

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft I

Januar- bis Märzszung

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über den Ursprung der durchdringenden atmosphärischen Strahlung.

Von R. Seeliger.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 9. Februar 1918.

Inhaltsübersicht: § 1. Einleitung. § 2. Das Beobachtungsmaterial. § 3. Die Problemstellung. § 4. Abhängigkeit der Jonisation von der Höhe; Bestimmung der Absorption. § 5. Zusätze und Ergänzungen (Erdkrümmung, Richtungseffekt). § 6. Die Streuung der Strahlen. § 7. Bestimmung der Aktivität. § 8. Zusammenfassung der Resultate.

§ 1. In ihrem vorzüglichen Buch über die Radioaktivität haben St. Meyer und von Schweidler¹⁾ eingehend auch den Ursprung der dauernden schwachen Jonisierung diskutiert, welche die Gasfüllung allseitig geschlossener Gefäße zeigt. Sie finden, daß dieselbe sich zusammensetzt aus sieben Summanden, von denen sechs sich zwanglos erklären lassen durch die jonisierende Wirkung der Strahlungen radioaktiver Substanzen, die im Jonisationsgefäß selbst und in dessen Umgebung vorhanden sind; abzüglich gewisser Unsicherheiten hinsichtlich der Konzentration der Thor- und Aktiniuminduktionen ergibt sich der Betrag der beobachteten Jonisierung qualitativ und quantitativ aus den bekannten Konzentrationen strahlender Substanzen in den irdischen Körpern (Gefäßmaterial, feste Erdrinde, Atmosphäre usw.) und aus den ebenfalls bekannten Eigenschaften dieser Strahlungen. Anders liegen jedoch die Verhältnisse be-

¹⁾ St. Meyer und v. Schweidler: Die Radioaktivität (Teubner 1916), S. 472 ff.

züglich des siebten Summanden, dessen Deutung sich nicht, wie die der übrigen, auf bereits Bekanntes zurückführen läßt; man deutet ihn, in erster Linie veranlaßt durch die Ergebnisse einiger Ballonhochfahrten von Heß, Kolhörster u. a. als die Wirkungen einer γ -ähnlichen Strahlung bisher unbekannten Ursprungs, der sogenannten durchdringenden Strahlung. Um deren Herkunft erklären zu können, sah man sich nun zu Hypothesen gezwungen, die nicht nur geophysikalisch, sondern auch rein physikalisch hinsichtlich der Eigenschaften der emittierenden Substanzen und der Strahlung selbst das größte Interesse beanspruchen können, worauf besonders v. Schweidler in einer grundlegenden Arbeit hingewiesen hat¹⁾. Die Untersuchung v. Schweidlers weiter zu führen und namentlich dieselbe mathematisch tunlichst exakt auszuarbeiten, schien mir nun wünschenswert, um ein Urteil darüber zu bekommen, inwieweit die Tatsachen zu derartigen Hypothesen wirklich zwingen und um gewisse Richtlinien für die weitere Erforschung der durchdringenden Strahlung zu erhalten.

Wählt man die Wandstärke des Ionisationsgefäßes genügend groß, so daß von außen kommende α und β Strahlen abgehalten werden und nur γ Strahlen durchzudringen vermögen, so kommen als Jonisatoren außer den Strahlungen des Gefäßes und der Gasfüllung selbst bzw. der auf dem Gefäß sitzenden Induktionen nur γ Strahlen in Betracht, welche aus dem Außenraum des Gefäßes stammen; die Gesamtwirkung der ersteren (die von der Größenordnung 10 Ionen pro Sekunde zu veranschlagen ist) kann im stationären Zustand als eine Konstante des Apparates betrachtet werden, so daß wir uns im folgenden also lediglich um die letztere zu kümmern brauchen. Beobachtungen im Freiballon und im Gebirge haben nun gezeigt, daß diese *cet. par.* abhängt von der Lage des Ionisationsgefäßes im Raum, d. h. von der Höhenlage desselben über dem Meeresniveau, und es ist gelungen, sie nicht nur qualitativ als Funktion der Höhe, sondern auch quantitativ zu bestimmen.

¹⁾ v. Schweidler, Festschrift für Elster und Geitel 1915, S. 411.

Unter der obigen Annahme, daß der hier interessierende Anteil der Jonisation herrührt von einer von außen in das Jonisationsgefäß eindringenden Strahlung, läßt sich dann das Problem folgendermaßen formulieren: Gegeben ist die Anzahl von Jonenpaaren, welche in der Volumeinheit des Füllgases pro Zeiteinheit erzeugt werden, und zwar ist diese Anzahl gegeben als eine Funktion des Orts; gesucht sind die räumliche Verteilung und die Ergiebigkeiten der Strahlungsquellen im Außenraum und die Eigenschaft der durchdringenden Strahlung, d. h. vor allem der Absorptionskoeffizient und die Gesetze ihrer Ausbreitung im Raum. Damit ist die Problemstellung absichtlich möglichst formal, ähnlich etwa den Problemen der Potentialtheorie, gegeben; ein zweiter Schritt erst wird es dann sein, die erhaltenen Lösungen physikalisch zu interpretieren und an sie Hypothesen über die Natur der Strahlungsquellen anzuschließen.

§ 2. Die erste Aufgabe ist es natürlich, das Beobachtungsmaterial daraufhin zu diskutieren, was wir an demselben als gesicherte Kenntnis betrachten dürfen. Wie wir bereits bemerkten, hängt die Jonisation ab von der Erhebung des Beobachtungsortes über das Meeresniveau; die ganze Sachlage bedingt nun, daß die experimentelle Untersuchung gebunden ist an die Möglichkeit, im Freiballon zu beobachten, und dies wiederum ist der Grund, warum bisher nur eine geringe Zahl von Messungsreihen uns zur Verfügung steht. Jedenfalls ist es notwendig, nachdrücklich auf den geringen Umfang des vorhandenen Beobachtungsmaterials hinzuweisen, um vor einer Überschätzung der quantitativen Seite desselben bewahrt zu bleiben. Andererseits aber ist es immerhin schon heute bei vorsichtiger Interpretation möglich, gewisse Daten als sicher gestellt anzunehmen und auf ihnen einige das Prinzipielle ohne Zweifel treffende Schlüsse aufzubauen. Wenn wir nun alle hypothetischen Elemente a priori tunlichst ausschalten wollen, ist es unbedingt erforderlich, jene Daten herauszuschälen; eine gewisse Schematisierung der Beobachtungsergebnisse unter Hervorhebung der wichtigen Punkte ist allerdings notwendig, aber sie dürfte zunächst für die Theorie nur von Vorteil sein.

Wir charakterisieren die Intensität der jonisierenden Strahlung in der üblichen Weise durch die Anzahl q von Ionenpaaren, welche pro Volum- und Zeiteinheit in Luft von Atmosphärendruck erzeugt werden. Die Beobachtungen haben dann zweierlei Angaben zu liefern; die der ersten Art sind quantitativer Natur und geben jeweils den Zahlenwert von q an, die der zweiten Art sind funktioneller Natur und geben q als Funktion der Höhe. Beide sind für die Theorie von gleicher Wichtigkeit, beide aber können aus den Beobachtungen nicht direkt entnommen werden, sondern erst nach einer Reduktion, die mit einiger Unsicherheit behaftet ist. Was man nämlich direkt mißt, ist die Gesamtjonisation Q in der Volumeinheit des Füllgases, die sich zusammensetzt aus drei Teilen, nämlich aus 1. der gesuchten, d. h. in die Theorie eingehenden Volumjonisierung q durch die äußere Strahlung, 2. der bereits besprochenen und sozusagen als Apparatkonstante aufzufassenden Eigenjonisierung q_1 des Jonisationsgefäßes und 3. der Jonisierung q_2 durch die von der äußeren Strahlung in den Wänden des Gefäßes ausgelösten Sekundärstrahlen. Es ist also

$$Q = q + q_1 + q_2. \quad 1)$$

Der Teil q_1 läßt sich, wie verschiedentlich gezeigt wurde¹⁾, exakt bestimmen und ist für denselben Apparat in der Tat konstant, so daß er also bei der Reduktion des q aus dem Q lediglich als additive Konstante auftritt. Wesentlich anders liegt jedoch die Sache leider hinsichtlich des Anteils q_2 , welche eine beträchtliche Unsicherheit in jene Reduktion hereinbringt. Man wird im allgemeinen annehmen können — es hat darauf wohl zuerst Linke hingewiesen²⁾ —, daß q_2 proportional q ist. Setzt man $q_2 = \alpha q$, so wird Gl. 1)

$$q = \frac{1}{1 + \alpha} (Q - q_1). \quad 2)$$

Die Größe des Proportionalitätsfaktors α wird nun nicht nur von der Gestalt und dem Material des benutzten Jonisations-

¹⁾ Z. B. Bergwitz, Festschrift für Elster und Geitel 1015, S. 585.

²⁾ Linke, Meteor. Zeitschr. 33, S. 157, 510, 1916.

gefäßes abhängen, sondern auch von der Natur der primär einfallenden Strahlen, d. h. von deren Durchdringungsfähigkeit. In welchem Maß eine solche Abhängigkeit besteht, läßt sich allerdings kaum angeben, um so mehr, als wir über die Natur der erregenden Strahlung a priori nichts aussagen können, sondern dies ja gerade erst auf Grund einer Diskussion der reduzierten Beobachtungsergebnisse tun wollen. Jedenfalls zwingt nichts dazu, für α etwa gerade den für die γ Strahlen des *RaC* gefundenen Wert $\frac{1}{3}$ einzusetzen und man wird demgemäß auf die quantitativen mit $\alpha = \frac{1}{3}$ erhaltenen q Werte kein allzu großes Gewicht legen dürfen. Um ein Bild des Einflusses der Größe von α zu geben, habe ich die Resultate von Kolhörster¹⁾ reduziert mit $\alpha = 0,1$ und $\alpha = 0,5$ und das Ergebnis in Fig. 1 dargestellt. Bedenkt man, daß die angenommenen Werte von α immerhin einen bereits recht weiten Variabilitätsbereich umfassen dürften, so wird man aus dieser Figur wohl abnehmen können, daß die genannte Unsicherheit der Reduktion die Größenordnung und den Charakter des funktionellen Verlaufs von q kaum verändern wird, daß aber die Errechnung exakter quantitativer Einzelwerte (wie dies z. B. Hr. Linke loc. cit. getan hat) nicht als bindende Unterlage für eine Theorie angesehen werden kann. Dazu kommt nun aber noch ein weiterer Punkt, der immerhin einiges Bedenken erregen kann und mindestens zur Vorsicht mahnt. So lange α konstant ist für alle Höhen, aus denen Beobachtungen vorliegen, wird der Charakter der reduzierten q Kurve durch die Größe von α in wesentlichen Punkten nicht berührt; es ist dann z. B. das Verhältnis zweier q Werte für zwei verschiedene Höhen ganz unabhängig von α . Eine solche Abhängigkeit wird aber eintreten, sobald α nicht mehr räumlich konstant ist; so z. B. verläuft die von Linke erhaltene q Kurve in ihrem oberen Teil nahezu linear, würde aber bei einer Zunahme von α mit der Höhe gegen die x Achse konkav verlaufen und so ihren Charakter in einem wesentlichen Punkt ändern. Nun ist

¹⁾ Kolhörster, Abh. d. Naturf. Ges. Halle, N. F., Nr. 4 (1914).

es allerdings nicht möglich, im einzelnen eine etwaige Veränderlichkeit des α mit der Höhe abzuleiten; es läßt sich aber immerhin aussagen, daß für homogene Strahlen α konstant ist. Da andererseits für inhomogene Strahlen eine Filtration derselben in der Atmosphäre und damit eine Zunahme der mittleren Durchdringungsfähigkeit mit abnehmender Höhe eintreten wird, — und zwar wie eine einfache Rechnung etwa für ein von oben in die Atmosphäre eindringendes „Spektrum“ zeigt, in recht beträchtlichem Maß — wird man eine Veränderlichkeit des α jedenfalls a priori nicht von der Hand weisen und bei der Bewertung quantitativer Schlüsse aus den Beobachtungen nicht ignorieren können.

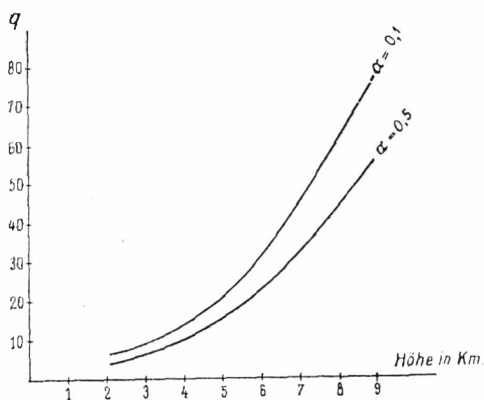


Fig. 1

Es hat nun v. Schweidler in der oben zitierten Untersuchung eine andere Methode der Reduktion angewendet. v. Schweidler macht allerdings von vornherein über die Eigenschaften und die Herkunft der Strahlen bestimmte Annahmen, es ist aber bemerkenswert, daß die von ihm und von Linke erhaltenen Kurven für q nahe zusammen fallen, wenn man berücksichtigt, daß die bei v. Schweidler mit q bezeichneten Ionisierungswerte unseren $(q + q_2)$ entsprechen und demgemäß jeweils etwa 33% von ihnen abzuziehen sind.

