

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1936. Heft III

Sitzungen Oktober bis Dezember

München 1936

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Elliptische Funktionen und Gleichungen fünften Grades.

Von F. Lindemann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Dezember 1936

Die Transformation dritter Ordnung der elliptischen Integrale wurde durch Cayley und Clebsch¹ mit der Theorie der binären algebraischen Formen vierter Ordnung in Verbindung gebracht, indem sich eine solche Transformation in der Form

$$y_1 = \alpha a_x^3 a_2 + \lambda H_x^3 H_2, \quad y_2 = -(\alpha a_x^3 a_1 + \lambda H_x^3 H_1)$$

darstellen läßt, wenn a_x^4 die zu transformierende Grundform der elliptischen Integrale und H_x^4 deren Hessesche Form darstellt. Da in dem Büschel $\alpha f + \lambda H$ jede biquadratische Form enthalten ist, kann man umgekehrt von der Transformation $y_1 = a_x^3 a_2$, $y_2 = -a_x^3 a_1$ ausgehen, und fragen: „welche Form des Büschels $\alpha f + \lambda H$ wird durch die Transformation so umgeformt, daß die Gleichung

$$\int \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{V \alpha a_x^4 + \lambda H_x^4} = \int \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{V K a_y^4 + L H_y^4}$$

besteht, wo K, L durch α, λ bestimmt sind?“ So faßte Hermite² das Problem auf und hat das Resultat angegeben, ohne den Gang seiner Rechnung mitzuteilen.

Im folgenden habe ich die nötige Rechnung in symbolischer Form gegeben, dann aber weiter versucht, ob sich durch analogen Ansatz $y_1 = \varphi_x^{n-1} \varphi_2$, $y_2 = -\varphi_x^{n-1} \varphi_1$, wo φ_x^n eine Kovariante von a_x^4 bezeichnet, ähnliche Resultate ergeben. Es zeigte sich, daß die Annahme $\varphi(x) = T_x^6$, wo T die Kovariante 6. Ordnung bezeichnet, in der Tat Erfolg hat; und dabei ergab sich eine Methode zur Auflösung der allgemeinen Gleichungen 5. Grades

¹ Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, S. 405 ff.

² Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques, extrait d'une lettre de M. Hermite à l'éditeur. Journal des mathématiques pures et appliquées, t. 60, 1861.

mittels elliptischer Funktionen, ohne daß es nötig wäre, eine Resolvente 6. Grades zu Hilfe zu nehmen.

§ 1. Die Transformation dritter Ordnung.

Zunächst soll die von Hermite mitgeteilte Formel für die Transformation 3. Ordnung abgeleitet werden.

Es sei gegeben die binäre biquadratische Form

$$(1) \quad f(y) = a_y^4 = b_y^4 = c_y^4 = d_y^4 = \dots$$

Auf sie werde die Substitution

$$(2) \quad y_1 = a_x^3 a_2, \quad y_2 = -a_x^3 a_1$$

angewendet; dann wird:

$$(3) \quad a_y^4 = (ab)(ac)(ad)(ae) b_x^3 c_x^3 d_x^3 e_x^3 = F(x).$$

Nach bekannten Identitäten ist hierin:

$$(4) \quad \begin{aligned} 2(ab)(ac) b_x c_x &= (ab)^2 c_x^2 + (ac)^2 b_x^2 - (bc)^2 a_x^2, \\ 2(ad)(ae) d_x e_x &= (ad)^2 e_x^2 + (ae)^2 d_x^2 - (de)^2 a_x^2, \end{aligned}$$

also wegen der Vertauschbarkeit der Symbole:

$$(5) \quad \begin{aligned} 4a_y^4 &= [2(ab)^2 c_x^2 - (bc)^2 a_x^2] [2(ad)^2 e_x^2 - (de)^2 c_x^2] b_x^2 c_x^2 d_x^2 e_x^2 \\ &= 4P_1 \cdot f^2 + H^2 \cdot f - 4P_2 f, \end{aligned}$$

wo H die Hessesche Form von f bezeichnet:

$$H = H_x^4 = H'^4_x = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$$

und f in Variabeln x geschrieben zu denken ist. Ferner hat man:

$$(6) \quad P_1 = (ab)^2 (ad)^2 b_x^2 d_x^2 = \frac{1}{2} i \cdot f = \frac{1}{2} (bc)^4 \cdot a_x^4$$

nach Gleichung (7), S. 136 in Clebschs Theorie der binären Formen. Ferner:

$$P_2 = (ab)^2 (de)^2 a_x^2 b_x^2 d_x^2 e_x^2 = H^2.$$

Es wird also:

$$(7) \quad 4F(x) = 2if^3 - 3H^2f.$$

Dieselbe Substitution (2) wenden wir auf die Hessesche Form H_y^4 an und erhalten durch Benutzung der zu (4) analogen Identitäten (bzw. durch Anwendung des δ -Prozesses):

$$4(Hb)(Hc)(Hd)(He)b_x^3c_x^3d_x^3e_x^3 = 4Q_1f^2 - 4HQ_2f + H^3,$$

wo

$$\begin{aligned} 4Q_1 &= 4(Hb)^2(Hd)^2b_x^2d_x^2 = [(Hb)^2d_x^2 + (Hd)^2b_x^2 - (bd)^2H_x^2]^2 \\ &= 2(Hb)^4d_x^4 + (bd)^4H_x^2 + 2(Hb)^2(Hd)^2b_x^2d_x^2 \\ &\quad - 4(bd)^2(Hb)^2d_x^2H_x^2. \end{aligned}$$

oder wenn $j = (Hd)^4 = (ab)^2(bd)^2(ad)^2$ eingeführt wird:

