewegt sich die Blicklinie auf einer Drehkegelfläche, deren Spitze in O liegt und deren Grundkreis α_{23} ist.

Bei dieser Drehung des sphärischen Gebildes aus der Lage $\mathfrak{P}_{23} l_2 A_2 w_2$ sind dessen Lagen zu dem sphärischen Gebilde $\mathfrak{P}_{23}^1 l_1 A_1 w_1$ kongruent, und $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{23}^1$ entsprechende Punkte. Da der Kreis ξ auf dem Kreisbogen $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{23}^1$ in dessen Mitte Y

senkrecht ist, so kann jede dieser Lagen als eine Lage des um eine in der Ebene YOZ liegenden Polachse gedrehten sphärischen Gebildes $\mathfrak{P}_{23}^1 l_1 A_1 w_1$ betrachtet werden, und für die Lage $\mathfrak{P}_{23} l_3 A_3 w_3$ ist $O \mathfrak{P}_{13}$ die Polachse.

Analoge Beziehungen ergeben sich, wenn wir durch die Aufrißprojektion A'' die Sehne $O A_{II}$ des Kreises ν und den zu ihr senkrechten Radius $O \mathfrak{P}_{II3}$ ziehen, der sie in ihrer Mitte M_{II} schneidet; dann ist der Winkel $ZO \mathfrak{P}_{II3} = O \Omega A''$. Sonach erhalten wir den Satz:

14. Die einem Sehpunkt A_3 entsprechende Lage des Auges wird bestimmt durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$, bei dem der Winkel $YO \mathfrak{P}_{23} = O \Omega A'$ und durch den Pol $\mathfrak{P}_{II3}$, bei dem der Winkel $ZO \mathfrak{P}_{II3} = O \Omega A''$ ist.

Um diese Winkel als Funktionen von den Koordinaten θ, ϱ des Sehpunktes A_3 zu bestimmen, setzen wir $O \Omega A' = \tau'$, $O \Omega A'' = \tau''$, und nehmen in Fig. 8 und 9 den Radius der Kugelfläche als Einheit an; dann ist in wahrer Größe $A^x A_3$ gleich $A^x P = \sin \varrho$; mithin $A^x A' = A'' A_3 = \sin \varrho \sin \theta$, $A^x A'' = \sin \varrho \cos \theta$ und $OA^x = \cos \varrho$. Demnach ergibt sich:

$$\tan \tau' = \frac{A^x A'}{1 + OA^x}, \quad \tan \tau'' = \frac{A^x A''}{1 + OA^x},$$

und ferner

$$\tan \tau' = \frac{\sin \varrho \sin \theta}{1 + \cos \varrho}, \quad \tan \tau'' = \frac{\sin \varrho \cos \theta}{1 + \cos \varrho}, \quad \frac{\tan \tau'}{\tan \tau''} = \tan \theta.$$

Die Ableitung, daß bei der Drehung um die Polachse $O \mathfrak{P}_{23}$ für jede Lage des Sehpunktes auf dem durch den Okzipitalpunkt gehenden Bahnkreis α_{23} die Lage des Auges durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ bestimmt wird, gilt allgemein. Wir nehmen an, es werde der Sehpunkt von A_1 aus auf einem beliebigen Hauptkreis ζ mit dem Augkreuz in eine beliebige Lage A_2 gedreht. Dann ergeben sich dieselben Beziehungen wie bei jener Ableitung, obschon das Augkreuz sich nun in schräger Stellung gegen ζ befindet. Um die auf der Sehne $O A_2$ des Kreises ζ senkrechte Polachse $O \mathfrak{P}_{23}$ wird der Sehpunkt von A_2 aus mit dem Augkreuz in eine beliebige Lage gedreht, wobei sich der

Sehpunkt auf einem durch den Okzipitalpunkt Ω gehenden Kreis α_{23} bewegt. Und in diese Lage kann das Augkreuz auch durch Drehung aus der Hauptlage $l_1 A_1 w_1$ um eine in der Ebene YOZ liegende Polachse gebracht werden.

Die durch den Okzipitalpunkt Ω gehenden Kleinkreise, die nur Hauptkreise sind, wenn sie durch den Hauptsehpunkt A_1 gehen, hat Helmholtz Richtkreise genannt und auf ihre Wichtigkeit hingewiesen. Legen wir nun durch zwei Lagen eines beliebig bewegten Sehpunktes und den Okzipitalpunkt den Richtkreis, dann kann das Auge aus der einen der hierdurch bestimmten Lagen in die andere durch Drehung um die auf der Richtkreisebene senkrechte Polachse erfolgen, die also durch den Mittelpunkt des Richtkreises geht, und der zugehörige Pol bestimmt während dieser Drehung jede Lage des Auges. Hierbei kommt nun der Okzipitalpunkt hauptsächlich und der Hauptsehpunkt nur nebensächlich in Betracht. Sonach erhalten wir als Folgerung aus dem Listingschen Gesetz das bisher noch nicht bekannte Hauptgrundgesetz der Bewegung des Auges:

15. Jede Bewegung des Auges aus einer Lage in eine andere kann ersetzt werden durch Drehung um die Polachse, die auf der durch die beiden Lagen des Sehpunktes gehenden Richtkreisebene senkrecht ist.

Hieraus folgt der Satz:

16. Jede Bewegung des Auges, bei welcher der Sehpunkt aus einer gegebenen Lage in je eine beliebige andere gelangt, kann ersetzt werden durch Drehung um die Polachse, die auf der durch die beiden Lagen des Sehpunktes gehenden Richtkreisebene senkrecht ist; und diese Polachsen liegen in der Ebene, die in der Mitte auf der Verbindsehne der gegebenen Lage des Sehpunktes mit dem Okzipitalpunkt senkrecht steht, also auch durch den Drehpunkt des Auges geht.