Man kann nun aber trotz der eben besprochenen Unsicherheiten in der Reduktion gewisse wesentliche Aussagen über die Größe und den Verlauf der Ionisierung machen; exakt quantitative Angaben aus dem Beobachtungsmaterial zu entnehmen, scheint mir zur Zeit noch nicht möglich zu sein und ist auch vorerst nicht notwendig, da sich auch so schon recht brauchbare Unterlagen für die Theorie und Fingerzeige für die weitere experimentelle Untersuchung ergeben. Fassen wir das Ergebnis der obigen Diskussion zusammen, so können wir (unter der Annahme der Homogenität der primären Strahlen) als sicher gestellt folgendes über die Größe q aussagen. 1. Die Ionisation q nimmt mit zunehmender Höhe rasch zu, und zwar derart, daß diese Zunahme mit zunehmender Höhe jedenfalls nicht kleiner wird, d. h. daß $\frac{d^2 q}{dH^2}$ stets gleich oder größer Null ist. Im großen und ganzen ist der Verlauf von q also jedenfalls charakterisiert durch Kurven der Art, wie sie in Fig. 1 gezeichnet sind. 2. Wir können aus diesen Kurven mit hinreichender Genauigkeit das Verhältnis je zweier q Werte für zwei verschiedene Höhen entnehmen. 3. Die Absolutwerte von q sind der Größenordnung nach bekannt und für den Erdboden von der Größenordnung 1. Auf diese Angaben also wollen wir uns im folgenden im wesentlichen stützen und zu- sehen, welche Schlüsse sich aus denselben ziehen lassen.

§ 3. Wir nehmen an, im Raum seien Strahlungsquellen verteilt, welche eine jonisierende Strahlung vom Absorptionskoeffizienten λ mit der Intensität i aussenden. Wenn dann die Strahlung bei ihrer Ausbreitung lediglich durch Absorption geschwächt wird, eine Streuung also ausgeschlossen wird, so ist die Intensität derselben in bekannter Weise als Funktion der Entfernung von der Quelle gegeben. Wir setzen demgemäß für die Ionisation dq , welche von einem strahlenden Volumelement dv in der Entfernung r herrührt, an

$$dq = \frac{i}{4\pi} \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda r}}{r^2} dv. \quad 3)$$

Die Bedeutung von i in diesem Ansatz erkennt man sofort durch eine Integration über den ganzen unendlichen Raum um das strahlende Element; es ist nämlich

$$q = \frac{i}{4\pi} \lambda \iiint \frac{e^{-\lambda r}}{r^2} dv \cdot dv' = i dv \quad 4)$$

d. h. i ist die Anzahl von Ionen, welche die von der Volumeneinheit in der Zeiteinheit ausgehende Strahlung in dem betrachteten Medium überhaupt erzeugen kann. Im allgemeinen Fall ist nun λ eine Funktion des Ortes, d. h. es ist $\lambda = \lambda_0 \cdot f(x, y, z)$, worin $f(x, y, z)$ eine bekannte Funktion sein soll. Dann ergibt also 3) für den im Ionisationsgefäß beobachteten Wert von q die folgende quellenmäßige Darstellung:

$$q = \frac{\lambda_0}{4\pi} \iiint i \frac{e^{-\lambda_0 f}}{r^2} dv \quad 5)$$

und die Problemstellung läßt sich nun analytisch in Strenge folgendermaßen fassen. Gegeben ist q als Funktion des Ortes, gesucht ist die Ergiebigkeit i und die Verteilung der Quellen und der Wert von λ_0 . Für die uns hier interessierenden Fragen vereinfacht sich nun die Sachlage insofern noch in formaler Beziehung, als alle eingehenden Größen nur Funktionen einer Koordinate, nämlich der Höhe x über dem Boden sind. Wir können nämlich in allen hier in Betracht kommenden Fällen ohne Bedenken annehmen (vgl. S. 26 ff.), daß alle Verhältnisse jeweils in horizontalen, der Erdoberfläche parallelen Ebenen dieselben sind, d. h. daß q , i und f nur Funktionen der vertikalen Koordinate x sind. Eine einfache Überlegung¹⁾ gibt dann auf Grund des Ansatzes 3) die Beziehung 5) in der folgenden Form

$$q(\xi) = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^\infty i(x) dx \int_{L(x, \xi)}^\infty \frac{e^{-n}}{n} dn, \quad 6a)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$L(x, \xi) = \int_\xi^x \lambda(z) dz. \quad 6b)$$

¹⁾ Man vgl. eine Arbeit von Schrödinger, Wien. Ber. 121, S. 2391, 1912.

Diese beiden Gleichungen werden wir allem folgenden zu Grunde legen. Der eingehenden Diskussion ist jedoch noch eine Bemerkung allgemeiner Art über die Eindeutigkeit der Lösungen voranzuschicken, deren Inhalt von ausschlaggebender Bedeutung für die Bewertung des Folgenden ist. Es ist aus den Gleichungen 6) ohne weiteres ersichtlich, daß die Problemstellung in obiger allgemeinen Form ganz unbestimmt ist, und zwar aus 3 Gründen: 1. sind die Werte von q nicht im ganzen unendlichen Raum $0 \leq \xi \leq \infty$, sondern nur in einem relativ kleinen Raumteil bekannt, nämlich in den uns zugänglichen Teilen der Troposphäre. 2. ist nicht nur die Funktion $i(x)$, sondern auch der Wert von λ_0 (der auch in $L(x, \xi)$ eingeht) unbekannt. 3. endlich ist — worauf, soweit mir bekannt, bisher noch nicht geachtet wurde, — eine weitere Größe unbekannt, die implicite in $L(x, \xi)$ steckt, nämlich die Absorption der Strahlung in der strahlenden, räumlich verteilten Substanz selbst. Man wird diese durch eine dem λ_0 analoge Konstante λ' beschreiben und hat dann strenge genommen mit der Komplikation zu rechnen, daß $L(x, \xi)$ ihrerseits wieder Funktion von $i(x)$ ist. A priori wird man jedenfalls die Eigenabsorption der strahlenden Substanz schon deshalb nicht vernachlässigen, weil erfahrungsgemäß die Absorption in einem Medium stark mit dem Atomgewicht desselben ansteigt und wir über dieses nichts wissen, bzw. nicht von vornherein bestimmte Annahmen darüber machen dürfen. Abgesehen davon werden wir auch rein formal zur Einführung einer Eigenabsorption gedrängt durch den Umstand, daß das Doppelintegral in Gl. 6 a) ohne eine solche nicht mehr konvergent ist, wenigstens so lange wir die obere Grenze des äußeren Integrals unendlich groß ansetzen. Dies ist natürlich auch physikalisch unmittelbar verständlich; denn die Grenze ∞ bedeutet eine Verbreitung von Strahlungsquellen im ganzen unendlichen Raum und liefert bei endlicher Dichte und Ergiebigkeit der Quellen die Strahlungsintensität unendlich, wenn nicht eine Eigenabsorption der quellenerfüllten Raumteile angesetzt wird.

Bei dieser Sachlage der Dinge erscheint nun eine Diskussion der Gl. 6) — abgesehen von den noch nahezu ungelösten Schwierigkeiten bei der Lösung derartiger Integralgleichungen erster Art — unmöglich; es bleibt bis jetzt in der Tat nichts anderes übrig, als die eben besprochene Unbestimmtheit der Aufgabe zu kompensieren durch irgend welche Zusatzhypothesen. Als solche bieten sich nun von selbst alle Annahmen dar, welche die Verteilung $i(x)$ von vornherein festlegen, und zwar im Anschluß an anderweitig bekannte oder physikalisch gerechtfertigte Verhältnisse. So wird man z. B. die Dichte der kontinuierlichen Verteilung eines gasförmigen Strahlers in der Erdatmosphäre nach dem Daltonschen Gesetz annehmen oder wird in der erfahrungsgemäß bestehenden scharfen Grenze zwischen Stratosphäre und Troposphäre einen Grund für eine Diskontinuität in der Verteilung staubförmiger Strahler erblicken können usw. Eine weitere willkommene Möglichkeit, hypothetische Annahmen bestimmter zu gestalten und zu stützen, wird ferner die Heranziehung anderer dem Problem an sich fremder Daten bieten, wie z. B. die Absorption und die diffuse Zerstreuung des Lichts in den mit strahlender Substanz erfüllten Räumen oder etwa die Festlegung der Größe von in der Atmosphäre suspendierten Substanzteilchen durch die Geschwindigkeit des stationären Herabsinkens derselben usw. Es gelingt in der Tat in solcher Weise die Lösung wesentlich bestimmter zu gestalten, d. h. die Zahl der Möglichkeiten weitgehend einzuschränken.

Eine Möglichkeit in diesem Sinne wäre nun, als Strahlungsquelle ein in der Atmosphäre vorhandenes noch unbekanntes radioaktives Gas anzunehmen. Dieser Fall wurde auch bereits von v. Schweidler und dann ausführlicher von Schrödinger behandelt und gezeigt, daß er zu einer Erklärung des beobachteten Verlaufs der Ionisation nicht herangezogen werden kann. Da mir durch die genannten Untersuchungen diese Frage in der Tat im verneinenden Sinn erledigt zu sein scheint, wollen wir gleich zur Diskussion einer zweiten Möglichkeit übergehen; wir wollen annehmen, daß als Strahlenquelle radioaktive Sub-

stanzen in Betracht kommen, die in sehr großen Höhen lagern. Ohne weitere Hypothesen können wir dies zunächst formal so ausdrücken, daß wir ansetzen

$$\begin{aligned} i(x) &= 0 & H_2 \leq x \leq H_1 \\ i(x) &= i_0 & H_2 > x > H_1, \end{aligned} \quad 7)$$

worin bereits H_1 eine Höhe jenseits der uns bis jetzt erreichbaren ist. Dieser Ansatz umfaßt für $H_2 = \infty$ naturgemäß als speziellen Unterfall zugleich die Annahme eine Erfüllung des Weltraumes oder praktisch hinreichend großer Teile desselben mit strahlender Substanz. Ferner wollen wir annehmen, daß i_0 eine konstante Größe ist, nämlich der Mittelwert der Quelldichte; wie man unschwer einsieht, genügt diese wesentlich vereinfachende Annahme zunächst allen Bedürfnissen. Die Gl. 6 a) wird dann also

$$q(\xi) = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{H_2} dx \int \frac{e^{-n}}{n} dn. \quad 8)$$

$L(x, \xi)$

Um diese nun der Diskussion zugänglich zu machen, müssen wir ferner L analytisch darstellen, d. h. wir müssen hinsichtlich des Verlaufs von λ mit der Höhe gewisse Annahmen machen. Es ist wohl als sicher anzunehmen, daß λ außerhalb der mit strahlender Substanz erfüllten Raumteile proportional der Dichte ρ der Atmosphäre ist. Über den Verlauf dieser sind wir nun namentlich in den hohen Schichten nur sehr unvollkommen unterrichtet¹⁾; wie man sich rechnerisch jedoch leicht überzeugt, nimmt die genaue Kenntnis der Dichte und der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre mit steigender Höhe praktisch an Bedeutung sehr rasch ab, so daß nur der Dichteabfall in den unteren Schichten von Wichtigkeit ist. Am einfachsten und nächstliegenden ist es jedenfalls, nach der gewöhnlichen barometrischen Höhenformel

¹⁾ Man vgl. etwa die Diskussion der hier hereinspielenden Fragen in dem Artikel von Bemporad über die Refraktion des Lichts in der Erdatmosphäre. Winkelmanns Handbuch, Bd. VI, S. 503 ff.

für eine isotherme Atmosphäre zu rechnen, die bei Annahme einer geeigneten Mitteltemperatur eine für das Folgende vollkommen genügende Anschmiegung an die wirklichen Verhältnisse ergibt. Innerhalb der strahlenden Substanz selbst kommt nun zu der Absorption der Atmosphäre noch die Selbstabsorption der strahlenden Substanz, deren Einführung bereits oben begründet wurde. Setzen wir also $\varrho = \varrho_0 \cdot e^{-\alpha x}$ ($\alpha = 1.25 \cdot 10^{-6}$) und dementsprechend $\lambda = \lambda_0 \cdot e^{-\alpha x}$ und bezeichnen den Koeffizienten der Selbstabsorption mit λ' , so wird

$$L(x, \xi) = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha x}) + \lambda' (x - H_1). \quad 9a)$$