$$2Q_1 = 2jf + iH - 4(bd)^2(Hb)^2d_x^2H_x^2.$$

Nun ist bekanntlich (a. a. O. S. 135):

$$(8) \quad (bd)^2b_x^2d_y^2 = H_x^2H_y^2 + \frac{1}{3}i(xy)^2,$$

folglich:

$$(9) \quad (bd)^2(Hb)^2H_x^2d_x^2 = (HH')^2H_x^2H_x'^2 + \frac{1}{3}iH_x^4$$

und hierin (a. a. O. S. 139):

$$(10) \quad (HH')^2H_x^2H_x'^2 = -\frac{1}{6}iH + \frac{1}{3}jf,$$

also schließlich:

$$2Q_1 = \frac{1}{3}jf + \frac{1}{6}iH,$$

$$(11) \quad Q_2 = (Hd)^2H_x^2d_x^2 = \frac{1}{6}if$$

(vgl. Clebsch a. a. O. S. 136).

Somit wird, wenn f und H wieder für a_x^4 und H_x^4 stehen:

$$(12) \quad 4G(x) = 4H_y^4 = \frac{4}{3}jf^3 + H^3.$$

Aus (7) und (12) folgt die Hermitesche Gleichung:

$$(13) \quad 4\left(\frac{2}{3}jf - iG\right) = -H^2(2jf + iH) = 4\left(\frac{2}{3}ja_y^4 - iH_y^4\right).$$

Zur Anwendung auf das elliptische Differential benutzen wir die Relation:

$$(x, dx)(\varphi\psi)\varphi_x^2\psi_x^2 = \frac{1}{3}(\varphi d\psi - \psi d\varphi),$$

und ersetzen φ_x^3 durch $a_x^3 a_1 = y_2$, ψ_x^3 durch $-a_x^3 a_2 = -b_x^3 b_2$ $= y_1$, so daß:

$$(\varphi\psi)\varphi_x^2\psi_x^2 = -a_1 b_2 (ab) a_x^2 b_x^2 = -\frac{1}{2}H,$$

und

$$\frac{1}{2}(x, dx)H = (y, dy)$$

und, wenn man beiderseits mit dem Ausdrucke (13) dividiert:

$$(14) \quad \frac{(x, dx)}{\sqrt{2jf + iH}} = \frac{\sqrt{3}(y, dy)}{\sqrt{3iH(y) - 2jf(y)}}$$

wo f und H links in Variablen x , rechts in Variablen y geschrieben zu denken sind. Dies ist die von Hermite aufgestellte Gleichung, nach welcher das elliptische Differential der rechten Seite durch die in (2) gegebene rationale Transformation 3. Ordnung in das analoge Differential der linken Seite übergeführt wird.

2. Es handelt sich noch darum, die Moduln der beiden Differentiale durcheinander auszudrücken. Statt der Moduln betrachten wir die absoluten Invarianten. Die Invarianten $i_{\kappa\lambda}$ und $j_{\kappa\lambda}$ der Form $\kappa f + \lambda H$ sind bekanntlich (a. a. O. S. 141):

$$(15) \quad i_{\kappa\lambda} = i\kappa^2 + 2j\kappa\lambda + \frac{1}{6}i^2\lambda^2, \\ j_{\kappa\lambda} = j\kappa^3 + \frac{1}{2}i^2\kappa^2\lambda + \frac{1}{2}ij\kappa\lambda^2 + \left(\frac{1}{3}j^2 - \frac{1}{36}i^3\right)\lambda^3.$$

Die absoluten Invarianten seien mit Δ , Δ_1 , Δ_2 bezeichnet, also:

$$(16) \quad \Delta = \frac{i^3}{6j^2}, \quad \Delta_1 = \frac{I_1^3}{6J_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{I_2^3}{6J_2^2},$$

dann wird:

$$(17) \quad \Delta_1 = \Delta \frac{(8 + \Delta)^3}{(8 + 20\Delta - \Delta^2)^2}, \quad \Delta_2 = \Delta \frac{(-8 + 9\Delta)^3}{(8 - 36\Delta + 27\Delta^2)^2}.$$

In der Gleichung (13) ist die zur Transformation (2) benutzte Form f gegeben, und gesucht sind die beiden Formen des Büschels $\kappa f + \lambda H$, welche durch (2) ineinander übergeführt werden. In der Theorie der elliptischen Funktionen aber ist $f_1 = 2 j f + i H$ gegeben, und es sind f und f_2 gesucht. Nun ist allgemein (a. a. O. S. 139)

$$(18) \quad H_{\kappa\lambda} = \left(\kappa^2 - \frac{1}{6} i \lambda^2 \right) H + \frac{1}{3} \left(i \kappa \lambda + j \lambda^2 \right) f,$$

es wird also die Hessesche Form H_1 von f_1 :

$$H_1 = j i^2 f + \left(4 j^2 - \frac{1}{6} i^3 \right) H,$$

folglich:

$$f \left[j i^3 - 2 j \left(4 j^2 - \frac{1}{6} i^3 \right) \right] = i H_1 - \left(4 j^2 - \frac{1}{6} i^3 \right) f_1$$

oder, wenn man die Diskriminante $R = i^3 - 6 j^2$ einführt:

$$(19) \quad j R f = \frac{3}{4} i H_1 - \left(3 j^2 - \frac{1}{8} i^3 \right) f_1.$$

Hierin sind noch i, j, R durch I_1, J_1 auszudrücken, was mittels der Gleichungen (16) geschehen kann. Zur Auflösung derselben berechnet man zunächst Δ mittels der Gleichung 4. Grades (17) aus dem gegebenen Δ_1 , und dann i und j^2 aus den beiden ersten Gleichungen (16), nämlich

$$(20) \quad I_1 = i j^2 (8 + \Delta), \quad J_1 = j^4 (8 + 20 \Delta - \Delta^2).$$

Die Invarianten I_2, J_2 der transformierten Form werden:

$$(21) \quad I_2 = i j^2 (9 \Delta - 8), \quad J_2 = j^4 (8 - 36 \Delta + 27 \Delta^2)$$

und die Gleichung (19) geht über in:

$$(22) \quad 8 j^3 (\Delta - 1) f = i H_1 - (4 - \Delta) j^2 f_1.$$

Hiermit ist f bestimmt, wenn f_1 gegeben ist.