Bewegt sich bei einer Bewegung des Auges der Sehpunkt A auf einer Bahnkurve α und wird für mehrere Lagen desselben jede entsprechende Lage des Auges durch den betreffenden Pol

bestimmt, dann kann man die Bahnkurve β eines Punktes B des Auges vermittle kongruenter sphärischer Dreiecke konstruieren. Jede von dem Okzipitalpunkt an die Bahnkurve α gelegte Berührebene ist die Richtkreisebene für zwei unendliche nahe Lagen des Sehpunktes und die unendliche kleine Bewegung des Auges kann als eine unendlich kleine Drehung um die auf der jeweiligen Richtkreisebene senkrechten Polachse betrachtet werden. Diese Richtkreisebenen sind Berührebenen der Kegel- fläche, deren Spitze der Okzipitalpunkt ist, und durch die Bahn- kurve α bestimmt wird. Die auf diesen Berührebenen senk- rechten Polachsen bilden den Rastpolachsenkegel des Auges, der auf dem zugehörigen Gangpolachsenkegel rollt.

Nach der Übertragung der aus Fig. 2 abgeleiteten Sätze 3, 4 auf die Bewegung des Auges in drei Lagen ergeben sich be- dingt durch das Hauptgrundgesetz mannigfaltige modifizierte Beziehungen, bei denen der Punkt A_1 dann den Okzipital- punkt Ω vertritt und der Punkt A_1 des Gebildes G_1 ein be- liebiger Sehpunkt oder insonderheit auch der Hauptsehpunkt sein kann.

Der Kreis auf dem Auge, der in dessen Hauptlage mit dem wagrechten Kreis ζ zusammenliegt, wird nach Helmholtz der Netzhauthorizont genannt, und wir bezeichnen ihn als solchen mit n . Den Kreis auf dem Auge, der in dessen Haupt- lage mit dem lotrechten Kreis ν vereint liegt, nennen wir den Hauptmeridian, und bezeichnen ihn als solchen mit m . Durch die Drehung um die Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ gelangt mit dem Augkreuz der Netzhauthorizont n in die Lage n_3 und der Hauptmeridian m in die Lage m_3 . Die Lage n_3 ist in der Zeichnung der durch den Sehpunkt A_3 und den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ be- stimmte Bogen $\mathfrak{P}_{23}n_3A_3$, der affin zu dem Bogen $\mathfrak{P}_{23}nA_2$ bezüglich $O\mathfrak{P}_{23}$ als Affinitätsachse bis an den Punkt N des Kreises ν gehend konstruiert ist, und den Kreis ξ im Punkt F schneidet. Demnach ist die Gerade ON die Aufrißspur und die Gerade OF die Seitenrißspur der Ebene On_3 . Analog ist die Lage m_3 der durch den Sehpunkt A_3 und den Pol $\mathfrak{P}_{113}$ be- stimmte Bogen $\mathfrak{P}_{113}m_3A_3$, der affin zu dem Kreisbogen $\mathfrak{P}_{113}mA_{11}$

bezüglich $O\mathfrak{P}_{II_3}$ als Affinitätsachse bis an den Punkt L des Kreises ζ gehend konstruiert ist, und den Kreis ξ im Punkt H schneidet. Demnach ist die Gerade OL die Grundrißspur und die Gerade OH die Seitenrißspur der Ebene Om_3 . Ferner ergibt sich auch in der Zeichnung vermittle der großen Halbachse $O\mathfrak{P}_{II_3}$ der Ellipse m_3 und des Punktes A_3 deren kleine Halbachse; und danach kann auch der Bogen $\mathfrak{P}_{II_3}m_3L$ konstruiert werden. Aus diesen Darlegungen folgt:

17. Je nachdem man den Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = \tau'$ oder $ZO\mathfrak{P}_{II_3} = \tau''$ macht, ergibt sich die Lage n_3 des anfangs wagrechten Netzhauthorizontes n durch den Großkreisbogen $\mathfrak{P}_{23}A_3$ oder die Lage m_3 des anfangs lotrechten Hauptmeridians m durch den Großkreisbogen $\mathfrak{P}_{II_3}A_3$.

Der erfolgreiche Gedanke von Ruete¹⁵⁾: vermittle des auf der Netzhaut entstehenden Nachbildes von einem auf einer Wand gespannten lotrechten, roten Band die Lage des anfangs lotrechten Meridians zu beobachten, hat Donders¹⁶⁾, später Ruete selbst¹⁷⁾, dann auch Wundt¹⁸⁾, Helmholtz¹⁹⁾ und Hering²⁰⁾ veranlaßt, die Beobachtungen zur Bestätigung des Listingschen Gesetzes auszuführen. Ferner hat Fick²¹⁾ den bilden Fleck auf der Netzhaut und Meißner²²⁾ die durch beide Augen entstehenden Doppelbilder bei diesen Beobachtungen verwendet. Bei dem Beginn der Beobachtungen ist zur Ermittlung der Hauptlage OA_1 zuerst die Blicklinie lotrecht auf- und abwärts, dann wagrecht nach rechts und links zu bewegen, bis das Nachbild nicht in schräger Lage erscheint. Danach ist die Vorrichtung für die Beobachtungen zu orientieren.

In Fig. 10 wollen wir die perspektive Abbildung der sphärischen Gebilde ausführen, wobei der Drehpunkt O , der Gesichtspunkt und die in einem Punkt $\mathfrak{A}_1$ auf der Hauptlage OA_1 der Blicklinie senkrecht mit $\mathfrak{B}$ bezeichnete Ebene die Bildebene ist. Diese Bildebene wird in der Darstellung rückseits gesehen und als durchsichtig angenommen; und die Bilder der Großkreise sind gerade Linien. Die durch den Punkt $\mathfrak{A}_1$ gehende lotrechte Gerade m und wagrechte Gerade n sind beziehlich

die Bilder von dem Hauptmeridian m und dem Netzhauthorizont n ; ferner ist $l_1 \mathfrak{A}_1 w_1$ das Bild von dem Augkreuz $l_1 A_1 w_1$. Die Winkel θ , ϱ , durch welche die Lage des Sehpunktes A_3 und der Blicklinie OA_3 , wie in Fig. 9 bestimmt wird, sind so zu wählen, daß A_3 innerhalb des Bereiches der Bewegung des Auges liegt. Das Bild $\mathfrak{A}_3$ von A_3 ergibt sich, indem wir durch seine Projektion A' die Gerade OA' bis an den Punkt $\mathfrak{A}'$ auf n und zu m die Parallele $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_3$ ziehen, welche die Blicklinie OA_3 in $\mathfrak{A}_3$ trifft; dann ist die durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ gehende Gerade α_{13} das Bild von dem Bahnkreis α_{13} .

