

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1939. Heft I und II

Sitzungen Januar–Juli

München 1939

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Die rechnerische Durchführung der Ortung insbesondere bei sonnengeorteten Luftaufnahmen.

Von Sebastian Finsterwalder in München.

Mit 4 Abbildungen.

Vorgetragen in der Sitzung vom 25. Februar 1939.

1. Einleitung.

Angesichts der großen Erfolge, welche die tastende Lösung der Ortungsaufgabe bei Verwendung von Wiederherstellungsgeschäften wie Planigraphen und Multiplexapparaten aufzuweisen hat, scheint die rechnerische Durchführung der Ortung fürs erste überholt zu sein. Sie ist es sicher nicht in dem Sinne, daß sie schon abgeschlossen wäre und nur für die Anwendung sich als untunlich erwiesen hätte. Wenn wir den allgemeinsten Fall der Ortung ins Auge fassen, bei dem das Gelände beliebige Höhenunterschiede aufweist, die einen beträchtlichen Teil der Flughöhe ausmachen und der Höhenunterschied der beiden Aufnahmepunkte beliebig groß sein darf, so stellt sich heraus, daß die rechnerische Behandlung der Ortung bis vor kurzem noch auf jenem Stand war, den ich ihr vor nunmehr bald vierzig Jahren gegeben hatte,¹ als ich zum ersten Male die Grundlage

¹ S. Finsterwalder: Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abhandlungen der K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Kl. XXII Bd. II. Alt. 1903 S. 225–60. S. Finsterwalder: Auswertung weitwinkliger Luftaufnahmen. Sitz.-Berichte der Bayer. Akad. d. Wiss. 1930. S. 183–207. Hier wurde der Sonderfall eines flachen Geländes behandelt. S. Finsterwalder: Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie. Sitz.-Berichte der Bayer. Akad. d. Wiss. 1932. S. 115–131. Hier wurde vorausgesetzt, daß die Verbindungslinie der Luftstandpunkte nahezu waagrecht verläuft. Die Lösung verlangt die Auflösung von fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten. S. Finsterwalder: Die praktische Verwertung von astronomisch georteten Luftaufnahmen. Bildmessung und Luftbildwesen 1938 Heft 3. Hier wird die Grundaufgabe ohne Einschränkung gelöst und auf die Berechnung eines Gleichungssystems von nur drei Unbekannten zurückgeführt. Die Einführung München Ak. Sb. 1939, I 6

für eine Höhenkarte aus Luftaufnahmen berechnete. Es liegen aber auch innere zwingende Gründe vor, die eine rechnerische Lösung der Ortung erfordern. Die tastende Lösung ist an eine Genauigkeitsgrenze gebunden, die in der Richtigkeit der Zeichnung der Aufnahmelinse gegeben ist. Man kann sie mittels des Porro-Koppe'schen Verfahrens durch Betrachtung und Ausmessung des Bildes durch eine der Aufnahmelinse ähnliche Linse hinausschieben, muß aber dann das Wiederherstellungsgerät mit einer Fülle von Betrachtungslinsen ausstatten. Es ist bekanntlich sehr schwer, beim Bau einer Aufnahmelinse Weitwinkligkeit, Helligkeit und Deutlichkeit des Bildes mit seiner Richtigkeit zu vereinigen; jede dieser Eigenschaften leidet unter der Rücksichtnahme auf die übrigen. Man kann nun um der Bildschärfe willen die Richtigkeit der Zeichnung aufgeben und die aus der Ausmessung des scharfen Bildes erhaltenen Zahlen um die gesetzmäßige Abweichung von der Bildrichtigkeit verbessern, ist aber dann genötigt, die Ortung auf Grund der verbesserten Maßzahlen rechnerisch durchzuführen. Das gleiche läßt sich erreichen, wenn man das unrichtige Bild durch ein unmittelbar daraufgesetztes Vorsatzglas im Strahlengang senkrecht zur Bildebene ausmißt, wobei das (asphärisch) geschliffene Vorsatzglas die Verzeichnung der Aufnahmelinse aufhebt. Schon die Notwendigkeit, die Wirkung der Wiederherstellungsgeräte rechnerisch zu prüfen und ihre Unvollkommenheiten aufzuspüren, spricht für eine rechnerische Behandlung der Ortungsaufgabe.

Ganz unentbehrlich wird diese jedoch, wenn man die Bildmeßkunst aus dem Bereich der Feldmessung herausziehen und

rung der Sonnenortung habe ich bereits 1916 vorgeschlagen. Festrede gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Bayer. Akad. d. Wiss. am 15. Nov. 1916. München 1917 S. 21. Sie ist inzwischen in Italien durch den Major Ermenegildo Santoni im militärgeographischen Institut zu Florenz angewendet und zu hoher Vollkommenheit entwickelt worden, wie aus einer ausführlichen Mitteilung Santonis an den internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Rom hervorgeht. Il nuovo Periscopio Solare Santoni per la Triangolazione aerea e l'organizzazione delle prese coloniali. Eine weitere Mitteilung an den genannten Kongreß machte der Ing. Dr. C. Trombetti: Preparazione dei punti a terra per la Triangolazione aerea col metodo Santoni e risultati conseguiti con questo metodo. V. Congresso internazionale di Fotogrammetria. Anno 1939 XVI.

für Aufgaben der Erdmessung einsetzen will, wofür sie aus mancherlei Gründen, die ich schon früher dargelegt habe, wohlgeeignet ist. Für diesen Einsatz habe ich in den letzten Jahren mancherlei Vorarbeit geleistet, so die rechnerische Behandlung der gemeinsamen Ortung einer Mehrzahl von Flugaufnahmen des gleichen Geländes,¹ sowie die Einbeziehung von Sonnenbildern in die Ortungsaufgabe.² In der vorliegenden Arbeit will ich diese Untersuchungen von neuem aufnehmen und bis zur Durchrechnung eines Zahlenbeispiels treiben, das Aufschluß über die Anwendbarkeit der bisher nur in Formeln der Pfeilrechnung (Vektoranalysis) vorliegenden Rechenanweisungen gibt. Ich beschränke mich dabei aber auf den einfachsten Fall der Ortung, bei dem nur zwei Flugaufnahmen des gleichen Geländes ins Spiel kommen.