Man kann aber auch die Invarianten I_1 und J_1 der Form f_1 direkt aus (16) berechnen; eliminiert man nämlich j^2 aus den beiden Gleichungen (20), so ergibt sich:

$$(23) \quad \frac{1}{4} i^8 - 3 I_1 i^4 + 8 J_1 i^2 - I_1^4 = 0$$

eine Gleichung 4. Grades für i^2 , deren erste Invariante verschwindet. Hat man i^2 berechnet, so findet man j^2 aus der ersten Gleichung (16). Daß die erste Invariante der Gleichung (23) verschwindet, stimmt damit überein, daß auch bei Clebsch (a. a. O. S. 409) die Behandlung des Problems von einer Gleichung 4. Grades mit verschwindender erster Invariante abhängig gemacht wird.

§ 2. Eine besondere Transformation fünfter Ordnung.

Es möge jetzt eine Transformation 5. Ordnung untersucht werden, die sich ergibt, wenn man von der Polaren eines Punktes y in bezug auf die Kovariante 6. Ordnung T der biquadratischen Form $f = a_x^4$ ausgeht. Es sei also:

$$(1) \quad T_x^5 T_y = 0, \quad \text{wo } T_x^6 = (f, H)_1,$$

wenn $f = a_x^4 = b_x^4 = \dots$ und $H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2$ ist. Zur Abkürzung sei symbolisch

$$T_x^6 = \alpha_x^6 = \beta_x^6 = \gamma_x^6 = \dots$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} 4 a_y^4 &= 4 (a\alpha) (a\beta) (a\gamma) (a\delta) \alpha_x^5 \beta_x^5 \gamma_x^5 \delta_x^5 \\ &= [(a\alpha)^2 \beta_x^2 + (a\beta)^2 \alpha_x^2 - (\alpha\beta)^2 a_x^2] \\ &\quad [(\alpha\gamma)^2 \delta_x^2 + (a\delta)^2 \gamma_x^2 - (\gamma\delta)^2 a_x^2] \alpha_x^4 \beta_x^4 \gamma_x^4 \delta_x^4 \\ (2) \quad &= 4 P \cdot T^2 - 4 P_1 \cdot H_T \cdot T + f \cdot H_T^2, \end{aligned}$$

wo:

$$(3) \quad P = (a\alpha)^2 (a\gamma)^2 \alpha_x^4 \gamma_x^4, \quad P_1 = (a\alpha)^2 a_x^2 \alpha_x^4, \quad H_T = (\alpha\beta)^2 \alpha_x^4 \beta_x^4.$$

Die nochmalige Anwendung der soeben benutzten Identität ergibt

$$\begin{aligned}
 4P &= [(a\alpha)^2 \gamma_x^2 + (a\gamma)^2 \alpha_x^2 - (\alpha\gamma)^2 a_x^2]^2 \alpha_x^2 \gamma_x^2 \\
 &= [2(a\alpha)^2 \gamma_x^2 - (\alpha\gamma)^2 a_x^2]^2 \alpha_x^2 \gamma_x^2 \\
 (4) \quad &= 4(a\alpha)^4 \alpha_x^2 \gamma_x^6 - 4P_2 + (\alpha\gamma)^4 \alpha_x^2 \gamma_x^2 \cdot a_x^4.
 \end{aligned}$$

Nach Clebsch (a. a. O. S. 145 und S. 148) ist jede kovariante Bildung, die den symbolischen Faktor $(a\alpha)^4$ enthält, identisch gleich Null, und die vierte Überschiebung $(T, T)_4 = (\alpha\gamma)^4 \alpha_x^2 \gamma_x^2$ verschwindet; es folgt also

$$(5) \quad P = -P_2 = -(\alpha\gamma)^2 (a\alpha)^2 \alpha_x^2 \gamma_x^2 a_x^4.$$

Nach Gleichung (7) S. 144 (a. a. O.) verschwindet auch P_1 identisch. Werde also P_1 mit p_x^6 bezeichnet, so ist auch:

$$\begin{aligned}
 0 &= 6p_x^3 p_y = (a\alpha)^2 (2a_y a_x \alpha_x^4 + 4a_x^2 \alpha_x^3 \alpha_y) \\
 0 &= 30p_x^4 p_y^2 = (a\alpha)^2 (2a_y^2 \alpha_x^4 + 12a_x^2 \alpha_x^2 \alpha_y^2 + 16a_x a_y \alpha_x^3 \alpha_y),
 \end{aligned}$$

folglich auch nach (5):

$$\begin{aligned}
 (6) \quad 0 &= 15(p\gamma)^2 p_x^4 \gamma_x^4 = (a\alpha)^2 [(a\gamma)^2 \alpha_x^4 + 6a_x^2 (\alpha\gamma)^2 \alpha_x^2] \gamma_x^4 + 8P_3, \\
 &= -5P + 8P_3.
 \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
 2P_3 &= 2(a\alpha)^2 (a\gamma) (\alpha\gamma) a_x \alpha_x^3 \gamma_x^4 \\
 (7) \quad &= (a\alpha)^2 [(a\gamma)^2 \alpha_x^2 + (\alpha\gamma)^2 a_x^2 - (a\alpha)^2 \gamma_x^2] \alpha_x^2 \gamma_x^4 \\
 &= P + P_2 = 0,
 \end{aligned}$$