Behufs der Konstruktion der Bilder m_3 , n_3 der Lagen m_3 , n_3 des Hauptmeridians und des Netzhauthorizontes können wir in verschiedener Weise verfahren. Die auf der Geraden $\Omega A''$ senkrechte Polachse $O\mathfrak{P}_{113}$ trifft die Bildebene $\mathfrak{B}$ in einem Punkt $\mathfrak{P}_{113}^*$ auf der Geraden m . Demnach ist die durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{P}_{113}^*$ gehende Gerade m_3 das Bild von der Lage m_3 des Hauptmeridians. Da aber der Punkt $\mathfrak{P}_{113}^*$ nicht zugänglich ist, so zeichnen wir ein zu dem Dreieck $O\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$ ähnliches und ähnlich liegendes Hilfsdreieck $o''a_1''a_3''$, indem wir zu $O\mathfrak{A}_1$ eine beliebige Parallele ziehen, welche $O\mathfrak{P}_{113}$ und m in den beiden Eckpunkten o'' , a_1'' schneidet; dann ist der dritte Eckpunkt a_3'' ein Punkt der Geraden m_3 . Analog trifft die auf der Geraden $\Omega A'$ bildlich senkrechte Polachse $\mathfrak{P}_{23}O$, die durch die Mitte M_2 der Sehne ΩA_2 geht, die Bildebene in einem Punkt $\mathfrak{P}_{23}^*$ auf der Geraden n . Demnach ist die durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{P}_{23}^*$ gehende Gerade n_3 das Bild von der Lage n_3 des Netzhauthorizontes n . Da der Punkt $\mathfrak{P}_{23}^*$ auch nicht zugänglich, so zeichnen wir wie vorhin ein zu dem Dreieck $O\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$ ähnliches und ähnlich liegendes Dreieck $o'a_1'a_3'$, dessen Eckpunkte o' , a_1' beziehlich auf $\mathfrak{P}_{23}O$, n liegen; dann ist der dritte Eckpunkt a_3' ein Punkt der Geraden n_3 . Somit ergibt sich auf den Geraden $\mathfrak{A}_3m_3$, $\mathfrak{A}_3n_3$ das Bild $l_3\mathfrak{A}_3w_3$ von dem Augkreuz $l_3 A_3 w_3$.

Bei der Drehung um die Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ bewegt sich der Sehpunkt auf dem Richtkreis α_{23} , dessen Ebene zur Grundriß-

ebene senkrecht ist, und die Blicklinie erzeugt die Drehkegelfläche $O\alpha_{23}$. Bei der Drehung um die Polachse $O\mathfrak{P}_{II3}$ bewegt sich der Sehpunkt auf dem Richtkreis α_{II3} , dessen Ebene zur Aufrißebene senkrecht ist, und die Blicklinie erzeugt die Drehkegelfläche $O\alpha_{II3}$. Die beiden Richtkreise α_{23} , α_{II3} , die sich in dem Okzipitalpunkt Ω und dem Sehpunkt A_3 rechtwinkelig schneiden, schmiegen sich sehr nahe an das auf m_3 , n_3 liegende Augkreuz.

Aus diesen Darlegungen ergeben sich die Sätze:

18. Bei der Bewegung des Sehpunktes auf einem zur Grundrißebene senkrechten Richtkreis α_{23} dreht sich die Lage n_3 des Netzhauthorizontes um die Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ und das Bild n_3 um den Punkt $\mathfrak{P}_{23}^*$.

19. Bei der Bewegung des Sehpunktes auf einem zur Aufrißebene senkrechten Richtkreis α_{II3} dreht sich die Lage m_3 des Hauptmeridians um die Polachse $O\mathfrak{P}_{II3}$ und das Bild m_3 um den Punkt $\mathfrak{P}_{II3}^*$.

Die Grundrißprojektion der gemeinsamen Tangente an m_3 , α_{23} in A_3 liegt in der Sehne ΩA_2 des Kreises ζ ; folglich geht diese Tangente nach dem Schnittpunkt T_{II} der in Ω auf $O\Omega$ Senkrechten und der Polachse $O\mathfrak{P}_{II3}$. Analog geht die gemeinsame Tangente an n_3 , α_{II3} in A_3 nach dem Schnittpunkt T_2 der von Ω ausgehenden, zu OY Parallelen und der Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$. Hiernach erhalten wir eine andere Konstruktion der Bilder m_3 , n_3 ; denn sie sind auch die Bilder der Tangenten $A_3 T_{II}$, $A_3 T_2$. Ziehen wir durch den Punkt U' , in welchem die Gerade $\Omega A'$ die Gerade n trifft, und zur Geraden m die Parallele $U'V_{II}$ bis an die Tangente $T_{II} A_3$, so ist der Punkt V_{II} deren Schnittpunkt mit der Bildebene $\mathfrak{B}$; und durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, V_{II} wird das Bild m_3 dieser Tangente bestimmt. Dabei ist der Schnittpunkt $\mathfrak{L}$ von m_3 , n das Bild des Punktes L , in welchem m_3 den Kreis ζ schneidet. In analoger Weise ergibt sich, indem wir durch den Punkt U'' , in welchem die Gerade $\Omega A''$ die Gerade m trifft, und zur Geraden n die Parallele $U''V_2$ bis an die Tangente $T_2 A_3$ ziehen; dann ist der Punkt V_2 deren Schnittpunkt mit der Bildebene $\mathfrak{B}$, und durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, V_2 wird das Bild n_3 dieser Tangente

bestimmt. Dabei ist der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ von n_3 , m das Bild des Punktes N , in welchem n_3 den Kreis ν schneidet.