Dieser Ausdruck ist nun zur weiteren Verwendung recht wenig geeignet, er führt zu sehr komplizierten und unübersichtlichen Rechnungen. Wir wollen deshalb zunächst eine erste Näherung benutzen in der Form:

$$L(x, \xi) = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}) + \lambda' (x - H_1), \quad 9)$$

d. h. wir wollen die Luftabsorption innerhalb der strahlenden Schicht einfach gegenüber der Selbstabsorption vernachlässigen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit zu einer fast mühelosen Behandlung des Problems ohne merkliche Einbuße an Genauigkeit; die Annäherung durch den Ausdruck 9) ist nämlich eine sehr gute, wenn H_1 genügend groß ist. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die Totalabsorption der Atmosphäre oberhalb H_1 , die wir eben vernachlässigt haben, ausrechnet, und die sich zu

$$\frac{\Delta J}{J} = \left(1 - e^{-\frac{\lambda_0}{\alpha} e^{-\alpha H_1}}\right)$$

ergibt. Für $\alpha = 1.25 \cdot 10^{-6}$ und $\lambda_0 \sim 5 \cdot 10^{-6}$ entsprechend den späteren Resultaten erhält man

H_1 (km)	20	30	40	50	100
$\frac{\Delta J}{J}$	0.27	0.09	0.025	0.008	$< 10^{-4}$

Man sieht nun ohne weiteres, daß unsere Näherung bis zu Höhen $H_1 \sim 30$ km herab eine genügende ist, so daß wir also die folgenden Ausführungen zunächst auf diese Verhältnisse — die strahlende Substanz soll, um dies nochmals zu wiederholen, nicht tiefer als bis zu einer Höhe von etwa 30 km herabreichen — beschränken wollen. Damit umfassen wir jedenfalls einen großen Teil der Möglichkeiten, und zwar, wie ich glaube, gerade diejenigen, welche eine große Wahrscheinlichkeit für sich haben. Der Vollständigkeit halber werden wir jedoch am Schluß dieses Abschnittes auch noch eine Erstreckung bis in geringere Höhen herab behandeln und dafür eine der Gl. 9) analoge Näherung angeben (vgl. S. 21 ff.); vorgreifend sei bemerkt, daß sich dort außerdem der Gültigkeitsbereich der jetzigen Näherung gerade in den wichtigsten Punkten als ein noch beträchtlich unter die 30 km Grenze herabreichende erweisen wird. Zum Schluß ist endlich noch ein Wort zu sagen über den oben benutzten Ansatz des isothermen Dichteabfalls mit der Höhe, soweit dieser nicht von selbst aus der ganzen Sachlage sich rechtfertigt. So könnte man, wie dies z. B. Linke in der oben zitierten Arbeit getan hat, eine der vollständigen barometrischen Höhenformel oder eine empirische Dichteformel anwenden; ich habe deshalb die Rechnungen überschlagsweise durchgeführt unter der Annahme eines linearen vertikalen Temperaturgradienten¹⁾ von 6° pro km, für den sich $L(x\xi)$ ebenfalls in einfacher geschlossener Form darstellen läßt und mich überzeugt, daß sich in Betracht kommende Änderungen der numerischen Werte von q dadurch nicht ergeben.

§ 4. Die beiden Gl. 8) und 9) geben nun zunächst für den einfachsten Fall $H_2 = \infty$ sofort den folgenden Ausdruck für $q(\xi)$, wenn man die Integrationsfolge in der üblichen Weise umkehrt und die Integrale auswertet:

¹⁾ Diesen Ansatz hat Tetens (Jahrbuch des aërolog. Observ. Lindenberg 1911) verwertet; derselbe Ansatz ist benutzt z. B. in der Refraktions-theorie von Schmidt (vgl. Bemporad, loc. cit.).

$$q(\xi) = \frac{\lambda_0 i_0}{2\lambda'} \cdot \Phi(c) \quad (10)$$

$$c = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}), \quad (11)$$

worin Φ die verschiedentlich tabulierte Transzendente¹⁾ ist:

$$\Phi(y) = e^{-y} - y \int_y^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} dn. \quad (12)$$

Aus diesem Resultat können wir nun bereits eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen. Da nach allen bisherigen Erfahrungen sowohl i_0 wie λ' proportional der räumlichen Dichte der strahlenden Substanz ist, so folgt, daß $q(\xi)$ unabhängig ist von der Dichte; wir können also die strahlende Substanz im Raum mit beliebiger Dichte verteilen, ohne die beobachteten q Werte zu beeinflussen.

Wenn wir in Gl. 11) das zweite Glied des Arguments weglassen, also die untere Grenze der strahlenden Schicht ebenfalls in sehr große Höhe legen, so erhalten wir, da an sich $H_1 > 30$ km und $\xi < 10$ km anzusetzen ist, nur geringe Änderungen der q Werte. Wie eine numerische Rechnung zeigt, betragen diese selbst gegen die Werte für $H_1 = 30$ km nur 11% (für $\xi = 0$) bzw. 13% (für $\xi = 10$ km) und nehmen mit wachsenden H_1 sehr rasch weiter ab. In Anbetracht der nach § 2 geringen Genauigkeit der bis jetzt zur Verfügung stehenden Beobachtungsergebnisse ist es also gleichgültig bzw. nicht zu entscheiden, in welcher Höhe die strahlende Schicht (oberhalb 30 km) beginnt.

Nach Gl. 10) enthält nun der Ausdruck für q außer λ_0 noch die Unbekannte λ' , deren Größe zunächst wenig interessiert und zudem ganz unbekannt ist, so daß wir sie tunlichst aus der weiteren Diskussion eliminieren müssen; es genügt nun in der Tat, dies in gewissem Umfang zu erreichen. Zunächst können wir lediglich aus der S. 7 postulierten Eigen-

¹⁾ Tabellen und Literaturnachweise in dem Buch von St. Meyer und v. Schweidler, S. 72, 489.

schaft der q Kurve, nirgends konkav zum Erdboden zu verlaufen, einen unteren Grenzwert für λ_0 abzuleiten. Bilden wir nämlich $\frac{dq}{d\xi}$ und setzen zur Abkürzung

$$\frac{\lambda_0}{a} e^{-a\xi} = z; \quad \frac{\lambda_0}{a} e^{-aH_1} = c_1, \quad (13)$$

so erhalten wir

$$\frac{dq}{d\xi} = \text{konst. } z \int_{c_1+z}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} dn = \varrho(z). \quad (14)$$

Die Funktion $\varrho(z)$ steigt nun mit wachsendem z rasch zu einem Maximum auf, um dann langsam wieder gegen Null abzusinken; sie ist in Fig. 2 für $c_1 = 0$ ($H_1 = \infty$) und zur Übersicht noch für $c_1 = 0.05$ ($H_1 \sim 35$ km) aufgezeichnet.

Nun ist nach der Voraussetzung $\frac{d^2q}{d\xi^2}$ im ganzen Beobachtungsintervall ≥ 0 . Bezeichnen wir die Abscisse des Maximums von ϱ mit z_{H_1} , so muß also das ganze Beobachtungsintervall zwischen $z = \frac{\lambda_0}{a}$ und $z = z_H$ liegen, d. h. es muß $z \geq z_H$ sein.

Nach Gl. 13) erhalten wir daraus die folgende Ungleichung für λ_0

$$\lambda_0 \geq a \cdot z_H \cdot e^{a\xi_m}, \quad (15)$$

worin ξ_m den größten Wert von ξ im Beobachtungsintervall bedeutet. Nun ist außer für $H_1 = \infty$ die Größe z_H nach Gl. 13) ihrerseits wieder Funktion von λ_0 , so daß 15) in Strenge nur für ersteren Fall eine untere Grenze für λ_0 ergibt. In praxi ist jedoch, wie aus der Fig. 2 hervorgeht, der Einfluß dieser Vernachlässigung so gering, daß er nicht in Betracht kommt¹⁾. Setzen wir nun in 15) die Zahlenwerte $a = 1,25 \cdot 10^{-6}$, $z_H = 0,45$ und ξ_m entsprechend dem jetzigen Stand der Beobachtungstechnik $10 \text{ km} = 10^6$, so erhalten wir

$$\lambda_0 \geq 1,6 \cdot 10^{-6}.$$

¹⁾ In Strenge läßt sich natürlich die entsprechende analoge Ungleichung direkt aus Gl. 13, 14 gewinnen für den Fall $c_1 \neq 0$ und numerisch relativ einfach lösen.

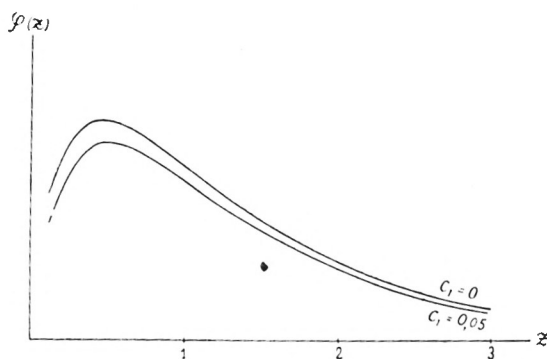


Fig. 2

Durch Vergrößerung des Beobachtungsintervalls würde sich naturgemäß diese Grenze nach größeren Werten verschieben, die Festlegung des wahren Wertes von λ_0 also wie zu erwarten, eine genauere werden. Zur Übersicht darüber, in welchem Maß die Erreichung größerer Beobachtungshöhen hier Vorteile bringen würde, diene die folgende Zusammenstellung:

Größte Höhe ξ_m	10 km	12	15	20
Grenzwert $\lambda_0 \cdot 10^6$	1,7	2,5	4,0	7,3

Um weitere Angaben über λ_0 machen zu können, müssen wir nun allerdings die Eigenschaften der q Kurve etwas spezieller fassen; entsprechend dem in § 2 Gesagten wird es dabei jedoch erwünscht sein, immerhin so wenig wie möglich über dieselbe vor auszusetzen. Ein erster Schritt in dieser Richtung ist nun eine Bestimmung der Größenordnung von λ_0 , die sich bereits aus zwei Punkten der q Kurve ergibt. Und zwar bilden wir, um die Unbekannte λ' zu eliminieren, nach Gl. 10) das Verhältnis zweier q Werte, die wir möglichst günstig auszuwählen haben. Um hierbei die Gestalt der q Kurve tunlichst zu eliminieren, werden wir die beiden Punkte möglichst weit auseinander liegend wählen; andererseits ergibt sich aus der ganzen Sachlage, daß es nicht günstig ist, den unteren Punkt allzu nahe am Erdboden zu wählen, da dort die q Werte

nicht nur sehr klein und deshalb relativ unsicher, sondern auch durch die Erdstrahlung beeinflusst sind. Da der letztere Einfluß nach dem bekannten Durchdringungsvermögen der Erdstrahlung ($\lambda_k \sim 5 \cdot 10^{-5}$) in 2 km Höhe praktisch bereits erloschen ist, scheint von den genannten Gesichtspunkten aus die Wahl der Punkte $\xi = 2$ km und $\xi = 9$ km (entsprechend der größten von Kolhörster erreichten Höhe) die günstigste zu sein. Wir setzen demgemäß als Bestimmungsgleichung für λ_0 nach Gl. 10) und 11) an:

$$\frac{q_2}{q_9} = \frac{\Phi \left\{ \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi_2} - e^{-\alpha H_1}) \right\}}{\Phi \left\{ \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi_9} - e^{-\alpha H_1}) \right\}} \quad 16)$$

die sich an Hand der für die Transzendente Φ existierenden Tafeln numerisch lösen läßt. Zu bemerken ist, daß die in § 2 besprochene Reduktion hier wegen der Quotientbildung ganz herausfällt und die Größe des dort eingeführten Reduktionsfaktors also keine Rolle spielt; ebenso ist, wie wir bereits sahen, der Einfluß der Größe von H_1 bereits von $H_1 = 30$ km ab kein nennenswerter. Zur Übersicht ist in Fig. 3 die Lösung

der Gl. 16) für verschiedene Werte von $\frac{q_2}{q_9}$ und für $H_1 = \infty$ sowie für $H_1 = 30$ km gegeben. Für die von Kolhörster beobachteten Werte ist $\frac{q_9}{q_2} = 12,7$, so daß sich also λ_0 zu $5 \cdot 10^{-6}$ ergeben würde. Dies ist, wie nebenbei bemerkt sei, in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem auf Grund recht spezieller Annahmen von Linke erhaltenen Resultat $4,6 \cdot 10^{-6}$ und dürfte die eingangs empfohlene, etwas großzügigere Interpretation des Beobachtungsmaterials rechtfertigen.