denn das dritte Glied der rechten Seite verschwindet wegen des Faktors $(a\alpha)^4$. Die Bildungen $P_1, P + P_2, P_3$ sind somit sämtlich gleich Null, und aus (3) ergibt sich:

$$(8) \quad 4a_y^4 = H_T^2 \cdot f = a_x^4 \cdot [(TT')^2 T_x^4 T_x'^4]^2.$$

Sei jetzt entsprechend der Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \alpha_x^5 \alpha_2, & y_2 &= -\alpha_x^5 \alpha_1, \\
 dy_1 &= 5\alpha_x^4 \alpha_{dx} \alpha_2, & dy_2 &= -5\alpha_x^4 \alpha_{dx} \alpha_1,
 \end{aligned}$$

so hat man:

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{array} \right| &= -5 \left| \begin{array}{cc} \alpha_x^5 \alpha_2 & \alpha_x^5 \alpha_1 \\ \beta_x^4 \beta_{dx} \beta_2 & \beta_x^4 \beta_{dx} \beta_1 \end{array} \right| = 5 \alpha_x^5 \beta_x^4 \beta_{dx} (\alpha \beta) \\
 &= 5 \alpha_x^4 \beta_x^4 \frac{1}{2} (\alpha \beta) (\alpha_x \beta_{dx} - \alpha_{dx} \beta_x) = \frac{5}{2} (\alpha \beta)^2 \alpha_x^4 \beta_x^4 (x dx) \\
 &= \frac{5}{2} H_T \cdot (x dx).
 \end{aligned}$$

Dividiert man beiderseits mit den Quadratwurzeln der beiden Seiten der Gleichung (8), so wird

$$(9) \quad \frac{5 H_T \cdot (x dx)}{\sqrt{H_T^2 a_x^4}} = \frac{(y dy)}{\sqrt{a_y^4}}.$$

Das ist aber die Gleichung für die Multiplikation mit 5 bei den zur Form a_x^4 gehörigen elliptischen Integralen. Es folgt hieraus, daß die Lösungen der Gleichung 5. Grades in x , nämlich $T_y T_x^5 = 0$, durch Integration der Gleichung (9) gewonnen werden müssen.

Hier aber bietet sich eine Schwierigkeit. Bezeichnet man das Verhältnis $y_1:y_2$ mit y und das Verhältnis $x_1:x_2$ mit x , so ist bekanntlich die zur Differentialgleichung (9) nach der Theorie der Multiplikation gehörige algebraische Gleichung von der Form

$$R_{25}(x) \cdot y - R_{25}^*(x) = 0$$

gegen unsere Gleichung $R_5(x) \cdot y - R_5^*(x) = 0$, wo R und R^* ganze rationale Funktionen vom Grade ihrer Indices bezeichnen. Alle Wurzeln der zweiten Gleichung müssen auch der ersten genügen. Die linke Seite der ersten müßte also durch die linke Seite der zweiten teilbar sein. Das ist aber unmöglich, denn der verbleibende Faktor der ersten Gleichung wäre dann von y unabhängig.

Diese Schwierigkeit löst sich, wenn in (8) bei Bildung von $\sqrt{a_y^4}$ der Ausdruck $\sqrt{H_T^2}$ durch $-H_T$ (statt bisher $+H_T$) ersetzt wird. Dann ergibt sich aus (9) durch Integration:

$$(10) \quad -5 \int \frac{(x dx)}{\sqrt{a_x^4}} = \int \frac{(y dy)}{\sqrt{a_y^4}}$$

Es sei ein Wert von x bekannt, der dieser Gleichung als obere Grenze des betreffenden Integrals genügt. Ändern wir den In-

tegrationsweg auf der zweiblättrigen Riemannschen Fläche für $y_1: y_2$ durch Umgehung einer der vier Verzweigungspunkte so ab, daß die neue obere Grenze genau unter oder über der früheren oberen Grenze im andern Blatte liegt, so entspricht dem in der Riemannschen Fläche für $x_1: x_2$ vermöge (10) ein Weg, dessen obere Grenze nicht mit der früheren oberen Grenze im andern Blatte übereinstimmt, vielmehr jetzt einen Wert hat, der durch eine zweite Wurzel der algebraischen Gleichung $T_y T_x^5 = 0$ bestimmt wird. Gleichzeitig hat sich das Vorzeichen der unter dem Integral stehenden Quadratwurzel geändert. Den vier Verzweigungspunkten entsprechen so die vier andern Wurzeln der Gleichung 5. Grades. Hiermit ist diese Gleichung vermöge (10) durch elliptische Funktionen gelöst.

§ 3. Die binäre Form fünfter Ordnung $T_y T_x^5$.