Die erweiterte Drehkegelfläche, deren Spitze in O liegt und deren Grundkreis der Richtkreis α_{23} ist, wird von der Bildebene $\mathfrak{B}$ in einer Hyperbel geschnitten. Hierbei kommt nur der eine Hyperbelzweig α_{23} in Betracht. Denn die zur Bildebene parallele Ebene OYZ schneidet ΩA_2 in einem Punkt J und die Ebene des Richtkreises α_{23} in der durch J gehenden zu OZ Parallelen i, j ; mithin ist Hyperbelzweig α_{23} das Bild von dem durch die Punkte i, j begrenzten rechtsseitigen Teil des Richtkreises α_{23} , und diese Punkte sind auch die Schnittpunkte, die der Kreis ξ mit dem Richtkreis bildet. Die Gerade OA_2 trifft die Gerade n in dem Punkt $\mathfrak{U}_2$ des Hyperbelzweiges α_{23} .

So wie vermittels der Geraden OA' , welche die Gerade n in dem Punkt $\mathfrak{U}'$ trifft, und der zur Geraden m Parallelen $\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_3$ der Punkt $\mathfrak{U}_3$ bestimmt wurde, werden auch andere Punkte des Hyperbelzweiges α_{23} konstruiert, der das Bild des rechtsseitigen Teiles des Richtkreises α_{23} ist. Seinem linksseitigen Teil entspricht als Bild der nicht in Betracht kommende andere Hyperbelzweig, der durch den Punkt $\mathfrak{U}_1$ gehen würde; und die Strecke $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ ist demnach das Bild der Hauptachse der zugehörigen Hyperbel. Die Asymptoten an dem Hyperbelzweig α_{23} sind parallel zu den Mantellinien Oi, Oj jener Drehkegelfläche. In ähnlicher Weise wird der Hyperbelzweig α_{113} konstruiert, der das Bild von dem betreffenden Teil des Richtkreises α_{113} ist. Dem Punkt A_{11} entspricht das Bild $\mathfrak{U}_{11}$ auf m , und die Strecke $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_{11}$ ist das Bild der Hauptachse der zugehörigen Hyperbel. Die Bilder m_3, n_3 sind Tangenten an den Hyperbelzweigen $\alpha_{23}, \alpha_{113}$ in deren Schnittpunkt $\mathfrak{U}_3$.

Zu den Bewegungen des Auges in einem der vier rechtsseitigen Flächenachteln der ruhenden Kugelfläche gibt es in den drei anderen gleichartige Bewegungen, und diese vier Bewegungen sind paarweise symmetrisch. Die in den vier Flächenachteln gleichartig liegenden Sehpunkte A_3, A_4, A_5, A_6 sind die Eckpunkte eines Rechtecks. Demzufolge ergeben sich noch

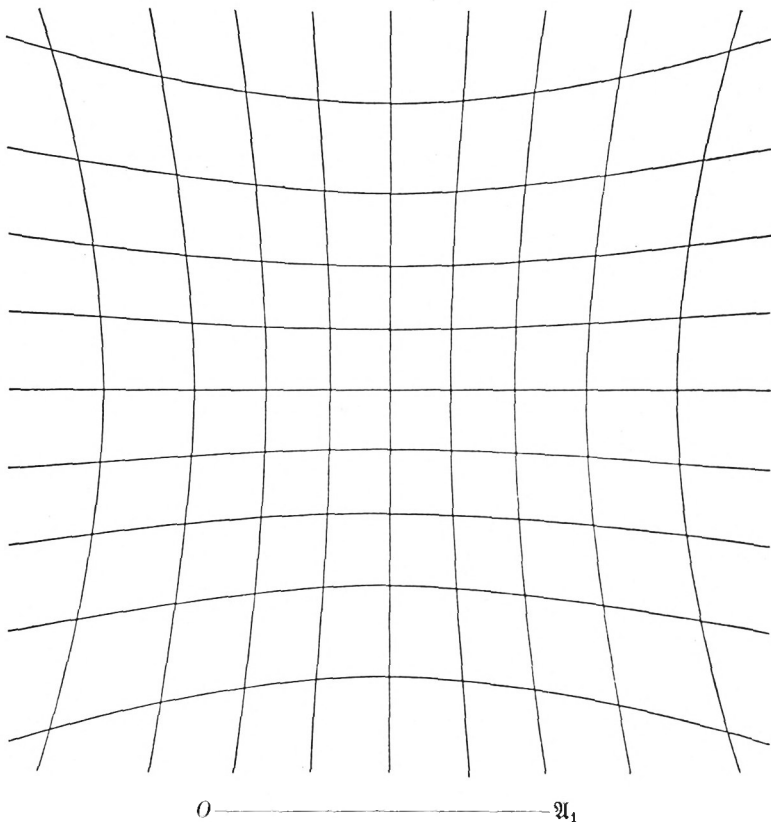
zwei andere Hyperbelzweige α'_{23} , α'_{113} , die den Hyperbelzweigen α_{23} , α_{113} symmetrisch gegenüber liegen. Jedes der Paare $\alpha_{23}\alpha'_{23}$ und $\alpha_{113}\alpha'_{113}$ gehört zu je zwei kongruenten Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Scheitel in $\mathfrak{A}_1$. Die vier Schnittpunkte $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ der vier Hyperbelzweige sind somit die Bilder von den vier Sehpunkten A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , und Eckpunkte eines Rechtecks, das zu jenem Rechteck ähnlich ist. Die zugehörigen zu m_3 , n_3 symmetrischen Bilder m_4 , m_5 , m_6 des gedrehten Hauptmeridians und die n_4 , n_5 , n_6 des gedrehten Netzhauthorizontes sind zur Vervollständigung eingezeichnet.