Wir hatten nun bisher die Form der beobachteten q Kurve absichtlich weitgehend unbeachtet gelassen und nur gewisse allgemeine Eigenschaften derselben verwendet. Berechnen wir nun zum Schluß den Verlauf von q_ξ nach Gl. 11) und vergleichen ihn mit dem beobachteten Verlauf, so erhalten wir

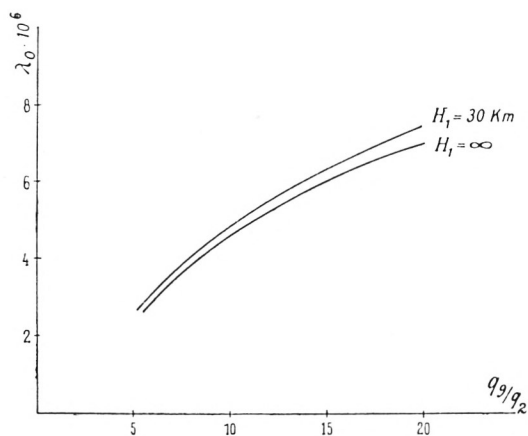


Fig. 3

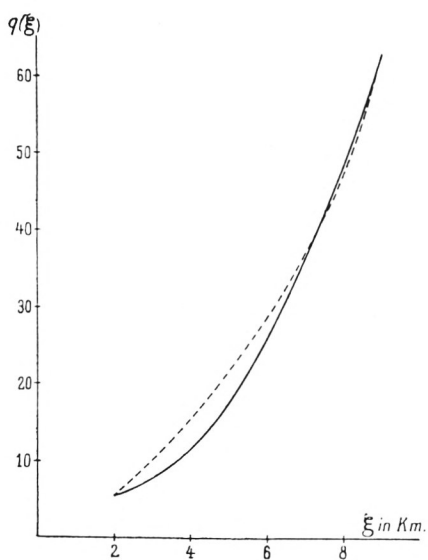


Fig. 4

das in Fig. 4 gegebene Bild. Die theoretische Kurve ist dabei gezeichnet für $H_1 = \infty$, da bereits für $H_1 = 30$ km die Abweichungen so gering sind, daß sie keine Rolle spielen. Ohne Zweifel ist der Charakter der beiden Kurven durchaus derselbe; quantitativ aber treten immerhin Abweichungen auf, die bereits jenseits der Messungsfehler liegen dürften, so daß immerhin die Diskussion anderer Annahmen über die Verteilung der strahlenden Substanzen lohnend erscheint. Meines Erachtens sind die Abweichungen aber andererseits keineswegs groß genug, um die vorhergehenden Ausführungen — deren Grundlage, nämlich die Erfüllung des Weltraums mit strahlender Substanz, zweifellos sehr viel Sympathisches für sich hat, — von vornherein als zwecklos erscheinen zu lassen (vgl. übrigens S. 21).

Wir wollen deshalb die nächstliegende Erweiterung der bisherigen einfachsten Annahme vornehmen und die strahlende Schicht nun auch nach oben hin begrenzt uns denken. Die Ausgangsgleichungen 8) und 9) geben dann, wenn man nach geeigneter Teilung des Integrationsintervalles wiederum die Integrationsfolge umkehrt, an Stelle von Gl. 11) die folgende Beziehung:

$$q(\xi) = \frac{i_0 \lambda_0}{2 \lambda'} \left\{ \Phi(c) - \Phi(c + \lambda' d) \right\}, \quad (19)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$d = H_2 - H_1; \quad c = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}). \quad (20)$$

Der Ausdruck 19) konvergiert mit wachsendem d natürlich gegen den früheren Ausdruck 11). Andererseits erhalten wir für kleines $\lambda' d$ durch eine Entwicklung nach Taylor

$$q(\xi) = \lambda' d \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\lambda_0 i_0}{2} d \int_c^\infty \frac{e^{-n}}{n} dn. \quad (21)$$

Es ist dies nun gerade der von Linke loc. cit. benutzte Ansatz, der sich hier also als eine spezielle Form des allgemeinen Ausdrucks ergibt. Der Vorteil von 21) gegen 19) liegt nun in dem Fortfall der unbekannten Größe λ' , doch ist dieser

Vorteil natürlich ein nur scheinbarer und hier lediglich dadurch erreicht, daß wir eben die benutzte Reihe mit dem ersten Glied abgebrochen haben. Nimmt man übrigens, wie dies Linke später in der Erwiderung auf einige von Bergwitz¹⁾ geäußerte Bedenken tut, die Schicht nun doch wieder von endlicher Dicke an, indem man mehrere Schichten von kleiner Dicke übereinander lagert, so kommt λ' auch physikalisch wiederum herein, wenn man nicht die Selbstabsorption überhaupt vernachlässigt.

In Gl. 19) können wir nun wie früher setzen

$$\lambda' d = (\lambda')_{\varrho=1} \varrho \cdot d = (\lambda')_{\varrho=1} \cdot \text{Masse} \quad (22)$$

und erhalten so das allgemeine Resultat, daß q nur abhängt von der in der Schicht verteilten Gesamtmasse, daß es dagegen ganz gleichgültig ist, wie dick die Schicht ist. Wir könnten z. B. deshalb, wenn λ' bekannt wäre, aus unseren Beobachtungen die Gesamtmasse und die untere Grenze der Schicht bestimmen, aber nichts über die Höhenlage der oberen Grenze aussagen; natürlich ist dies Resultat eine Folge unseres Näherungsansatzes 9), wird aber jedenfalls mit großer Annäherung gelten.

Zum Schluß sei noch kurz hingewiesen auf die Möglichkeiten, durch eine Erweiterung des Ansatzes 8) ev. einen engeren Anschluß der theoretischen an die beobachtete q Kurve zu gewinnen; bei der Mannigfaltigkeit der sich bietenden Möglichkeiten und dem heutigen Stand der experimentellen Forschung scheint ein näheres Eingehen mir hier unnötig zu sein und ein allgemeiner Hinweis zu genügen, zumal prinzipielle Schwierigkeiten bei der Durchführung nicht auftreten. Wir könnten einmal i_0 räumlich variabel annehmen und dadurch die q Kurve in weiten Grenzen verbiegen, oder wir könnten die Strahlung inhomogen annehmen und damit an Stelle von 8) den folgenden Ansatz treten lassen:

$$q(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{z=1}^m i_z \lambda_z \int_{H_1}^{H_2} dx \int_{L(x, \xi)}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} dn. \quad (23)$$

¹⁾ Bergwitz, Met. Zeitschr. 33, S. 310, 1916.

Ein derartiger Ansatz wird durch die Erfahrungen an radioaktiven Substanzen jedenfalls plausibel gemacht und erlaubt natürlich eine beliebig genaue Darstellung der Beobachtungen; zu bemerken ist, daß die Zahl der verfügbaren Konstanten λ_{∞} und λ'_{∞} nicht gleich $2m$, sondern wegen der Beziehungen $\frac{\lambda_{\infty 1}}{\lambda'_{\infty 1}} = \frac{\lambda_{\infty 2}}{\lambda'_{\infty 2}}$, die man wohl als gültig wird ansehen müssen, nur gleich $(1 + m)$ ist. Eine Durchrechnung spezieller Beispiele erübrigt sich mangels jedes Anhaltes über die Größe der λ_{∞} umsomehr, als die Größenordnung für das λ_{∞} der durchdringendsten, also gerade der physikalisch interessantesten Strahlen, durch einen Ansatz der Form 23) nur nach höheren Werten verschoben werden kann.

Wir müssen nun noch auf die bereits S. 13 angekündigte Erweiterung unserer Ansätze für die Fälle eingehen, in denen die Brauchbarkeit der bisher benutzten nicht mehr genügt oder wenigstens nicht unmittelbar einzusehen ist. Solche Fälle liegen, wie wir sahen, vor, wenn die strahlende Substanz wesentlich unter eine Höhe von 30 km herabreicht, und diese Annahme ist nun jedenfalls nicht a priori von der Hand zu weisen und wird physikalisch sogar recht plausibel, wenn man nach Linke die Grenze zwischen Tropo- und Stratosphäre in gewissem Sinn als eine hydrodynamische Diskontinuitätsfläche in der Atmosphäre ansieht¹⁾, und die untere Grenze der strahlenden Substanz ebenfalls in sie verlegt.

Die bisher benutzte Näherung bestand nun physikalisch darin, daß wir oberhalb 30 km die Luftabsorption überhaupt vernachlässigt und die Eigenabsorption der strahlenden Substanz allein berücksichtigt, unterhalb dieses Niveaus bzw. von der unteren Grenze der substanzerfüllten Schichten ab die Luftabsorption entsprechend der isothermen Dichteverteilung in Rechnung gezogen haben. Anschließend an diesen das Problem

¹⁾ Vgl. die diesbezüglichen Ausführungen von Wegener, Meteor. Zeitschr. 29, S. 49, 1912. Die genannte Hypothese wurde übrigens bereits von Wigand im Jahre 1914 ausgesprochen. Vgl. Wigand, Phys. ZS. 18, S. 1, 1917, wo sich verschiedene andere wichtige Bemerkungen finden.

namentlich in mathematischer Beziehung wesentlich vereinfachenden Ansatz wollen wir nun für den Fall, daß die untere Schichtgrenze $H_1 < 30$ km ist, für alle $H > 30$ km wie bisher die Luftabsorption ignorieren und nur die Eigenabsorption berücksichtigen, für $H_1 < H < 30$ km die Luftabsorption nun aber auch innerhalb der strahlenden Substanz und zwar in der Weise berücksichtigen, daß wir dort mit einer mittleren homogenen Absorption rechnen, entsprechend der mittleren isothermen Luftdichte zwischen H_1 und 30 km. Dadurch erreichen wir einen recht guten Anschluß an die wirklichen Verhältnisse, ohne die mathematische Behandlung zu komplizieren; allerdings tritt dabei gerade die Höhe $H = 30$ km willkürlich als Grenzniveau der Absorption und der Mittelwertbildung auf, sie kann aber natürlich ohne prinzipielle Änderung durch eine andere ersetzt werden und außerdem dürfe ihre Wahl durch die S. 12 durchgeführte Überschlagsrechnung auch sachlich in gewissem Grad gerechtfertigt sein. Erstreckt sich die strahlende Schicht von H_1 bis H_2 ($d = H_2 - H_1$), so ist für $H_2 < 30$ km

$$\left. \begin{aligned} L(x, \xi) &= \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}) + \lambda (x - H_1) \\ \lambda &= \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{e^{-\alpha H_1} (1 - e^{-\alpha d})}{d} \end{aligned} \right\} \quad 9'a)$$

wobei hier wie im folgenden die Eigenabsorption der unterhalb 30 km liegenden relativ dünnen Schichten gegen die Luftabsorption vernachlässigt ist; für die oberhalb 30 km gelegenen Schichten dagegen ist, wie dies in den folgenden Formeln zum Ausdruck kommt, die Eigenabsorption nach wie vor berücksichtigt, da sich diese im Grenzfall bis $H_2 = \infty$ erstrecken können und die Luftabsorption rasch mit der Höhe auf sehr kleine Werte abnimmt. Es hat übrigens gar keine Schwierigkeiten, die vollständigen Formeln hinzuschreiben.

Ist $H_2 > 30$ km, so erhalten wir die Jonisation $q(\xi)$ durch Zerteilung der Schicht in zwei Teile, deren einer von H_1 bis 30 km reicht und in der eben besprochenen Weise behandelt

wird, deren anderer von 30 km bis H_2 reicht und wie früher zu behandeln ist. Wir erhalten dann aus Gl. 8) und 9a) die der Formel 19) entsprechenden Ausdrücke¹⁾

$$\left. \begin{aligned}
 H_2 < 30 \text{ km} \quad q(\xi) &= \frac{i_0 \lambda_0}{2\lambda} \{ \Phi(c) - \Phi(c + \lambda d) \} \\
 \lambda &= \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{e^{-\alpha H_1} (1 - e^{-\alpha d})}{d} \\
 H_2 > 30 \text{ km} \quad q(\xi) &= \frac{i_0 \lambda_0}{2\lambda'} \{ \Phi(c_1) - \Phi(c_1 + \lambda' (H_2 - 30)) \} \\
 &+ \frac{i_0 \lambda_0}{2\lambda} \{ \Phi(c) - \Phi(c + \lambda (30 - H_1)) \} \\
 \lambda &= \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{e^{-\alpha H_1} (\lambda - e^{-\alpha (30 - H_1)})}{30 - H_1} \\
 c &= \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}) \\
 c_1 &= \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha 30})
 \end{aligned} \right\} 19a)$$

Für $H_2 = 30$ km werden wegen $d = 30 - H_1$, wie dies sein muß, beide Ausdrücke identisch. Vergleichen wir nun 19a) mit 19), so erkennen wir ohne weiteres, in welcher Richtung nun eine Modifikation eingetreten ist, und wir übersehen auch, wie die bisher auf Grund von 19) abgeleiteten allgemeinen Folgerungen umzuschreiben sind, bzw. in welchem Umfange sie noch gelten. Die Verhältnisse liegen so einfach, daß ein näheres Eingehen hierauf sich wohl erübrigt; bemerkt sei nur, daß maßgebend dabei in erster Linie der Umstand ist, daß nun λ nicht mehr proportional der Dichte der strahlenden Substanz ist.

Was die quantitativen²⁾ Folgerungen aus den neuen Formeln anlangt, so ist zweierlei zu bemerken. Zunächst ist von

¹⁾ Zur Abkürzung ist die Bezeichnung 30 eingeführt für 30 km; da alles im C. G. S-System gilt, ist natürlich $H_2 - 30$ usw. in cm zu messen.

²⁾ Für kleine Änderungen des Arguments ist zur numerischen Rechnung benutzt $\Phi(c) - \Phi(c + \Delta c) = -Ei(-c)$.