Die einfachsten Kovarianten und Invarianten einer Form a_x^5 seien im Anschluß an Clebschs Darstellung zunächst zusammengestellt:

1. Die Form 3. Ordnung $j = j_x^3 = -(ai)^2 a_x^3 = -(i, f)_2$,

2. Die quadratischen Formen

$$i = i_x^2 = (ab)^4 a_x b_x, \quad \tau = \tau_x^2 = (jj')^2 j'_x j'_x = \Delta_j$$

die Hessesche Form von j , und die Funktionaldeterminante von i und τ

$$\vartheta_x^2 = (i\tau) i_x \tau_x.$$

3. Die linearen Kovarianten

$$\alpha = \alpha_x = (i^2, f)_4 = -(ji)^2 j_x = (ia)^2 (i' a)^2 a_x,$$

$$\beta = \beta_x = (i^3, f)_5 = -(i\alpha) i_x,$$

$$\gamma = \gamma_x = (\tau\alpha) \tau_x, \quad \delta = (\vartheta\alpha) \vartheta_x.$$

4. Die Invarianten

$$A = (ii')^2, \quad B = (i\tau)^2, \quad C = (\tau\tau')^2,$$

auf die sich andere Invarianten zurückführen lassen:

$$M = (i\alpha)^2 = 2 AB - 3 C = (\beta\alpha),$$

$$N = (\tau\alpha)^2 = \frac{1}{2}(AC - B^2) = (\vartheta\vartheta')^2,$$

$$R = (\vartheta\alpha)^2, \quad R^2 = -\frac{1}{2}(AN^2 - 2 BMN + CM^2).$$

Für die Form $T_x^5 T_y$ ist zunächst

$$(1) \quad i_x^2 = (TT')^4 T_x T'_x T_y T'_y.$$

Die Identität $(TT')^4 (T_x T'_y - T_y T'_x)^2 = (xy)^2 (TT')^6$ ergibt:

$$(2) \quad 2 i = 2 (TT')^4 T_x^2 T_y'^2 - (xy)^2 (TT')^6.$$

Es soll sein

$$(2a) \quad (TT')^4 T_x^2 T_x'^2 = 0,$$

also durch Polarenbildung:

$$(TT')^4 T_x^2 T'_x T'_y = 0, \quad 2(TT')^4 T_x T_y T'_x T'_y + (TT')^4 T_x^2 T_y'^2 = 0$$

somit auch

$$(2b) \quad 4 i_x^2 = -2 (TT')^4 T_x^2 T_y'^2 = -2 i_x^2 - (xy)^2 (TT')^6.$$

Es wird demnach

$$(3) \quad 6 i_x^2 = -(xy)^2 (TT')^6.$$

Die quadratische Kovariante i hat also einen doppelten linearen Faktor, d. h. ihre Invariante ist Null:

$$(4) \quad A = (i i')^2 = 0.$$

Die mehrfach auftretende Invariante $(TT')^6$ sei mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet, es ist

$$\mathfrak{A} = (TT')^6 = \frac{1}{24}(i_f^3 - 6j_f^2),$$

wenn sich hier die Invarianten i und j auf die Form 4. Ordnung $f = a_x^4$ beziehen. Aus obiger Definition von j ergibt sich jetzt, da f durch $T_y T_x^5$ zu ersetzen ist, unter Benutzung von (3):

$$(5) \quad 6j_x^3 = \mathfrak{A} \cdot T_y^3 T_x^3$$

und hieraus:

$$(6) \quad 36 \tau_x^3 = \mathfrak{A}^2 \cdot \Delta_j = \mathfrak{A} (TT')^2 T_y^3 T_y'^3 T_x T_x'.$$

Die linearen Kovarianten werden:

$$(7) \quad \begin{aligned} 36 \alpha_x &= \mathfrak{A}^2 \cdot T_y^3 \cdot T_y^2 T_x = \mathfrak{A}^2 \cdot T_y^5 T_x, \\ 6^3 \beta_x &= 6^3 (i\alpha) i_x = 6 \mathfrak{A}^2 \cdot (iT) i_x T_y^5 = -\mathfrak{A}^3 \cdot (xy) \cdot T_y^6, \\ 6^3 \gamma_x &= 6^3 (\tau\alpha) \tau_x = \mathfrak{A}^5 \cdot (TT')^2 (TT'') T_y^3 T_y'^3 T_y''^5 T_x. \end{aligned}$$

Die Invarianten werden:

$$(8) \quad \begin{aligned} 6^3 \cdot B &= (i\tau)^2 = -\mathfrak{A}^3 (TT')^2 T_y^4 T_y'^4 = -\mathfrak{A}^3 \cdot H_T, \\ 6^3 \cdot M &= -3 \cdot 6^3 C = (\beta\alpha) = -\mathfrak{A}^5 [T_y^6]^2, \\ R &= (\mathfrak{A})^2, \text{ wenn } \mathfrak{A}_x^2 = (i\tau) i_x \tau_x. \end{aligned}$$

Eine allgemeine Form 5. Ordnung hat zwei absolute Invarianten, also drei voneinander unabhängige Invarianten, etwa A , B und C . In unserm Falle ist $A = 0$ und zwischen B und C besteht keine Relation. Die Form 5. Ordnung $T_y T_x^5$ enthält also neben dem Verhältnisse $y_1:y_2$ noch eine absolute Konstante. Für die aus α_x^5 zu bestimmende Polarenbildung der Form 6. Ordnung T_x^6 muß die vierte Überschiebung $(TT')^4 T_x^2 T_x^2$ bekanntlich identisch Null sein.¹

Hierauf kommen wir in § 4 zurück.

Vorstehende Formeln mögen an der bekannten kanonischen Form einer binären Form 4. Ordnung geprüft werden. Es sei²

$$T_x^6 = x_1^5 x_2 - x_2^5 x_1,$$

dann wird

$$\begin{aligned} 6 T_x^5 T_y &= x_1^5 y_2 + 5 (x_1^4 x_2 y_1 - x_2^4 x_1 y_2) - x_2^5 y_1, \\ i_x^2 &= -2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2, \end{aligned}$$

also

¹ Vgl. Clebsch, a. a. O. S. 442 und „Vorlesungen“, 2. Aufl., S. 630, und allgemein für Formen mit verschwindender vierter Überschiebung S. 662 ff. Die hohe Bedeutung solcher Formen für manche Fragen hatte Klein erkannt; vgl. dessen Werk „Über das Ikosaëder“.