Bei der Bewegung des Sehpunktes auf dem Bahnkreis α_{13} sind die Bilder von dem auf ihm senkrechten Kreisbogen $\mathfrak{P}_{13}A_1$ in allen Lagen parallele Gerade, weil die in der Ebene YOZ liegende Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ parallel zu der Bildebene $\mathfrak{B}$ ist. Da das Bild von dem zwischen den Kreisbögen $A_1\mathfrak{P}_{13}$, $A_1\alpha_{13}$ liegenden rechten Winkel auch ein rechter Winkel ist, so sind jene parallelen Bilder in Wirklichkeit senkrecht auf dem Bilde $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$ des Bahnkreises α_{13} .

Wenn wir die Bildebene mit ihrem vorderen Teil nach rechts und die Gerade m parallel zur Zeichenebene drehen, dann erhalten wir in Fig. 10a die Bilder $l_1\mathfrak{A}_1w_1$, $l_3\mathfrak{A}_3w_3$ von dem bei A_1 und A_3 befindlichen Augkreuz in der wahren Größe und Richtung, aber wegen des Platzes ist ihr Abstand $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$ verkürzt gezeichnet. Und nach der vorherigen Darlegung entsprechen sich die bei $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ punktiert gezeichneten Kreuze.

Zur Übersicht ist umseitig die Helmholtzsche Hyperbelnfigur eingefügt, in der die Hyperbelzweige die perspektiven Bilder der Richtkreise sind für einen Abstand $O\mathfrak{A}_1$ des Drehpunktes des Auges von der Bildebene im Maßstab 200 mm; wobei in Fig. 10 die Winkel A_1OA_2 , A_1OA_{11} , welche die Richtkreise α_{23} , α_{113} bestimmen, sich von zehn zu zehn bis vierzig Grad vergrößern. In den Schnittpunkten, die je ein Hyperbelzweig mit den anderen Hyperbelzweigen bildet, gehen die an diese gelegten Tangenten durch je einen Punkt; und da diese Tangenten die Bilder von den entsprechenden Lagen des gedrehten Hauptmeridians und Netzhauthorizontes sind, so wird die Gesamtheit

dieser Bilder vorstellbar. Die Konstruktion der Hyperbelzweige kann mittels senkrechter Projektion leicht ausgeführt werden, weil jene Winkel für jeden Hyperbelzweig den Scheitel, die Hauptachse und die Asymptoten bestimmen.



Nachdem wir in Fig. 10 anschaulich im Zusammenhang mit den dargestellten Lagen m_3 , n_3 des gedrehten Hauptmeridians und Netzhauthorizontes zwei Konstruktionen ihrer Bilder m_3 , n_3 ausgeführt haben, wollen wir noch eine hiervon unabhängige dritte Konstruktion ausführen.

Wir bezeichnen den Abstand des Drehpunktes O des Auges von der Bildebene $\mathfrak{B}$ mit p , und konstruieren zuvörderst den

Punkt $\mathfrak{U}_3$, der durch die gegebenen Winkel θ , ϱ bestimmt wird, indem wir an die Gerade m den Winkel $m\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_3 = \theta$ legen, und die Strecke $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_3 = p \tan \varrho$ machen. Um die Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ auf der Bildebene $\mathfrak{B}$ zu ermitteln, durch die sich die Bilder m_3 , n_3 ergeben, beachten wir, daß die sphärischen Dreiecke $A_1 A_3 N$, $A_3 A_1 L$ mit der gemeinsamen Seite $A_1 A_3 = \varrho$ kongruent sind, weil in dem ersten die Winkel θ , $90 - \theta$ an den Ecken A_1 , A_3 und in dem zweiten an den Ecken A_3 , A_1 liegen; mithin sind die Seiten $A_1 L$, NA_3 und $A_1 N$, LA_3 gleich, ferner sind auch die Winkel an den Ecken L , N gleich. Diesen beiden kongruenten sphärischen Dreiecken entsprechen kongruente Dreikante. Aus einem dieser Dreikante, etwa aus $OA_1 A_3 L$, in dem die Seite $A_1 O A_3 = \varrho$ und $90 - \theta$, θ die anliegenden Winkel bei A_1 , A_3 sind, konstruieren wir die beiden anderen Seiten. Zu diesem Zweck zeichnen wir in Fig. 11 den Winkel $L'RL'' = \varrho$ und tragen auf seinen beiden Schenkeln gleiche Strecken von beliebiger Länge ab; ferner zeichnen wir die in dem Scheitel R rechtwinkeligen Dreiecke $RL'A'$, $RL''A''$, in denen die Winkel an den Ecken A' , A'' beziehlich gleich $90 - \theta$, θ sind, und machen $A'L'_0 = A'L'$, $A''L''_0 = A''L''$. Sodann ziehen wir zu $L'R$, $L''R$ die Parallelen $A'O$, $A''O$ und ferner die Geraden OL'_0 , OL''_0 . Hiernach sind $A'OL'_0 = \lambda'$, $A''OL''_0 = \lambda''$ gesetzt, die wahren Größen der in Fig. 10 dargestellten Seiten $A_1 OL$, $A_3 OL$ des Dreikants $OA_1 A_3 L$, und λ'' ist auch die wahre Größe von $A_1 ON$, weil $A_1 ON = A_3 OL$ ist. Somit ist in wahrer Größe die Strecke $\mathfrak{U}_1\mathfrak{L} = p \tan \lambda'$, und die Strecke $\mathfrak{U}_1\mathfrak{N} = p \tan \lambda''$. Demnach bestimmen die Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ die durch den Punkt $\mathfrak{U}_3$ gehenden Bilder m_3 , n_3 der Lagen m_3 , n_3 des gedrehten Hauptmeridians und Netzhaut-horizontes.