Wichtigkeit der Wert von $q(0)$, den wir später zur Bestimmung der Aktivität i_0 benutzen werden; für $\lambda' = 0$ können wir die Formeln 19) und 19a) numerisch direkt miteinander vergleichen und finden, daß eine Änderung der Größenordnung für die praktisch überhaupt in Betracht kommenden Werte von $H_1 > 15$ km nicht eintritt; $q(0)$ nach der neuen Formel berechnet sich im ungünstigsten Fall ($H_1 = 15$ km) nur etwa 20% kleiner als der nach der alten Formel berechnete Wert, so daß wir also unbedenklich stets unsere erste Näherung benutzen können. Bedenklicher ist allerdings deren Anwendung zur Berechnung von λ_0 aus dem Verhältnis zweier q Werte, wie man dies bereits aus der physikalischen Anschauung einsieht. Für $\lambda' = 0$ — eine Annahme, die für geringe Schichtdicken wohl erlaubt ist — hat nun Linke die Rechnungen in allerdings speziellerer Anlage durchgeführt und für λ_0 den Wert $4,6 \cdot 10^{-6}$ gefunden, der, wie bereits früher bemerkt, mit dem hier stets zu Grunde gelegten Wert $5 \cdot 10^{-6}$ bemerkenswert gut übereinstimmt; zugleich hat er den Verlauf der q Kurve berechnet, so daß der Anschluß an unsere Formeln durchwegs hergestellt ist und ein weiteres Eingehen auf die an sich einfache Diskussion der Gl. 19a) sich erübrigen dürfte; zu bemerken ist nur noch für die Rechnung, daß die naheliegende Vereinfachung dieser Gleichungen durch die bekannten Reihenentwicklungen für die Funktion Φ (d. h. für die darin eingehende Funktion Ei) praktisch keine Vorteile gewährt. Von Interesse ist vielleicht ferner in diesem Zusammenhang eine Bemerkung über die Eigenabsorption der strahlenden Substanz, wenn wir uns dieselbe in Form dünn verteilten Staubes ausgebreitet denken. Man findet, wenn ϱ der Radius der kugelförmigen Staubkörnchen, N deren Anzahl in der Volumeinheit und λ'' der Absorptionskoeffizient der kompakten Substanz ist, für kleines ϱ durch eine kurze Rechnung $\lambda' = \frac{4}{3} \varrho^3 \pi N \cdot \lambda''$ in Übereinstimmung damit, daß es sich hier um ein Volumeffekt handelt, während für die Absorption von Licht der Querschnitt maßgebend ist; vgl. S. 42). Aus dem Auftreten der dritten Potenz des Radius können wir schließen, daß λ' jedenfalls klein

ist gegenüber λ'' , so daß für nicht zu große Schichten die vorgenommene Vernachlässigung der Eigenabsorption jedenfalls gerechtfertigt ist.

Auf eine Anwendung der Gl. 19 a) sei jedoch noch hingewiesen, die von praktischem Interesse ist, nämlich auf die Berechnung der Abhängigkeit der Strahlungsintensität speziell von der unteren Schichtgrenze H_1 . Während nach den früheren Formeln (für $H_1 > 30$ km) die Intensität in den uns zugänglichen Höhen praktisch unabhängig ist von H_1 , ergibt sich nun, daß q von H_1 abhängt. Dies kann dazu benutzt werden, um eine eventuelle zeitliche Schwankung von q zu deuten durch ein zeitliches Auf- und Absteigen der unteren Begrenzung; man könnte jedenfalls daran denken, namentlich langperiodische, etwa jährliche Schwankungen von q in dieser Weise zu erklären, wenn man dem hübschen, bereits mehrfach erwähnten Gedanken Linkes folgend, die untere Begrenzung der strahlenden Substanz in Zusammenhang bringt mit der Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre oder die Konsequenzen der weiter unten besprochenen möglichen Zusammenhänge mit dem Eindringen korpuskularer Strahlen in die Erdatmosphäre weiter ausspinnen will. Nach den Ergebnissen einer soeben erschienenen Arbeit von Heß und Kofler¹⁾ über Strahlungsmessungen auf dem Obirgipfel scheinen nun allerdings nennenswerte Schwankungen der von oben kommenden harten Strahlungskomponente nicht vorhanden zu sein, so daß man die Frage gerade umgekehrt stellen müßte, nämlich: Inwieweit muß *et. par.* die Höhe der unteren Grenze der quellen erfüllten Räume konstant sein, damit die beobachtete Konstanz der Intensität gewährleistet wird. Aufschluß darüber gibt das Resultat der zur Orientierung für einige Werte durchgeführten numerischen Rechnungen nach den Gl. 19 a), das in Fig. 5 dargestellt ist. Als Ordinate ist die Ionisation $q(0)$ am Erdboden aufgetragen, als Abscisse die Höhe H_1 der unteren Grenze. Erstreckt sich die strahlende Substanz in sehr große Höhen,

¹⁾ V. Heß und M. Kofler, Phys. Zeitschr. 18, S. 585, 1917.

so überwiegt die von den über $H = 30$ km liegenden Raumteilen stammende Strahlung mit abnehmender Eigenabsorption λ' mehr und mehr, und die prozentuelle Schwankung von q wird demgemäß rasch kleiner; für kleine Werte von H_2 dagegen kommt es der geringen dann in Betracht kommenden Schichtdicken wegen praktisch überhaupt nicht auf die Größe von λ' an, vorausgesetzt natürlich, daß λ' an sich klein ist gegen λ_0 (bzw. λ), wie wir das von vornherein angenommen haben.

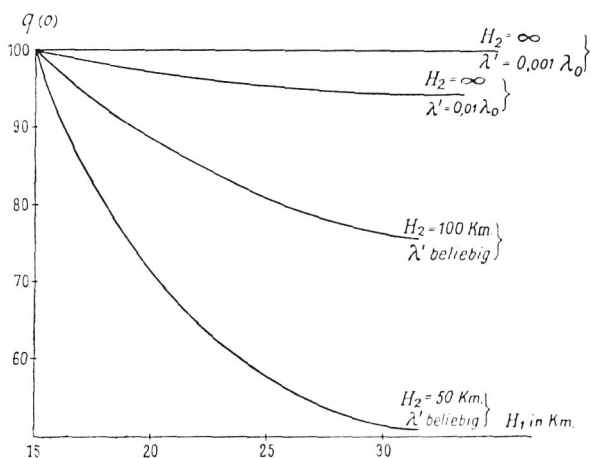


Fig. 5

§ 5. In drei Punkten sind nun aber die vorhergehenden Überlegungen einer Erweiterung fähig, ohne daß wir den Bodengesicherter Grundlagen verlassen müßten. Die erste Erweiterung betrifft die Untersuchung des Einflusses der Erdkrümmung, die zweite handelt von der Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Incidenzwinkel gegen die Vertikale und gibt immerhin Resultate, die einer experimentellen Nachprüfung zugänglich sind und so weitere Aussagen über die Natur der durchdringenden Strahlung ermöglichen würden, und die dritte endlich soll sich mit der Grundgleichung 5) unserer bisherigen Rechnungen beschäftigen und ein neues Moment in der Streuung der Strahlen durch die Erdatmosphäre aufweisen.

Bisher hatten wir stets angenommen, daß die Erdoberfläche eben ist, und daß dementsprechend die Intensität i_0 der hypothetischen Strahlenquellen nur Funktion der vertikalen Erhebung x ist; für Erhebungen, die klein sind gegen den Erdradius, gilt dies sicher mit hinreichender Annäherung, bedarf jedoch der genaueren Untersuchung für Höhen, die mit dem Erdradius vergleichbar werden. Um uns hierüber ein Urteil zu verschaffen, betrachten wir das folgende einfache Beispiel, das sich ohne Mühe behandeln läßt, während die Durchrechnung des allgemeinen Falles wegen des in $L(x, \xi)$ auftretenden Linienintegrals längs des Radius vectors unverhältnismäßig kompliziert wird. Wir betrachten eine Kugel vom Radius R_0 , die von einer homogenen strahlenden Substanz von der Höhe H_1 ab umgeben ist, und zwar soll diese strahlende Substanz eingelagert sein in einer Atmosphäre vom Absorptionsindex λ_0 . Dann erhält man (Fig. 6) für die Ionisationen in einem Punkt auf der Kugeloberfläche

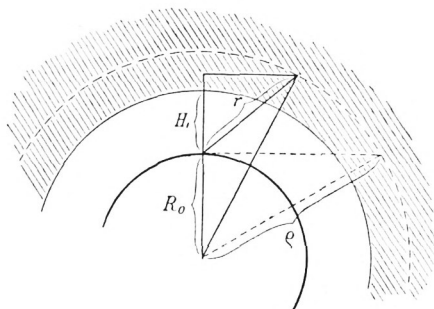


Fig. 6

$$q_x = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1 + R_0}^{\infty} \frac{\varrho}{R_0} d\varrho \int_{\lambda_0 H_1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} dn, \quad (23)$$

wofür man schreiben kann:

$$q_x = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{\infty} dx \left(1 + \frac{x}{R_0} \right) \left\{ Ei(-\lambda_0 x) - Ei(-\lambda_0 x \sqrt{1 + \frac{2R_0}{x}}) \right\} \quad (24a)$$

während für die Ebene sich die analoge Beziehung ergibt

$$q_e = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{\infty} dx \cdot Ei(-\lambda_0 x). \quad 24 \text{ b)}$$

Die Integrationen lassen sich wie früher ausführen; bezeichnen wir die Konstante $\lambda_0 R_0$ mit $\varkappa$ und das Verhältnis $\frac{H_1}{R_0}$ mit Σ , so erhalten wir

$$q_\varkappa = \left(1 + \frac{\Sigma}{2}\right) \Phi(\varkappa \Sigma) - \frac{V\Sigma^2 + 2\Sigma}{2} \Phi(\varkappa V\Sigma^2 + 2\Sigma) + \frac{1}{2\varkappa} (e^{-\varkappa \Sigma} - e^{-\varkappa V\Sigma^2 + 2\Sigma}) \quad 25 \text{ a)}$$

während für die Ebene aus 24 b) die entsprechende Formel folgt

$$q_e = \Phi(\varkappa \Sigma). \quad 25 \text{ b)}$$

Das Verhältnis $Q = (q_e - q_\varkappa)/q_\varkappa$ läßt sich aus diesen beiden Gleichungen sofort berechnen. Für große Werte von Σ konvergiert zwar Q gegen $\Sigma(1 - \frac{1}{2}e^{-\varkappa \Sigma})$, ist aber für kleine Σ , wie sie für uns in Betracht kommen, stets recht klein. So ergibt sich z. B. für $\varkappa = 3 \cdot 10^3$ (entsprechend $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6}$) der Wert $Q = 0,1$ für $\Sigma = 0,1$ (d. h. für $H_1 = 600$ km) und für $\varkappa = 0,3$ der Wert $Q = 0,05$ für dieselbe Höhe, wobei natürlich Q mit abnehmenden Σ gegen Null konvergiert. Durch geeignete Reihenentwicklungen nach positiven bzw. negativen Potenzen¹⁾ von $\varkappa \cdot \Sigma$ lassen sich die Werte von Q sehr einfach berechnen. Wir können als Ergebnis jedenfalls verzeichnen, daß die Korrektur infolge der Erdkrümmung für unsere Zwecke stets zu vernachlässigen ist.

Wir gehen nun dazu über, eine Eigenschaft der durchdringenden Strahlung zu studieren, die zwar bisher noch nicht experimentell untersucht wurde, deren empirische Verfolgung aber durchaus im Bereich des Möglichen liegt und eine erwünschte Ergänzung des Beobachtungsmaterials bringen dürfte. Es ist das die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von dem

¹⁾ Jahnke und Emde, Funktionentafeln S. 19.

Incidenzwinkel gegen die Vertikale, aus der sich, wie wir sehen werden, eine Möglichkeit zur Bestimmung von λ_0 ergibt; der Vorteil dieser Methode würde in erster Linie darin zu suchen sein, daß die erforderlichen Messungen sich in einem einzigen festen Höhenniveau ausführen lassen, eine Erhebung in große Höhen überhaupt entbehrlich machen und dadurch auch eine viel weiter gehende Elimination eventueller zeitlicher Schwankungen der Intensität ermöglichen.