² Zur Berechnung dieser Bildungen kann man die von de Bruno gegebenen ausgerechneten und nicht symbolischen Ausdrücke benutzen: *Théorie des formes binaires*, Turin 1876, auch in deutscher Übersetzung.

$$A = (i i')^2 = 0,$$

$$j_x^3 = 2 (x_1^3 y_1^2 y_2 + x_1^2 x_2 y_1^3 - x_1 x_2^2 y_2^3 - x_2^3 y_1 y_2^2),$$

$$= T_x^3 T_y^3, \text{ mal Zahlenfaktor,}$$

$$B = y_1^8 + y_2^8 + 14 y_1^4 y_2^4 = H_T \text{ für } x = y,$$

mal Zahlenfaktor.

§ 4. Bedingungen für die Form a_x^5 .

Es möge jetzt die umgekehrte Frage gestellt werden: Unter welchen Bedingungen kann eine Form a_x^5 als erste Polare $T_y T_x^5$ einer Form 6. Ordnung betrachtet werden, deren vierte Überschiebung über sich selbst verschwindet? Offenbar muß die Invariante A von a_x^5 gleich Null sein; dadurch wird die quadratische Kovariante i_x^2 ein vollständiges Quadrat, und mit dem Nullpunkte derselben muß der Pol y zusammenfallen. Letzterer ist zugleich Nullpunkt der linearen Kovariante β_x .

Um die vierte Überschiebung zu bilden, gehen wir von der kubischen Kovariante j aus, für die bekanntlich die Identität

$$(a_x^5, j)_3 = 0 \quad \text{oder} \quad (j a)^3 a_x^2 = 0$$

besteht.¹ Zfolge (6) § 3 ist dann:

$$(T a)^3 T_y^3 a_x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (T T')^3 T_x^3 T_y' T_y'^2 = 0.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung wird

$$= \frac{1}{2} (T T')^3 T_y T_y' (T_y^2 T_x'^2 - T_x^2 T_y'^2)$$

$$= \frac{1}{2} (T T')^4 T_y T_y' (T_y T_x' + T_x T_y') \cdot (y x).$$

Für alle Werte von x ist demnach:

$$(1) \quad (T T')^4 T_y^2 T_y' T_x' = 0$$

und folglich:

$$(T T')^4 T_y^2 T_y'^2 = 0.$$

¹ Vgl. Clebsch, Binäre Formen, S. 281.

Es ist also y ein Nullpunkt der vierten Überschiebung, die wir mit Ω_x^4 bezeichnen:

$$\Omega_x^4 = (TT')^4 T_x^2 T_y'^2,$$

und zwar ein doppelt zählender Nullpunkt, da nach (1):

$$(2) \quad \Omega_y^3 \Omega_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Omega_y^3 \Omega_2 = 0.$$

Ferner ist

$$(3) \quad 3 \Omega_x^2 \Omega_y^2 = 2 Q_1 + Q_2,$$

wo oben $Q_1 = (TT')^4 T_x T_y T_x' T_y' = i_x^2$ gefunden wurde, und nach

Clebsch¹ ist $Q_2 = (TT')^4 T_x^2 T_y'^2 = \Omega_x^2 \Omega_y^2 + \frac{1}{3} \mathfrak{A}(xy)^2$, und

zwar für beliebige Punkte x und y . Für i_x^2 hatten wir in (3) § 3 unter Voransetzung der Identität $\Omega_x^4 = 0$ die Relation (3) abgeleitet. Jetzt kommt es darauf an, diese Identität als Folge der Annahme $A = 0$ abzuleiten. Wird der durch die Gleichung $a_x^5 = T_y T_x^5$ eingeführte Punkt y als Nullpunkt der Form i_x^2 gewählt, so kann man (da $A = (ii')^2 = 0$ ist) setzen

$$(4) \quad i_x^2 = c \cdot (xy)^2,$$

wo c eine zu bestimmende Konstante ist. Bilden wir auf beiden Seiten von (4) die zweite Überschiebung mit a_x^5 , so folgt:

$$-j_x^3 = c \cdot a_y^2 a_x^3,$$

also für $x = y$

$$(5) \quad -j_y^3 = c \cdot a_y^5,$$

wodurch c bestimmt ist. Unter Benutzung der Gleichung (5) § 3 wird dies:

$$-\frac{1}{6} \mathfrak{A} T_y^6 = c \cdot T_y^6,$$

also nach (4)

$$(5) \quad i_x^2 = -\frac{1}{6} \mathfrak{A}(xy)^2$$

in Übereinstimmung mit (3) § 3, eine Gleichung, bei deren Ableitung damals die Gleichung $\Omega_x^4 = 0$ benutzt wurde. Führt man

¹ Binäre algebraische Formen, S. 295.

die Werte von Q_1 und Q_2 in vorstehende Gleichung (3) ein, so wird:

$$(6) \quad \Omega_x^2 \Omega_y^2 = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Der Punkt y ist demnach ein dreifach zählender Nullpunkt der Form Ω_x^4 , und man kann setzen

$$(6) \quad \Omega_x^4 = (xy)^3 (xz),$$

also durch Polarenbildung

$$\begin{aligned} 4 \Omega_x^3 \Omega_t &= 3 (xy)^2 (ty) (xz) + (xy)^3 (tz) \\ &= (xy)^3 (yz), \quad \text{wenn } t = y. \end{aligned}$$