Um das Listingsche Gesetz durch Beobachtungen zu prüfen, kann man auf einer grauen Kartonplatte, deren Größe im Geviert etwa 70 cm ist, zwei 6 mm breite, aus rotem Papier geschnittene Bänder rechtwinkelig spannen, welche die Geraden m , n vertreten, und die vier Paare jener Bilder mit den Punkten $\mathfrak{U}_3$, $\mathfrak{U}_4$, $\mathfrak{U}_5$, $\mathfrak{U}_6$ zeichnen. Wenn man den Abstand des Dreh-

punktes des Auges von dem Scheitel der Hornhaut gleich 13 mm annimmt, dann in dem zugehörigen, bestimmten senkrechten Abstand des Drehpunktes von der Kartonplatte bei festgestellter Kopfhaltung und genauer Einrichtung durch Fixieren der Kreuzung der roten Bänder von ihnen ein deutliches hellgrünes Nachbild empfangen hat, und dann den Blick nach je einem der vier Punkte richtet, so kann man bei dieser viermaligen Beobachtung das Nachbild mit den gezeichneten Bildern der Lagen des Hauptmeridians und des Netzhauthorizontes vergleichen, und auch für je vier andere Punkte die Beobachtung ausführen.

Bisher haben wir nur die absolute Bewegung des Auges in der Aughöhle behandelt. Nun aber wurde von den meisten Beobachtern zur Bestätigung des Listingschen Gesetzes eine besondere relative Bewegung ohne Verständnis verwendet, bei der sich ein einfaches sphärisches Gebilde auf dem bewegten Auge bewegt. Dieses Gebilde besteht in Fig. 8 aus einem von dem Sehpunkt bewegten Großkreis v , der sich um die Achse YY dreht, und dessen durch den Sehpunkt A_3 gehende Lage mit v_3 bezeichnet ist. Bei einer beliebigen Bewegung des Sehpunktes aus der Hauptlage A_1 nach A_3 gelangt also der Großkreis v aus seiner in dem Kreis ζ befindlichen Hauptlage in die Lage v_3 . Dabei dreht sich die Großkreisebene um die durch die Drehpunkte der beiden Augen gehende Achse YY und enthält die beiden von den Drehpunkten nach einem Objektpunkt gerichteten Blicklinien. Deshalb hat Helmholtz diese Großkreisebene die Blickebene genannt, und wir wollen den Großkreis v Blickkreis nennen.

Bei der Drehung des Auges um die Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ bewegt sich der Sehpunkt, den mitbewegten Blickkreis führend, auf dem Bahnkreis α_{13} von A_1 nach A_3 . Diese besondere relative Bewegung ist die in Fig. 7 erörterte Führungsbewegung, wenn dort die eine der Kurve k^2 , k^3 durch einen Punkt ersetzt wird, der nun hier der Sehpunkt ist. Den mit ω bezeichneten Winkel zwischen n_3 , v_3 , den der gedrehte Netzhauthorizont und der mitbewegte Blickkreis bei der Führungsbewegung einschließen,

nennen wir den Auglenkwinkel und nehmen ihn als positiv an im Sinne von v_3 nach n_3 .

Befangen in dem Irrtum, daß sich das Auge während seiner Bewegung um die Blickline drehe, hat Helmholtz²³⁾ diesen Winkel „Raddrehungswinkel“ genannt. Wundt²⁴⁾ bezeichnet die vermeintliche Drehung um die Blicklinie als „Rollung oder Raddrehung des Auges, und den Winkel, den dabei der Netzhauthorizont mit seiner ursprünglichen Lage bildet als Rollungs- oder Raddrehungswinkel“. In Fig. 8 ist das aber der Winkel, den n , n_3 bei $\mathfrak{P}_{23}$ einschließen. Die aus jenem Irrtum entstandene verfehlte Benennung „Raddrehwinkel“ für zwei verschiedene Winkel ist verhängnisvoll in dem Verständnis der Bewegung des Auges geworden.

Um in Fig. 10 den Auglenkwinkel ω zu konstruieren und sein Bild zu erhalten, bestimmen wir die Tangente im Punkt A_3 an den hierbei nicht nötigen und deshalb auch nicht eingezeichneten, durch A_3 , Y gehenden Blickkreis. Die durch $\mathfrak{A}_3$ gehende zu n Parallele v_3 ist das Bild dieses Blickkreises; denn alle Bilder seiner Lagen sind wagrecht. Da die Tangenten $T_{II}A_3$, T_2A_3 an m_3 , n_3 die Bildebene $\mathfrak{B}$ in den Punkten V_{II} , V_2 treffen, so schneidet die Berührebene an der Kugelfläche im Punkt A_3 die Bildebene in der Geraden $V_{II}V_2$, die v_3 in einem Punkt W trifft. Demnach ist die Gerade A_3W die Tangente an dem Blickkreis, die mit der Tangente A_3V_2 des Kreises n_3 den in der Berührebene liegenden Auglenkwinkel ω bilden, und dessen Bild ist der von v_3 und n_3 eingeschlossene Winkel σ .

Es ist das Verdienst Helmholtz, daß er aus den Ergebnissen seiner und vieler anderer Beobachtungen die Funktion des nun von uns benannten Auglenkwinkels für günstige Koordinaten abgeleitet und in vornehmliche Formen gebracht hat. Dabei benutzte er vier rechtwinkelige räumliche Koordinatensysteme, deren Umwandlungen umständliche Rechnungen mit zwölf Koordinaten und mehreren Hilfswinkeln erfordern, so daß das Verständnis sehr erschwert wird. Deshalb wollen wir die Ableitung dieser Funktion in einfacherer Weise ausführen.