Nehmen wir wie früher an, daß in der absorbierenden Atmosphäre von isothermer Dichteverteilung die strahlende und absorbierende Substanz homogen verteilt ist, und zwar in der Höhe H_1 beginnend und bis ins Unendliche reichend. Die Ionisation durch die Strahlen, welche in einem mit dem Öffnungswinkel φ um die Vertikale gelegten Kegel einfallen, finden wir dann analog zu der früheren Formel 6 a)

$$q_\varphi = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{\infty} dx \int_{L(x)}^{\cos \varphi} \frac{e^{-n}}{n} dn, \quad (26)$$

wenn wir zur formalen Vereinfachung etwa $\xi = 0$ setzen. Wie früher läßt sich durch geeignete Transformation der Variablen, Spaltung des inneren Integrals und Umkehr der Integrationsfolgen das Integral auswerten und ergibt den Ausdruck:

$$\left. \begin{aligned} q_\varphi &= \frac{i_0 \lambda_0}{2 \lambda'} \{ \Phi(c) - \Phi(c/\cos \varphi) \cdot \cos \varphi \} \\ \text{mit} \quad c &= \frac{\lambda_0}{a} (1 - e^{-a H_1}) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

der für φ gleich 90° in den Wert 11) von früher übergeht. Aus 27) können wir nun leicht eine entsprechende Beziehung ableiten, die für die praktische Verwendung brauchbarer ist. Man wird nämlich nicht so verfahren, daß man den Öffnungswinkel des zur Wirkung kommenden Strahlenbündels sukzessive verändert, sondern man wird ein und dasselbe Ionisationsgefäß, welches durch geeignete Blenden nur ein begrenztes Strahlenbündel einläßt, gegen verschiedene Teile des Himmels

richten. Läßt das Ionisationsgefäß nur Strahlen zur Wirkung kommen, die in einem Kegel mit der Öffnung ψ einfallen, und neigt man die Achse dieses Kegels um den Winkel φ gegen die Vertikale, so ist (Fig. 7)

$$q_{\varphi} = q_{\psi, \varphi} \cdot \frac{\text{Fläche } f}{\text{Fläche des Kreisringes}} \quad (28)$$

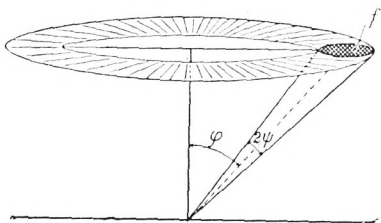


Fig. 7

worin q_{φ} die beobachtete Ionisation und $q_{\psi, \varphi}$ die Ionisation in dem ganzen Raum zwischen den beiden Vollkegeln mit der Öffnung φ und $\varphi + \psi$ ist. Das Verhältnis der beiden Flächen läßt sich durch eine einfache, elementar geometrische Betrachtung durch φ und ψ ausdrücken, $q_{\psi, \varphi}$ ergibt sich aus 27) unmittelbar durch die Differenzbildung $q_{\varphi + \psi} - q_{\varphi}$, so daß also 28) q_{φ} als Funktion des Neigungswinkels φ und der „Apparatkonstante“ ψ gibt. Die Endformel ist allerdings ziemlich kompliziert, und wir wollen uns deshalb hier mit der Diskussion des einfacheren Falles begnügen, daß die Öffnung ψ sehr klein ist, d. h. daß unser Apparat wie ein Fernrohr nur die aus einer bestimmten Richtung kommenden Strahlen aufnimmt. Mit Übergang der einfachen Zwischenbetrachtungen erhalten wir dann für die in der Richtung φ einfallenden Strahlen:

$$q_{\varphi} \text{ proportional } e^{-c/\cos \varphi}.$$

Um die Reduktion auf gleiche Maximalwerte für $\cos \varphi = 1$ zu vermeiden, bilden wir gleich

$$\kappa(\varphi) = e^{-c/\cos \varphi} / e^{-c} = e^{-c \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi}} \quad (29)$$

das für verschiedene Werte von c in der Fig. 8 aufgetragen ist. Man sieht, daß $\kappa(\varphi)$ in einem für die Messung aussichtsreichen Maß von c abhängt, und zur numerischen Bestimmung dieser Größe dienen kann. Nun ist nach Gl. 27 $c = \frac{\lambda_0}{a} (1 - e^{-aH_1})$. Setzen wir für a den Wert $1,25 \cdot 10^{-6}$, für H_1 die Größenordnungen $10 - 10^3$ in Kilometern und für λ_0 entsprechend den früheren Resultaten Werte von der Größenordnung $10^{-5} - 10^{-6}$, so erhalten wir für c die folgenden Werte:

$\lambda_0 \cdot 10^{-6}$	H_1	30	50	100	500	1000
2		1,57	1,60	1,60	1,60	1,60
4		3,14	3,20	3,20	3,20	3,20
6		4,71	4,80	4,80	4,80	4,80
8		6,28	6,40	6,40	6,40	6,40
10		7,85	8,00	8,00	8,00	8,00

In Verbindung mit der aus der Fig. 8 sich ergebenden Abhängigkeit des $\kappa(\varphi)$ vom Parameter c können wir also schließen, daß der hier untersuchte Richtungseffekt sehr unempfindlich ist gegen den Wert von H_1 , wenigstens innerhalb der hier in Betracht kommenden Höhenlagen, daß er dagegen hinsichtlich des Wertes von λ_0 empfindlich genug ist, um eine experimentelle Bestimmung desselben auf diesem Wege aussichtsreich erscheinen zu lassen.

§ 6. Namentlich durch die zuletzt durchgeführten Betrachtungen über die Richtung der durchdringenden Strahlung werden wir nun von selbst darauf geführt, die Grundlagen aller unserer bisherigen Überlegungen in einem wesentlichen Punkt zu verallgemeinern. Wir haben, wie das in dem grundsätzlichen Ansatz 3) bzw. 5) zum Ausdruck kommt, angenommen, daß die von einem strahlenden Volumelement ausgehende Strahlung sich geradlinig in der Atmosphäre fortpflanzt und dabei durch Absorption geschwächt wird; es sollte also räumliche Ausbreitung nach dem quadratischen Gesetz und Absorp-

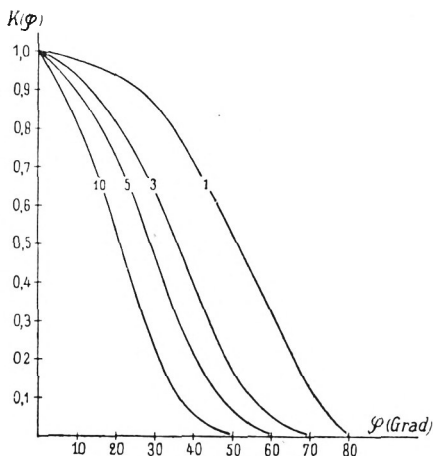


Fig. 8

tion nach dem Exponentialgesetz stattfinden. Nun liegt es nahe, diesen Ansatz zu vervollständigen durch die Annahme, daß die Strahlung beim Durchgang durch die Erdatmosphäre nicht nur absorbiert, sondern auch gestreut werde, d. h. daß ein Teil der in ein Volumelement einfließenden Energie in diesem jonisiert und für den weiteren Energiefluß verloren geht, daß aber ein anderer Teil das Volumelement in Form von Strahlung wieder verläßt, jedoch nicht nur gerichtet in Richtung der einfallenden Strahlen, sondern zerstreut nach allen Richtungen; der zerstreute Anteil wird seinerseits in andere Volumelemente eindringen und dort wiederum teils absorbiert, teils zerstreut werden usw. Leider bietet diese allgemeinste Exposition der Diskussion unüberwindliche Schwierigkeiten; teils liegen diese auf rein analytischem Gebiet — man kommt auf sehr komplizierte Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen, die sich, so viel ich sehe, nur numerisch lösen lassen — teils aber darin, daß wir über die Natur der primären Strahlen, insbesondere über allenfallsige Transformationen derselben bei der Streuung, gar nichts wissen und auch kaum einen Anhalt aus den Erfahrungen an bekannten γ Strahlungen

gewinnen können. Nehmen wir an, daß Streuung ohne Veränderung der Härte stattfindet, so lassen sich alle hier interessierenden Fragen jedoch recht einfach lösen, wenn wir die verschiedenen Richtungen sowohl in der absorbierten wie in der gestreuten Strahlung als gleichwertig betrachten, d. h. mit einem mittleren Absorptions- und Streuungskoeffizienten rechnen, die wir für die aufsteigende und für die absteigende Strahlung als gleich groß ansetzen. Ist die Intensität der absteigenden Strahlung i_1 , die der aufsteigenden i_2 und sind der Absorptionskoeffizient und der Streuungskoeffizient für Luft von Atmosphärendruck λ_0 und r_0 , so werden die Differentialgleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned}\frac{di_1}{d\xi} &= \lambda_0 i_1 + \frac{r_0}{2} i_1 - \frac{r_0}{2} i_2 \\ \frac{di_2}{d\xi} &= -\lambda_0 i_2 - \frac{r_0}{2} i_2 + \frac{r_0}{2} i_1,\end{aligned}\tag{30}$$

worin ξ eine neue Variable ist, die mit der Höhe x über dem Erdboden in folgender Weise zusammenhängt und gleich so gewählt ist, daß für $x = 0$ auch $\xi = 0$ ist:

$$\xi = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha x}).\tag{31}$$

Die Grenzbedingungen sind, daß für $x = 0$ ($\xi = 0$) die aufsteigende Strahlung i_2 verschwindet, und daß für eine vorgegebene Höhe $x = x_0$ ($\xi = \xi_0$) die absteigende Strahlung i_1 einen vorgegebenen Wert i_0 hat.

$$\begin{aligned}(x = 0) \quad \xi &= 0 & i_2 &= 0 \\ (x = x_0) \quad \xi &= \xi_0 & i_1 &= i_0\end{aligned}\tag{32}$$

Nach den im vorhergehenden gesammelten Erfahrungen können wir — und damit gehen wir zugleich den dunklen Fragen über die Konstitution der höchsten Atmosphärenschichten aus dem Wege — mit vollständig hinreichender Annäherung $x_0 = 30$ km setzen ($\xi_0 = 0,78 \cdot 10^6$).

Die Integrale von 30), welche den Bedingungen 32) genügen, lassen sich nun verhältnismäßig einfach hinschreiben.

Im folgenden werden wir nur $i_1 + i_2$ und $\frac{i_1}{i_2}$ benutzen und finden dafür mit den für die weitere Diskussion bequemen Abkürzungen

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{\lambda_0}}} \quad m = \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{r_0}{\lambda_0}} \quad (33)$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= 2i_0 \frac{(1 + \delta)e^{mz} - (1 - \delta)e^{-mz}}{(1 + \delta)^2 e^{mz_0} - (1 - \delta)^2 e^{-mz_0}} \\ \frac{i_1}{i_2} &= \frac{1}{1 - \delta^2} \frac{(1 + \delta)^2 e^{mz} - (1 - \delta)^2 e^{-mz}}{e^{mz_0} - e^{-mz_0}} \end{aligned} \quad (34)$$

Zunächst ist zur Beurteilung der Intensität von Wichtigkeit, wie die Schwächung der Strahlung in der Atmosphäre durch die Streuung beeinflusst wird; für verschiedene Werte von $\frac{r_0}{\lambda_0}$ gibt darüber mit $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ (1) die folgende Tabelle Aufschluß, welche die Strahlung am Erdboden im Verhältnis zu der in 30 km Höhe einfallenden Strahlung angibt; zur besseren Übersicht sind in Klammern dieselben Werte ausgedrückt in Prozenten derjenigen Strahlung, welche *cet. par.* jedoch ohne Streuung am Erdboden ankommen würden.

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	0	10^{-2}	10^{-1}	0,5	1
$\frac{(i_1 + i_2)_{z=0}}{i_0}$	0,020	0,020	0,016	0,008	0,004
	(100)	(100)	(80)	(40)	(20)

Von Interesse ist ferner das Intensitätsverhältnis der aufsteigenden und der absteigenden Strahlung, da man aus demselben die Chancen für eine experimentelle Bestimmung des Streukoeffizienten (durch Abschirmung der einen Kompo-

1) In Hinblick auf die benutzte Mittelwertbildung würde in Strenge ein etwas größerer Wert von λ_0 zu verwenden sein; für die folgenden Überschlagsrechnungen genügt es aber, direkt den früher erhaltenen Wert zu verwenden.

nente) entnehmen kann. Für verschiedene Höhen des Beobachtungsortes ergibt die numerische Rechnung die folgenden Werte von $\frac{i_2}{i_1}$ = Intensität der aufsteigenden Strahlung: Intensität der absteigenden Strahlung. Die in Klammern beigefügten Zahlen geben die aufsteigende Strahlung i_2 in Prozenten der Gesamtstrahlung ($i_1 + i_2$)

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	0	10^{-1}	1
$H = 10 \text{ km}$	0 (0)	0,026 (2)	0,171 (15)
$H = 1 \text{ km}$	0 (0)	0,016 (1,5)	0,135 (12)

Endlich sei zur Ergänzung der früheren Betrachtungen noch der Einfluß der Streuung auf die Größe des (scheinbaren) Absorptionskoeffizienten untersucht, den man unter der Annahme von reiner Absorption ohne Streuung aus den Beobachtungen in zwei Höhen entnehmen würde. Es ist klar, daß das Vorhandensein von Streuung einen zu großen Absorptionskoeffizient vortäuschen würde; um über die Größe des so entstehenden Fehlers zu orientieren, gibt die folgende Tabelle das Verhältnis der Gesamtstrahlungen in den Höhen 2 km und 9 km (vgl. S. 17, 18) und zwar in Klammern wiederum diese Werte prozentual bezogen auf den Fall der reinen Absorption ohne Streuung¹⁾.