Hierin ersetzen wir x_1 durch T_2 , x_2 durch $-T_1$ und multiplizieren beiderseits mit T_y^3 ; das gibt:

$$(7) \quad 4 (\Omega T)^3 \Omega_z T_y^3 = (yz) T_y^6.$$

Für eine Form 6. Ordnung a_x^6 und deren vierte Überschiebung i_x^4 besteht die Identität: $(a i)^3 a_x^3 i_x^4 = 0$.¹ Hier ist das Symbol a durch T , das Symbol i durch Ω zu ersetzen. Die linke Seite von (7) ist folglich identisch gleich Null; es muß also (yz) oder T_y^6 gleich Null sein. Im ersteren Falle wäre nach (6) Ω die vierte Potenz von (xy) , d. h. es müßte H_T (die Hessesche Determinante von T) identisch Null sein, und nach (8) § 2 wäre y ein Nullpunkt der gegebenen Form 4. Ordnung a_x^4 , was auszuschließen ist. Wenn andererseits $T_y^6 = 0$ wäre, so würde aus der Gleichung $a_x^5 = T_y T_x^5$ ebenfalls folgen, daß y ein Nullpunkt der gegebenen Form 5. Ordnung a_x^5 wäre, was auszuschließen ist. Es bleibt so nur die Möglichkeit, daß Ω_x^4 identisch gleich Null ist, wodurch die verschiedenen Ansätze über die Vielfachheit des Punktes y als Nullpunkt von Ω_x^4 ihre Bedeutung verlieren. So kommt man zu dem Schlusse:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Form a_x^5 erste Polare eines Poles y in bezug auf eine Form T_x^6 sei, deren vierte Überschiebung über sich selbst verschwindet, besteht darin, daß die

¹ Vgl. Clebsch, a. a. O. S. 284.

Invariante $A = (iz')^2$ gleich Null ist, und daß der Pol y zusammenfällt mit dem doppelt zählenden Nullpunkte der Kovariante i_x^2 .

§ 5. Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades.

Sollen auf Grund der Gleichung (8) § 2 die Nullpunkte einer Form p_x^5 gesucht werden, deren Invariante A von Null verschieden ist, so muß diese Form zunächst in eine Form a_x^5 mit verschwindender Invariante A transformiert werden. Dies geschieht durch eine quadratische Transformation, zu deren Durchführung nach Clebsch¹ nur Gleichungen dritten und vierten Grades (also algebraisch lösbare Gleichungen) zu benutzen sind.

Es sei jetzt mit a_x^5 diese transformierte Form bezeichnet. Es handelt sich darum, die zugehörige Form T zu bestimmen und weiter die Grundform 4. Ordnung im Differential des zu benutzen-
den elliptischen Integrales. Zunächst bestimmt man den doppelt zählenden Nullpunkt y der Gleichung $i_x^2 = 0$ (d. h. $(ab)^4 a_x b_x = 0$); sodann hat man zur Bestimmung von T die Gleichung

$$(1) \quad a_x^5 = T_y T_x^5,$$

die wegen (7) § 3 auch in der Form $a_x^5 = (T\beta) T_x^5$ geschrieben werden kann. Die Gleichung (1) gibt ein System von 6 linearen Gleichungen zur Berechnung der 7 Koeffizienten von T_x^5 , auf deren Verhältnisse es allein ankommt. Diese Koeffizienten hängen von den gegebenen Koeffizienten der Form a_x^5 ab und außerdem von dem Verhältnisse $y_1:y_2$, das ebenfalls durch die Koeffizienten von a_x^5 bestimmt ist. Die Gleichung $T_y T_x^5 = 0$ enthält also neben den gegebenen Koeffizienten von a_x^5 das Verhältnis $y_1:y_2$ als Parameter; da aber dieses Verhältnis selbst von jenen Koeffizienten abhängt, kann dieser Parameter nur als veränderlich behandelt werden, wenn sich die Koeffizienten ebenfalls ändern; dadurch entsteht eine Schwierigkeit bei unmittelbarer

¹ Vgl. §§ 6 und 7 in dem Aufsätze: Das Fünfseit und die Gleichung fünften Grades, Math. Annalen Bd. 4, 1871, sowie die entsprechende Darstellung in der 2. Auflage der „Vorlesungen“.

Anwendung der elliptischen Integrale in Gleichung (10) § 2, die sich indessen beseitigen läßt.

Um eine Beziehung zum elliptischen Integrale zu gewinnen, kommt es darauf an, bei gegebener Form T_x^6 eine Grundform $f = a_x^4$ anzugeben, zu der T als Kovariante 6. Ordnung gehört. Da letztere eine Kombinate des Büschels $\kappa f + \lambda H$ ist, so hat diese Aufgabe unendlich viele Lösungen. Man kann z. B. den einen Nullpunkt der gesuchten Form 4. Ordnung in einen beliebigen Punkt t legen; dann ist nach Clebsch¹:

$$(2) \quad a_x^4 \sqrt[3]{-2T(t)^2} = 4(xt) \cdot T_x^3 T_t^3,$$

so daß die anderen drei Nullpunkte von a_x^4 durch die Gleichung $T_t^3 T_x^3 = 0$ gegeben werden. Hier bedeutet T die Form, welche mittels der Gleichung (1) aus der gegebenen Form a_x^5 abgeleitet ist und deren Koeffizienten noch vom Pole y abhängen.