Zuvörderst bestimmen wir in Fig. 9 die Lage einer Blicklinie OA_3 oder eines Sehpunktes A_3 durch die von Helmholtz verwendeten Koordinaten. Erstens erheben wir die Blicklinie aus der Hauptlage OA_1 in der Ebene XOZ um den gegebenen Winkel $A_1OE = \varepsilon$, den wir statt „Erhebungswinkel“ kürzer Erhebungswinkel nennen. Zweitens wenden wir die Blicklinie seitwärts nach außen in der auf XOZ senkrechten EOA_3 um den Winkel $EOA_3 = \sigma$, den wir statt „Seitenwendungswinkel“, kürzer Seitenwendungswinkel nennen. Und diese beiden Winkel nehmen wir als positiv an. Um den Winkel σ im Bilde darzustellen, legen wir an OE seine gegebene wahre Größe $EO\Sigma = \sigma_0$, fällen wir von Σ auf OE die Senkrechte $\Sigma A''$, ziehen zu OY die Parallele $A''A_3$ und machen sie gleich der Hälfte dieser Senkrechten. Demnach ergibt sich, weil in dem Dreieck $OA''A_3$ der Winkel an A'' ein rechter und der Radius der Kugelgröße gleich der Einheit angenommen ist:

$$A^x A' = A'' A_3 = \sin \sigma \text{ und } OA^x = \cos \sigma \cos \varepsilon.$$

In Fig. 8 ist der Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = A^x \Omega A' = \tau'$, mithin

$$\tan \tau' = \frac{A^x A'}{1 + OA^x} = \frac{\sin \sigma}{1 + \cos \sigma \cos \varepsilon}.$$

Da ferner der Winkel $\mathfrak{P}_{23}OA_3 = \mathfrak{P}_{23}OA_2 = 90 - \tau'$ und bei dem sphärischen Dreieck $A_3\mathfrak{P}_{23}Y$ der Außenwinkel an Y gleich ε ist, so folgt:

$$\frac{\sin \omega}{\sin \tau'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin (90 - \tau')} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \tau'}, \quad \sin \omega = \sin \varepsilon \tan \tau'$$

und für den Auglenkwinkel ω die Funktion:

$$\text{I} \quad \sin \omega = \frac{\sin \varepsilon \sin \sigma}{1 + \cos \varepsilon \cos \sigma},$$

welche die Bewegung des Auges dargestellt.

Hieraus folgen nach trigonometrischen Umformungen die beiden Helmholtzschen symmetrischen Formen der Funktion für den Auglenkwinkel ω :

$$\text{II} \quad \tan \omega = \frac{\sin \varepsilon \sin \sigma}{\cos \varepsilon + \cos \sigma},$$

$$\text{III} \quad \tan \frac{\omega}{2} = \tan \frac{\varepsilon}{2} \tan \frac{\sigma}{2}.$$

Aus den Gleichungen I und II folgen sehr einfache Konstruktionen des Auglenkwinkels ω , weil in Fig. 9 die auf $A^x P$ Senkrechte $\Sigma S = \sin \varepsilon \sin \sigma$ und die Strecke $OA^x = \cos \varepsilon \cos \sigma$ ist. Und die Gleichung III dient zur einfachen logarithmischen Rechnung für den Auglenkwinkel.

Helmholtz hat in seiner Ableitung der Funktion, um ihre Gültigkeit auch für die von Fick verwendeten Koordinaten des Sehpunktes Longitudo und Latitudo, also Länge und Breite, zu beweisen, das Verständnis erschwerend mit einbegriffen, bei denen in Fig. 8 die Länge auf dem Kreis ζ als Äquator von A_1 aus bis an den gedachten durch Z , A_3 bestimmten Meridian und auf diesem die Breite bis an A_3 gemessen wird. Dabei hat Helmholtz noch den Winkel eingeführt, der die Lage m_3 des gedrehten Hauptmeridians mit dem Meridianbogen $A_3 Z$ bildet. Das ist ein neuer zu ω analoger Auglenkwinkel mit entgegengesetztem Vorzeichen. Aber aus den analogen Beziehungen der Lage n_3 zu dem Blickkreis und der Lage m_3 zu jenem Meridian folgt unmittelbar, daß für diesen neuen Auglenkwinkel sich dieselbe Funktion mit den Koordinaten Länge und Breite ergibt. Ferner folgt dies auch, wenn wir in Fig. 9 den Kreis ν als Äquator betrachten, und uns zu ihm durch den Sehpunkt A_3 den Parallelkreis $\varkappa$ als Breitenkreis ziehen; dann ist der Erhebungswinkel ε die Länge und der Seitenwendwinkel σ die Breite. Auch Meinong hat darauf hingewiesen, daß man das Ficksche Koordinatensystem um OX drehen könne, bis der Kreis ζ nach dem Kreis ν gelangt.

Je nachdem wir in der Funktion $\varepsilon = 0$ oder $\sigma = 0$ annehmen, bewegt sich der Sehpunkt auf dem Kreis ζ oder ν ; dann ist bei den beiden Bewegungen der Auglenkwinkel $\omega = 0$. Weiter können noch manche theoretische Ergebnisse aus der Funktion gefolgert werden. Nehmen wir an, daß der Seh-

punkt beliebig oder auf dem Bahnkreis α_{13} bis an den Kreis ξ nach dem Punkt Ξ bewegt wird, dann fällt der mitbewegte Blickkreis v mit dem Kreis ξ zusammen, und es ist $\varepsilon = 90^\circ$. Demnach folgt aus der Funktion $\omega = \sigma$. Hierbei ergibt sich, daß der Auglenkwinkel ω für alle Lagen des Sehpunktes auf dem Kreis ξ gleich dem zugehörigen Lagewinkel θ ist. Für die Lage des Sehpunktes in dem Punkt Y ist $\sigma = 90^\circ$, und somit $\omega = \varepsilon$; demzufolge ist Y ein singulärer Punkt, wobei die Blickebene beliebig um die Achse $Y\bar{Y}$ gedreht werden kann.