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	0	10^{-1}	1
$(i_1 + i_2)_2$	0,163	0,143	0,072
$(i_1 + i_2)_9$	(100)	(88)	(44)

¹⁾ Nach Abschluß dieser Überlegungen finde ich eine Arbeit von Schwarzschild, Berl. Ber. 1914, S. 1183, in welcher ähnliche Fragen behandelt sind. Uns interessiert hier besonders, daß Schwarzschild auf eine Untersuchung von Schuster, Astrophys. Jour. 21, 1905 hinweist, in welcher gerade die von uns benutzte Näherung verwendet ist und daß diese Näherung nach Schwarzschild in der Tat eine recht gute ist.

§ 7. Bisher hatten wir uns nur mit dem funktionellen Verlauf der Ionisationskurve beschäftigt und daraus Folgerungen namentlich über die Größe des Absorptionskoeffizienten abzuleiten versucht. Wir wollen nun dazu übergehen, die zweite der in unsere Formeln eingehenden Konstanten, nämlich die Aktivität i_0 zu untersuchen. Eine genaue quantitative Bestimmung von i_0 ist — teils wegen der in den bisherigen Betrachtungen bereits hervorgetretenen Unbestimmtheiten der Theorie, teils wohl auch wegen der Unsicherheit der gemessenen Ionisationswerte selbst — nicht möglich. Dagegen lassen sich Angaben über die Größenordnung von i_0 immerhin machen und zu einer Reihe von interessanten Folgerungen verwerten. Eine erwünschte Ergänzung dieser aus den von uns bisher allein benutzten elektrischen Daten zu ziehenden Schlüssen werden wir ferner von ganz anderer Seite her gewinnen, nämlich aus der Theorie der Beleuchtung kosmischer Staubmassen.

Wir gehen aus von der Beziehung 19), die für $\xi = 0$ (wir könnten ebenso gut, und wie ausdrücklich bemerkt sei, ohne andere quantitative Ergebnisse zu erhalten, diese Beschränkung nicht machen) die Form hat:

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{\lambda_0 i_0}{2\lambda'} \{ \Phi(c) - \Phi(c + \lambda' a) \} \\ c &= \frac{\lambda_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha H_1}), \end{aligned} \quad 35)$$

worin wir nun für λ_0 die Größenordnung $5 \cdot 10^{-6}$ bereits kennen. Um aus dem bekannten Wert von $q(0)$, der von der Größenordnung 1 anzusetzen ist, i_0 zu bestimmen, müßten wir nun die uns leider gänzlich unbekannte Größe λ' kennen, so daß wir uns nach einem Ausweg umsehen müssen, welcher die Kenntnis von λ' unnötig macht. Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall, daß d sehr groß ist (genauer, daß $\lambda' d$ groß ist) und der z. B. realisiert ist für den Fall der Erfüllung des Weltraums mit Strahlenquellen, so wird $\Phi(c + \lambda' d) = 0$ und wir erhalten:

$$\frac{i_0 \lambda_0}{2\lambda'} = \frac{2q(0)}{\Phi(c)} \quad 36)$$

und nun können wir daraus für i_0 in folgender Weise wenigstens einen unteren Grenzwert, also gerade die wohl am meisten interessierende Angabe, ableiten. Wir haben bereits bemerkt (S. 14), daß $\frac{i_0}{\lambda'}$ unabhängig ist von der räumlichen Dichte der strahlenden Substanz; dies gilt jedenfalls, wenn diese kontinuierlich im Raum verbreitet ist, oder wenn alle in Betracht kommenden Distanzen groß sind gegenüber den linearen Dimensionen etwaiger kompakter, isolierter Partikel derselben (quasi kontinuierliche Verteilung). Bezeichnen wir nun mit (i_0) und (λ') die Werte von i_0 und λ' für eine Dichte der strahlenden Substanz gleich der der Luft von Atmosphärendruck, so ist:

$$\frac{i_0 \lambda_0}{\lambda'} = \frac{(i_0) \lambda_0}{(\lambda')} \quad (37)$$

Nun ist für ein absorbierendes Medium nach allen bisherigen Erfahrungen der Absorptionskoeffizient bezogen auf die Dichte der Luft gleich dem der Luft selbst oder für Atomgewichte größer als etwa 100 größer als dieser, d. h. es ist $\frac{\lambda_0}{(\lambda')} \leq 1$. Daraus folgt in Verbindung mit Gl. 36) und 37) für i_0 unmittelbar der untere Grenzwert

$$(i_0) \geq \frac{2 q(0)}{\Phi(c)} \quad (38)$$

Setzen wir nun $q(0) \sim 1$ und für $\Phi(c)$ nach Maßgabe der Höhe H_1 seinen Wert ein, so erhalten wir einen numerischen Wert für i_0 ; da von $H_1 = 30$ km an die Höhe bereits ohne Einfluß auf die Größenordnung von $\Phi(c)$ ist, (für $H_1 = 30$ km wird $\Phi(c) = 3,2 \cdot 10^{-3}$ für $H_1 = \infty$ wird $\Phi(c) = 3,6 \cdot 10^{-3}$) erhalten wir somit

$$(i_0) \geq 1000. \quad (39)$$

Wir können damit, um eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, die Aktivität bekannter irdischer Stoffe vergleichen; so ist z. B. für die stark radioaktive Bodenluft die Aktivität nur etwa 100, für die Luft der freien Atmosphäre gar nur

etwa 10^{-1} , für die Gesteine der festen Erdrinde etwa 2; zur Erzielung der Aktivität 1000 müßten ferner in der Volumeinheit 10^{-12} g Radium verteilt sein. Zu allen diesen Zahlen ist, wie nochmals hervorgehoben sei, zu bemerken, daß 39) sich bezieht auf eine Massendichte der strahlenden Substanz gleich der Luft von Atmosphärendruck.

Eine zweite Möglichkeit ergibt sich, wenn wir nach Potenzen von $d\lambda'$ entwickeln. Dann wird die erste der Gl. 35)

$$q(0) = \frac{i_0 \lambda_0 d}{2} Ei(-c) \quad (40)$$

und demgemäß

$$di_0 \geq \frac{2q(0)}{\lambda_0 Ei(-c)}, \quad (41)$$

welche den Zusammenhang zwischen der Schichtdicke d und der Aktivität zeigt. Da hier i_0 die Aktivität für den tatsächlichen Zustand der strahlenden Substanz angibt, so ist $i_0 d$ die tatsächliche Aktivität einer Säule, die mit dem Querschnitt 1 aus der strahlenden Schicht ausgeschnitten ist. Rechnen wir zur Veranschaulichung um in g Radiumgehalt, so bekommen wir mit den bisher benutzten Werten dafür 10^{-7} bzw. extrapolatorisch für $H_1 = 10$ km den Wert $2,5 \cdot 10^{-8}$, der mit einem von Bergwitz nach Linkes Ansätzen berechneten Wert übereinstimmt¹⁾. Strenger würden wir in letzterem Fall allerdings nach den Gl. 19 a) verfahren, doch ist eine Verschiebung der Größenordnung dadurch nicht zu befürchten.

Die Angaben, die wir über die Aktivität der hypothetischen strahlenden Substanz machen können, sind damit, so viel ich sehe, erschöpft. Wir können sie jedoch in gewisser Weise ergänzen, wenn wir die optischen Eigenschaften (Extinktion und diffuse Zerstreuung des Lichts) mit heranziehen; dadurch kommen wir, wie sich zeigen wird, prinzipiell insofern wesentlich weiter, als wir Aussagen machen können über die Aktivität der kompakten strahlenden Substanz und nicht nur wie bisher über die Aktivität der (mit unbekannter Massendichte belegten) substanzerfüllten Volumelemente. Ehe wir darauf

¹⁾ Bergwitz, Met. Zeitschr. 33, S. 310, 1916.

noch kurz eingehen, wollen wir aber einige energetische Betrachtungen anfügen; da wir bisher nach Möglichkeit allzu Hypothetisches vermieden haben, seien diese jedoch mit aller Reserve mitgeteilt. Wir kennen nach dem zuletzt Gesagten aus $q(0)$ die Größenordnung von i_0 d. h. die Gesamtzahl von Ionen, welche die von der Volumeinheit ausgehende Strahlung in der Zeiteinheit produzieren kann. Ist nun die zur Ionisierung eines Luftmoleküls erforderliche Energiemenge E_γ , so ist die in der durchdringenden Strahlung aus der Volumeinheit pro Zeiteinheit ausfließende Energie E sicher $\geq i_0 E_\gamma$; da wir den Wirkungsfaktor bei der Ionisation nicht kennen, können wir natürlich nicht mehr als in dieser Weise einen unteren Grenzwert für E angeben. Im Mittel ergibt sich nun für die Moleküle der in der Luft enthaltenen Gase E_γ von der Größenordnung 10^{-11} Erg., so daß wir also erhalten (in Erg.):

$$E \geq i_0 10^{-11}. \quad 42)$$

Es liegt nun nahe, sich zu überlegen, zu welchen Folgerungen man kommt, wenn man die Hypothese einer in den obersten Luftschichten oder im Weltraum vorhandenen strahlenden Substanz überhaupt fallen läßt, und die Quelle der Energie in einer Transformation der kinetischen Energie (Sekundärstrahlung) einer korpuskularen Strahlung sieht, welche in die Atmosphäre eindringt; die neuesten Anschauungen über die Entstehung des Nordlichts z. B. führen jedenfalls unmittelbar auf diesen Gedanken. Zu einer Überschlagsrechnung können wir nun direkt an die einfache Beziehung 41) anknüpfen und erhalten schon von $H_1 = 30$ km ab praktisch unabhängig von H_1)

$$E > \frac{10^{-3}}{d}. \quad 43)$$

1) Eine genauere, wegen der mancherlei unbekannten eingehenden Größen aber kaum weiter reichende Rechnung ließe sich durchführen auf Grund der Formeln 19) oder 19a), wenn man dort i_0 räumlich variabel und zwar proportional der Luftdichte setzt. Für isotherme Dichteverteilung $i_0 = i'_0 \cdot e^{-\alpha x}$ ist der mathematische Teil der diesbezüglichen Rechnungen enthalten in der zitierten Arbeit von Schrödinger.

Die Gesamtenergie der in einer Säule von 1 qcm Querschnitt absorbierten Korpuskeln muß also wegen der neuerlichen Energietransformation kinetische Energie — durchdringende Strahlung jedenfalls a fortiori größer sein als 10^{-3} Erg. Dies Resultat können wir nun in Verbindung setzen mit dem Konvektionsstrom pro cm^2 , den diese Korpuskeln der Erde in der Zeiteinheit zuführen. Für die kinetische Energie einer Korpuskel haben wir $T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ und für den Strom, wenn N die Zahl der transportierten Korpuskeln ist, $J = N \cdot c \cdot e \cdot \beta$. Aus diesen beiden Beziehungen und aus Gl. 43) folgt der Strom in Ampère, wenn $\frac{e}{m_0}$ in elektromagnetischen Einheiten gemessen ist:

$$J > 3 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{e}{m_0} \frac{\beta \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \sqrt{1-\beta^2}}. \quad (44)$$

Ohne Rücksicht auf die durch die Absorptionsverhältnisse bedingte mögliche Eindringtiefe und die dadurch vorgeschriebene Minimalgeschwindigkeit der Korpuskeln¹⁾ und ebenso auf einen eventuellen Zusammenhang zwischen Impulsbreite und Korpuskelgeschwindigkeit zu nehmen, erhalten wir hieraus die folgenden Stromwerte (in Amp./ cm^2), die eine instruktive Übersicht über die Brauchbarkeit der eben entwickelten Theorie gibt.

β	0,5	0,9	0,95	$1-10^{-4}$	$1-10^{-6}$
Elektronen $\frac{e}{m_0} = 1,77 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-9}$
α -Strahlen $\frac{e}{m_0} = 5 \cdot 10^3$	$4,8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$7,5 \cdot 10^{-10}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$	

¹⁾ Für β -Strahlen vgl. Lenard, Heidelb. Akad. Nr. 17, 1910; für α -Strahlen Vegard, Ann. Phys. 50, S. 853, 1916 (hier weit. Lit.).

Anm. bei der Korr. Inzwischen ist ein schönes zusammenfassendes Referat über die Theorien des Nordlichts von Vegard publiziert worden in Jahrb. d. Rad. u. Elektronik 1918.

Zur quantitativen Beurteilung dieser Stromwerte wird man jedoch berücksichtigen müssen, daß in die Ausgangsgleichung 42), welche lediglich die reine Energiebilanz berücksichtigt, in Wirklichkeit noch die Nutzeffekte der beiden Umwandlungen kinetische Energie — durchdringende Strahlung und durchdringende Strahlung — Jonisation eingehen, welche die angegebenen Grenzwerte erheblich nach oben rücken; für Röntgenstrahlen z. B. würde nach den vorliegenden Daten¹⁾ das Produkt der beiden Nutzeffekte einen Faktor von der Größenordnung 10^4 bedingen. Zu diskutieren, inwieweit die vorgetragene Theorie mit der Wirklichkeit verträglich ist, würde hier zu weit vom Thema ab und in das Gebiet der Spekulation führen; über einige interessante Folgerungen in dieser Richtung werde ich a. a. O. berichten. Es sei nur noch bemerkt, daß v. Schweidler am Schluß seiner bereits zitierten Arbeit die soeben behandelte Möglichkeit einer Erklärung der durchdringenden Strahlung ebenfalls kurz erwähnt und auf gewisse Schwierigkeiten derselben aufmerksam gemacht hat²⁾.