Auf die Form a_z^5 können wir jetzt die Transformation 5. Ordnung, die ein willkürliches Argument z durch x ausdrückt, nämlich

$$(3) \quad T_z T_x^5 = 0,$$

unter Benutzung der aus (1) berechneten Form T_x^6 anwenden und finden wie in (10) § 2

$$(4) \quad -5 \int \frac{(x dx)}{\sqrt{a_x^4}} = \int \frac{(z dz)}{\sqrt{a_z^4}},$$

wobei

$$a_z^4 = [H_T(x)]^2 \cdot a_x^4, \quad (z dz) = H_T \cdot (x dx).$$

Durch Umkehrung des links stehenden Integrals ist hiermit die durch (3) gegebene Gleichung 5. Grades gelöst. Die Wurzeln gehen auseinander durch Änderung des Integrationsweges hervor, wie früher erörtert wurde; sie hängen formal noch von dem willkürlichen Parameter t ab, der indessen in Gleichung (3) nicht vorkommt und deshalb auf das Resultat keinen Einfluß hat. In der Tat besteht die Gleichung

$$a_z^4 a_x^4 - a_x^4 a_z^4 = 0,$$

¹ Vgl. Binäre Formen S. 448.

wenn man mit α_x^4 die Bildung bezeichnet, welche aus α_x^4 entsteht, indem man den Punkt t durch einen beliebigen Punkt τ ersetzt, denn nach § 2 ist $\alpha_z^4 = H_T^2 \cdot \alpha_x^4$ und gleichzeitig $\alpha_z^4 = H_T^2 \cdot \alpha_x^4$.

Die Willkürlichkeit des Punktes t ist indessen noch einer Beschränkung unterworfen. Die in § 2 durchgeführte Anwendung der Transformation $T_y T_x^5 = 0$ auf die biquadratische Form a_y^4 setzte voraus, daß die Form T durch die Form a_y^4 vollständig bestimmt ist. Das wäre nicht der Fall, wenn a_y^4 das Quadrat einer quadratischen Form wäre, denn dann zerfallen die 6 Nullpunkte von T_x^6 in drei quadratische Formen, deren eine auch in a_x^4 enthalten ist, während von den beiden andern noch ein Nullpunkt willkürlich gewählt werden kann. Setzt man z. B. bei der kanonischen Form am Schluß von § 3 $y_1 = 0$, so wird $T_y^3 T_x^3 = -x_1 x_2^2 y_2^3$; der eine Nullpunkt von a_x^4 ist also der Punkt $x_1 = 0$ und die anderen drei sind $x_1 x_2^2 = 0$, während die anderen 4 Nullpunkte von T_x^6 , nämlich $x_1^4 - x_2^4$, auch durch $x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 = 0$ und $x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 = 0$ ersetzt werden können, wenn nur $x^2 + \lambda^2 = 0$ ist.

Ebenso darf der Punkt t in (2) nicht in einen Nullpunkt der (jetzt aus (1) bekannten) Form T_x^6 gelegt werden, wenn auf a_z^4 die Transformation (3) anwendbar sein soll. Die Gleichung (4) kann wegen (2) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(5) \quad -5 \int \frac{(x dx)}{V(xt) \cdot T_x^3 T_t^3} = \int \frac{(z dz)}{V(zt) \cdot T_z^3 T_t^3}$$

Dadurch ist die Gleichung (4) mittels des Umkehrproblems der elliptischen Integrale gelöst, nicht aber die gegebene Gleichung $a_x^5 = 0$.

Läßt man jetzt den Punkt z allmählich an den Punkt y (Nullpunkt von β) heranrücken, so geht die Gleichung (4) allmählich in die zu lösende Gleichung

$$(6) \quad a_x^5 = 0 \text{ oder } T_y T_x^5 = 0$$

über. Um die Wurzeln dieser Gleichung zu erhalten, braucht man daher nur die obere Grenze des in (4) oder in (5) rechts stehenden

Integrals durch y zu ersetzen. Die Wurzeln x der Gleichung (6) werden daher aus der Gleichung

$$(7) \quad -5 \int \frac{(x dx)}{\sqrt{(x t) T_x^3 T_t^3}} = \int \frac{(z dz)}{\sqrt{(z t) T_z^3 T_t^3}}$$

durch Umkehrung des links stehenden Integrals gewonnen. Wie die fünf Wurzeln auseinander durch Änderung des Integrationsweges hervorgehen, wurde in § 2 erörtert. Als untere Grenze der beiden Integrale kann man irgend zwei zusammengehörige Punkte der Gleichung $T_y T_x^5 = 0$ wählen, z. B. $x = x_0$ beliebig annehmen und dazu den aus dieser Gleichung folgenden Wert $y = y_0$.

Läßt man auf der rechten Seite von (5) den Integrationsweg willkürlich, so treten Vielfache der Perioden des elliptischen Integrals hinzu; es würden dann jeder Wurzel der Gleichung (6) 25 verschiedene Lösungen der Gleichung (5) entsprechen. Dies wird vermieden, wenn man von der einen bekannten Lösung $x = x_0, y = y_0$, die für die unteren Grenzen der Integrale (7) benutzt wurde, ausgeht und dann von hier aus den Integrationsweg für die Variable z so abändert, wie es in § 2 erörtert wurde.

Ersetzt man in Gleichung (5) rechts die obere Grenze des Integrals durch y , so darf man dabei nicht die Integrationsvariable z unter dem Integralzeichen durch y ersetzen, denn die Koeffizienten der Form T hängen noch von y ab. Die betreffenden aus (1) folgenden Gleichungen seien hier der Vollständigkeit wegen noch angeführt. Bezeichnet man mit $a_0, a_1, \dots$ die Koeffizienten von a_x^5 und mit $T_0, T_1, \dots$ diejenigen von T_x^6 , so wird

$$\begin{aligned} a_0 &= y_1 T_0 + y_2 T_1, \quad a_1 = y_1 T_1 + y_2 T_2, \quad a_2 = y_1 T_2 + y_2 T_3, \dots \\ &\dots a_5 = y_1 T_5 + y_2 T_6. \end{aligned}$$