Bei Vertauschung der Werte ε, σ entsprechen den hierdurch bestimmten beiden Sehpunkten gleiche Werte des Auglenkwinkels und je zwei dieser Sehpunkte sind demzufolge einander zugeordnet. Nehmen wir für ε, σ gleiche Werte an, dann wird dadurch auf der Kugelfläche eine Kurve bestimmt, in der je zwei zugeordnete Sehpunkte zusammenfallen; und diese Kurve wollen wir die Gleichheitskurve nennen. Setzen wir ε und σ gleich φ in die Gleichung II, so ergibt sich, daß für die Sehpunkte auf der Gleichheitskurve $\tan \omega = \frac{1}{2} \sin \varphi \tan \varphi$ ist. Denken wir uns in Fig. 9 von A_1 auf OE die Senkrechte gefällt, so ist deren Fußpunkt bei der Annahme $\sigma = \varepsilon$ die Aufrißprojektion eines Punktes der Gleichheitskurve und liegt auf dem Kreis, der den Durchmesser OA_1 enthält. Demnach ist dieser Kreis die Aufrißprojektion der Gleichheitskurve, und die durch ihn bestimmte Drehzylinderfläche schneidet die Kugelfläche in der Gleichheitskurve, zu der beiderseits je zwei zugeordnete Sehpunkte liegen. Wenn wir für ω konstante Werte annehmen, ergeben sich auf der Kugelfläche die Kurven gleicher Auglenkwinkel.

Die wirkliche Bewegung des Augapfels mit einem auf ihm neben der Iris befestigten, kleinen Merkmal werden wir in allen Phasen erst erkennen, wenn es ermöglicht ist, vermittels eines Rapid-Kinematographen²⁵⁾ einen Film von der Bewegung des Auges zu erhalten, durch den uns diese Bewegung verhältnismäßig langsam vorgeführt wird.

Literaturnachweise und Bemerkungen.

¹⁾ J. Purkinje, Beobachtungen und Versuche zur Physiologie der Sinne, 1823, Bd. I, S. 162, und 1825, Bd. II, S. 54.

²⁾ a) H. v. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 1810, 3. Aufl., Bd. III, S. 35, 105. b) L. Hermann, Handbuch der Physiologie, 1879, Bd. III, S. 433.

³⁾ L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 602, Fig. 627.

⁴⁾ H. v. Helmholtz, Ann. 2. a) a. a. O. S. 38.

⁵⁾ a) C. G. Ruete, Lehrbuch der Ophthalmologie, 1854, 2. Aufl., Bd. I, S. 37. b) Ein neues Ophthalmotrop, 1857, S. 43.

⁶⁾ A. Hueck, Die Achsendrehung des Auges, 1838, S. 16 schreibt: „Die Drehung des Augapfels um seine Längsachse ist beim lebenden Auge nachweisbar“.

⁷⁾ Johannes Müller in seinem vortrefflichen Werk, Zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinnes, 1826, S. 254. Er hat sich überzeugt, „daß das Auge bei der Bewegung nicht zugleich um die Längsachse rotiert“.

⁸⁾ G. Meißner, Archiv für Ophthalmologie, 1855, Bd. II, Abt. 1, S. 71 schreibt: „So viel können wir aber auch mit völliger Sicherheit aussagen, daß eine Drehung um die optische Achse als Drehachse niemals vorkommt.“ Und S. 97 glaubt er mit Recht „das Listingsche Gesetz durch Beobachtungen bewiesen“.

⁹⁾ F. C. Donders, Archiv für Ophthalmologie, 1870, Bd. XVI, S. 158 schreibt: „Die Literatur ist besonders, was die sogenannte Raddrehung betrifft, nicht von Verwirrungen frei zu sprechen.“

¹⁰⁾ C. G. Ruete, Ein neues Ophthalmotrop, 1857, S. 25.

¹¹⁾ Tourtual in Joh. Müllers Archiv für Anatomie, Physiologie, 1846, Abt. 2, S. 355 schreibt: „Die Drehung des Augapfels um die Sehachse werde ich der Kürze halber Rollung nennen“. Aber noch früher schreibt auch E. A. Lauth, Neues Handbuch der praktischen Anatomie, 1835, Bd. I, S. 319: „Betrachtet man jeden schiefen Augenmuskel einzeln für sich, so scheint er zum Rollen des Augapfels um die Längsachse bestimmt zu sein. In der Anatomie wird Drehung um eine Achse auch oft Rollung genannt. Vielleicht kommt diese unrichtige Benennung von der Redensart „Die Augen rollen“ und z. B. „Vor Wut die Augen rollen“.

Weitere Hinweise befinden sich in Grimms Deutsches Wörterbuch, Art. Rollen, S. 1190. Unbewußt ist diese Redensart richtig bei der allgemeinen Bewegung, wo der Gangpolachsenkegel des Auges auf dem Rastpolachsenkegel rollt.

12) H. v. Helmholtz, Archiv für Ophthalmologie, 1863, Bd. IX, Ab. 2, S. 154. Vor ihm schreibt A. W. Volkmann: „Die Iris dreht sich deutlich um den Mittelpunkt der Pupille“ in R. Wagners Handwörterbuch, 1840, Art. Sehen.

13) A. Meinong, Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, 1898, Bd. XVII, S. 161.

14) J. v. Kries, Zusätze in Helmholtz, Physiologische Optik, 1910, Bd. III, S. 119.

15) C. G. Ruete, Lehrbuch der Ophthalmologie, 1845, S. 14 und dessen Ein Ophthalmotrop, 1846, S. 9.

16) F. C. Donders, Holländische Beiträge zu den anatomischen und physiologischen Wissenschaften, 1848, Bd. I, S. 105.

17) C. G. Ruete, Anm. 10, a. a. O., S. 22.

18) W. Wundt in Archiv f. Ophthalmologie, 1861, Bd. VII, Abt. 2, S. 1.

19) H. v. Helmholtz daselbst, 1863, Bd. IX, Abt. 2, S. 153.

20) E. Hering in L. Hermann, Handbuch der Physiologie, 1879, Bd. III, S. 477.

21) A. Fick in Jac. Moleschott, Untersuchungen zur Naturlehre des Menschen, 1858, Bd. V, S. 193.

22) G. Meißner, Anm. 8.

23) H. v. Helmholtz, Anm. 2a, a. a. O., S. 38.

24) W. Wundt, Archiv für Ophthalmologie, 1861, Bd. VIII, Abt. 2, S. 1, und Grundzüge der physiologischen Psychologie, 1910, 6. Aufl., Bd. II, S. 550.

25) J. Paul Liesegang, Handbuch der praktischen Kinematographie, 1912, 3. Aufl., S. 374.