Wir wollen nun zum Schluß die mehrfach erwähnten Ergänzungen zu den Intensitätsfragen vornehmen, die sich aus der Heranziehung gewisser optischer Daten ergeben. Nehmen wir als eine der möglichen Formen der strahlenden Substanz die einer dünnen Staubwolke an, so erhalten wir aus den zulässigen Werten der Lichtextinktion und der Flächenhelligkeit bei Betrachtung durch die Sonne eine obere Grenze für die mögliche Massendichte einer derartigen staubförmig verteilten Substanz; zur Durchführung der Rechnungen werden wir, was wohl ohne Bedenken erlaubt ist, die einzelnen Partikel der Staubwolke als kugelförmig und von gleicher Größe annehmen; eine Verallgemeinerung für verschiedene beliebige Kugelgrößen läßt sich unschwer durchführen, ohne jedoch für unsere Zwecke Vorteile zu bringen. Ferner sollen die Staubpartikel absolut

¹⁾ Pohl, Physik d. Röntgenstrahlen, S. 6, 139.

²⁾ Wie mir Herr Wigand nachträglich mitteilte, hat auch Kolhörster diesbezügliche Rechnungen angestellt und wurde nur durch den Krieg an der Publikation verhindert.

undurchsichtig und ihre Oberflächenbeschaffenheit durch die Albedo gegeben sein. In diesen letzten beiden Annahmen, welche optische Betrachtungen ohne weitere hypothetische Zusätze heranzuziehen gestatten, liegt gerade die Möglichkeit, unsere bisherigen Überlegungen zu ergänzen.

Sind in der Volumeinheit N Kugeln kompakter Substanz vom Radius ϱ vorhanden, so ist die Lichtabsorption in einer Schicht von der Dicke δ gegeben durch

$$J = J_0 \cdot e^{-N \cdot \varrho^2 \pi \cdot \delta} = J_0 \cdot \delta, \quad (45)$$

wo δ ein Faktor ist, welcher jedenfalls sehr nahe gleich 1 anzusetzen sein wird. Bezeichnen wir für das Folgende — $\ln \delta$ mit Σ , so geben die astronomischen und terrestrischen Extinktionsmessungen einen Anhalt für die Größe von Σ . Für die gesamte Atmosphäre und einen im Zenith stehenden Stern hat sich Σ von der Größenordnung 10^{-1} ergeben¹⁾; berücksichtigt man jedoch, daß die besten Resultate der indirekten astronomischen und der direkten terrestrischen Extinktionsmessungen sehr nahe dieselben Werte für Σ ergeben haben, so wird man natürlich für die Absorptionen der Staubwolke sehr viel kleinere Werte von Σ ansetzen als $\Sigma_0 = 10^{-1}$. Auf alle Fälle ist aber zu fordern, daß

$$N \varrho^2 \pi d < \Sigma_0. \quad (46)$$

Ist nun andererseits das mit kompakter strahlender Substanz erfüllte Volumen pro Volumeinheit des Raumes V , so ist

$$\frac{4}{3} N \varrho^3 \pi = V. \quad (47)$$

Aus Gl. 46), 47) folgt also durch Elimination von N :

$$\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} < \Sigma_0. \quad (48)$$

Nun können wir aber andererseits für ϱ eine obere Grenze daraus bestimmen, daß wir für die Fallgeschwindigkeit der betrachteten Kugeln nur einen gewissen maximalen Wert zulassen. Aus den bekannten hydrodynamischen Beziehungen

¹⁾ Müller, Photometrie der Gestirne. Leipzig 1897.

zwischen Kugelgröße und stationärer Endgeschwindigkeit¹⁾ läßt sich eine obere Grenze für den Kugelradius ausrechnen, wenn für die Endgeschwindigkeit selbst eine obere Grenze vorgegeben wird. Setzen wir also vorläufig an, daß $\varrho < \varrho_0$ sein soll, so ergibt Gl. 48) die Bedingung $Vd < \frac{4}{3} \Sigma_0 \varrho_0$. Aus dieser können wir nun — und hierin sehe ich immerhin einen prinzipiellen Fortschritt — sofort einen unteren Grenzwert für die Aktivität A der kompakten strahlenden Substanz, unabhängig von der Dichte ihrer Verteilung, ableiten. Wir hatten nämlich früher in Gl. 41) einen Ausdruck gefunden für $i_0 d = A_0$ d. h. für die Aktivität einer Säule der strahlenden Schicht vom Querschnitt 1 und haben nun einen analogen Ausdruck gefunden, für die tatsächliche Raumerfüllung der kompakten strahlenden Substanz in dieser Säule. Die Kombination beider gibt unmittelbar die gesuchte Beziehung für die tatsächliche Aktivität der kompakten Substanz:

$$A > \frac{3}{4} \cdot \frac{A_0}{\Sigma_0 \varrho_0}. \quad 49)$$

Die Größenordnung von A_0 kennen wir nun bereits zu 10^8 ; für Σ_0 ist nach den obigen Angaben ein Wert zu setzen, der sicher beträchtlich kleiner — vermutlich um 1—2 Zehnerpotenzen — ist als $10^{-1} \varrho_0$; endlich ergibt sich z. B. aus der Annahme, daß die stationäre Fallgeschwindigkeit des Staubes in 20 km Höhe von der Größenordnung 1 ist, als von der Größenordnung 10^{-3} , so daß sich für A der durchaus nicht unmöglich hohe Wert von 10^{12} ergibt. Dies würde natürlich nach Maßgabe einer Verkleinerung von Σ_0 und ϱ_0 noch zu vergrößern sein und würde so in die Größenordnung des Wertes für reinen Radiumstaub kommen. Unabhängig von diesen aus Mangel an exakten empirischen Unterlagen naturgemäß noch recht willkürlichen Zahlenrechnungen läßt sich vorerst aus der allgemeinen Beziehung 49) auf jeden Fall der Zusammenhang von A mit lauter physikalisch durchsichtigen Größen deutlich übersehen.

¹⁾ Sehr brauchbar ist hier eine von Kundsén, Ann. Phys. 36, S. 981, 1911 gegebene empirische Formel, die im folgenden benutzt wurde.

Während nun namentlich die Festlegung von ϱ_0 der Spekulation noch ein weites Feld offen läßt, Spekulationen, die hier zu weit ab vom eigentlichen Thema und in das Gebiet der Hydrodynamik der Atmosphäre führen würden, lassen sich die in der Größe Σ_0 liegenden Unsicherheiten in gewissem Umfang eliminieren oder doch kontrollieren, wenn man neben der Extinktion nun auch den gewissermaßen inversen Effekt in Betracht zieht, nämlich die diffuse Reflektion des Lichts an der Staubwolke bei Bestrahlung durch die Sonne. Ebenso wie die Extinktion für die räumliche Dichte der Staubwolke bei gegebener Teilchengröße eine obere Grenze geliefert hat, muß sich nämlich auch aus der Flächenhelligkeit ein solcher Grenzwert ergeben. Lehnen wir uns an die bereits vorliegende Theorie der Beleuchtung kosmischer Staubmassen an¹⁾, so erhalten wir für die Flächenhelligkeit ausgedrückt in Bruchteilen der Flächenhelligkeit J_M des Vollmondes die folgende Formel

$$H = J_M \cdot 12,3 \cdot \mu \cdot \frac{f(a)}{\pi} \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cdot \cos \varepsilon}} \right). \quad 50)$$

Es bedeutet darin μ die Albedo der staubförmig verteilten Substanz, $f(a)$ eine von der Form des elementaren Beleuchtungsgesetzes abhängende Funktion des Phasenwinkels, i und ε den Incidenz- bzw. Emissionswinkel des betrachteten Teils der Wolke und $\frac{V \cdot d}{\varrho}$ eben die früher z. B. durch Gleichung 48) eingeführte Größe. Da es sich nur um eine Bestimmung der Größenordnung handeln soll, können wir die Gl. 50) einfacher schreiben in der Form

$$H \sim J_M \left(1 - e^{-\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} \cdot \frac{\cos i}{2}} \right), \quad 51)$$

wobei der Einfachheit halber $i = \varepsilon$ gesetzt wurde (die allgemeine Diskussion, auf die wir hier nicht eingehen wollen, verläuft ebenso einfach). Soll nun $H < \Sigma'_0 \cdot J_M$ sein, so folgt unmittelbar die der Gl. 48) ganz analoge Beziehung:

¹⁾ In Betracht kommen die drei Arbeiten von H. v. Seeliger über die Photometrie kosmischer Staubmassen. Abh. Münch. Akad. 16, 1887; 18, 1893 und Münch. Ber. 31, S. 265, 1901.

$$\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} < \Sigma'_0 \frac{\cos i}{2}. \quad (52)$$

Wie man leicht einsieht, ist für Höhen der strahlenden Schicht von der Größenordnung 10 km i recht nahe gleich 90° , so z. B. für $H = 20$ km $i = 85^\circ$ ($\cos i \sim 10^{-1}$). Setzt man etwa $\Sigma'_0 = 10^{-5}$ bis 10^{-7} , entsprechend der Flächenhelligkeit der Milchstraße, so wird die rechte Seite von der Größenordnung 10^{-6} bis 10^{-8} ; damit aber käme man bereits in Gebiete der Aktivität, welche selbst die des reinen Radiums erheblich überschreiten. Eine genauere Diskussion der Größen ϱ_0 , Σ'_0 usw. wird ohne Zweifel möglich sein, doch mag es hier genügen, die allgemeinen Formeln und eine Überschlagsrechnung zur Illustration ihrer praktischen Anwendung gegeben zu haben.

§ 8. Abschließend können wir die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen in den folgenden Sätzen nunmehr kurz zusammenfassen.

a) Da das Beobachtungsmaterial wegen der Unsicherheit der Einzelwerte und der Unbestimmtheit der Reduktion von der gemessenen Gesamtjonisation auf die reine äußere Volumjonisation noch nicht als exakt quantitative Grundlage für theoretische Betrachtungen dienen kann, ist man gezwungen, aus denselben zunächst diejenigen Daten abzuleiten, welche schon jetzt als gesichert gelten können. Als solche werden für das folgende benutzt die Größenordnung der Jonisation am Erdboden, das Verhältnis zweier Jonisationen in zwei günstig gewählten Höhen und der charakteristische geometrische Verlauf der Jonisations-Höhenkurve.

b) Das Problem läßt sich formulieren in einer Integralbeziehung, welche die Jonisation als Funktion einer räumlichen Verteilung von Strahlungsquellen und der Absorption der durchdringenden Strahlung auf dem Weg von diesen Quellen zum Beobachtungsort beschreibt. Die Vieldeutigkeit der Lösungen zwingt, sich auf gewisse plausible Sonderfälle zu beschränken.

c) Für den Fall einer diskontinuierlichen Verteilung der Quellen in den oberen Schichten der Atmosphäre bzw. im Welt-raum wird die Lösung in erster und zweiter Näherung gegeben.

Neben einigen allgemeinen Sätzen ergibt sich aus der Diskussion derselben zunächst als unterer Grenzwert des Absorptionskoeffizienten λ_0 der Wert $1,6 \cdot 10^{-6}$ und weiterhin durch Spezialisierung der Voraussetzungen für λ_0 selbst die Größenordnung $5 \cdot 10^{-6}$. Unter den genannten allgemeinen Sätzen ist der zu erwähnen, daß Größe und Verlauf der Ionisation unabhängig sind von der Dichte einer hypothetischen in der Höhe ausgebreiteten strahlenden Substanz und nur abhängt von deren gesamter aktiver Masse.

d) Die vorhergehenden Betrachtungen werden erweitert unter Berücksichtigung der Erdkrümmung und der Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Incidenzwinkel. Der letztere Umstand gibt ein neues Mittel zur experimentellen Bestimmung des Absorptionskoeffizienten.

e) Eine dritte Erweiterung bezieht sich auf die Annahme einer Streuung der Strahlung neben der reinen Absorption; mangels aller numerischen Unterlagen läßt sich die Diskussion vorerst nur allgemein durchführen, ergibt aber immerhin brauchbare Fingerzeige und Arbeitshypothesen.

f) Für die Aktivität der Volumeinheit ergibt sich ausgedrückt in g Radium als unterer Grenzwert die Größenordnung 10^{-7} — 10^{-8} . Nimmt man an, daß die Strahlungsquellen in fein verteilter staubförmiger Materie sitzen, so gibt die Berücksichtigung der optischen Absorption und diffusen Reflexion in Verbindung mit der stationären Fallgeschwindigkeit des Staubes ein Mittel an die Hand, um für die Aktivität der kompakten strahlenden Substanz untere Grenzen aufzustellen.

g) Ergänzend wird die Hypothese diskutiert, daß die durchdringende Strahlung entsteht durch Transformation der kinetischen Energie einer in die Erdatmosphäre eindringenden korpuskularen Strahlung.

Charlottenburg, Januar 1818.