2. Stellortung und Standortung.

Es empfiehlt sich, die Ortung in zwei Teile oder Stufen zu zerlegen, die wir als Stellortung und als Standortung unterscheiden wollen. In die Stellortung gehen nur Richtungen von Zielstrahlen und Standlinien ein, während sich die Standortung mit der gegenseitigen Lage der Standpunkte und den Längen der Standlinien befaßt. Denken wir uns zunächst die volle Ortung vollzogen, das heißt die zu den einzelnen Aufnahmen gehörigen Zielstrahlenbündel wieder in die Lage gebracht, die sie bei der Aufnahme selber hatten, wobei also die Mittelpunkte der Zielstrahlenbündel in den jeweiligen Aufnahmepunkten liegen und die Zielstrahlen durch die abgebildeten Geländepunkte hindurchgehen. Dabei werden zwei zum gleichen Geländepunkt gehörige

¹ Bildmessung und Luftbildwesen 1937 Heft 4.

² Grundsätzliches zur astronomischen Ortung von Flugaufnahmen. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1937 S. 183 und: Weiteres zur astronomischen Ortung von Flugaufnahmen. Ebenda 1938 S. 19. Der wesentliche Unterschied gegenüber den Arbeiten E. Santonis und meinen eigenen besteht darin, daß E. Santoni die Ortung gegen das Lot mit nichtastronomischen Mitteln voraussetzt und die Sonne nur zur Azimutbestimmung heranzieht, während ich die gesamte Ortung aus den Sonnenaufnahmen entwickle und dabei allerdings Aufnahmen bei verschiedenen Sonnenständen voraussetze.

Zielstrahlen mit den zugehörigen Aufnahmepunkten in einer Ebene liegen, die auch die Verbindungslinie der Aufnahmepunkte enthält. Wird nun das aus Stand- und Zielpunkten bestehende Raumgebilde im Maßstab so verkleinert, daß es auf einen Punkt zusammenschrumpft während die Ziel- und Standlinienrichtungen gleichlaufend mit ihrer anfänglichen Lage bleiben, so enthält das so verkleinerte Gebilde noch alles was zum Bereich der Stellortung gehört, wobei es selber in ein Strahlenbündel ausgeartet ist. Die Standlinien des ursprünglichen Raumgebildes gehen dabei in die ihnen gleichlaufenden Kernstrahlenrichtungen über. Je zwei zusammengehörige auf den gleichen Zielpunkt des ursprünglichen Raumgebildes bezogene Zielstrahlen liegen auch in dem ausgearteten Strahlenbündel noch in einer Ebene (Kernebene) die auch den zu den Standpunkten gehörigen Kernstrahl enthält. Dieses Kennzeichen vollzogener Ortung bleibt also in der Stellortung erhalten und bildet die Grundlage für die Herstellung der Ortung aus den in beliebiger Lage befindlichen Zielstrahlenbündel der Aufnahmen. Ist die Stellortung hergestellt, so besteht die darauffolgende Standortung in dem parallelen Auseinanderücken der in der Stellortung vereinigten Mittelpunkte der Zielstrahlenbündel, wobei gleichzeitig die Zielstrahlenschnittpunkte in die ursprünglichen Zielpunkte übergehen, wenn die Mittelpunkte der Zielstrahlenbündel die Lage der Aufnahmepunkte erreicht haben.

3. Die gnomonische Kugelabbildung.

Der Vorteil der Trennung von Stell- und Standortung wirkt sich dahin aus, daß erstere aus einer Raumaufgabe, die sie von Haus aus ist, zu einer Aufgabe der Kugelgeometrie wird, wobei die gnomonische Kugelabbildung eingeführt wird. Man schlägt um den Mittelpunkt der Stellortung eine Kugel vom Halbmesser „Eins“ und bildet die Strahlen durch ihre Schnittpunkte mit dieser Kugel ab, wobei einem Strahl zwei Gegenpunkte der Bildkugel entsprechen. Die Bildpunkte von Strahlen, die in einer Ebene liegen, befinden sich auf der Kugel auf einem Großkreis und das vorhin erwähnte Kennzeichen der vollzogenen Stellortung drückt sich in der Kugelabbildung dahin aus, daß die

Bilder zusammengehöriger Zielstrahlen mit den Bildern der zu den Aufnahmepunkten gehörigen Kernstrahlen, die nunmehr Kernpunkte heißen sollen auf einem Großkreise liegen. Alle Großkreise der Bildkugel, welche Kernebenen durch zwei bestimmte Aufnahmepunkte entsprechen, schneiden sich in den (gegenüberliegenden) Bildern der Kernpunkte, die aus der Abbildung der Standlinie durch jene Aufnahmepunkte hervorgegangen sind. Die Kugelabbildung, welche bislang nur für Richtungen erklärt ist, läßt sich auf beliebige Raumgebilde erweitern. Ein Haufen von n -Raumpunkten wird durch die $n(n-1)/2$ Bildpunktpaare der Richtungen der Verbindungslinien zweier Raumpunkte abgebildet, wobei die Bildpunkte der Richtungen 12 und 21 unterschieden werden müssen und zu entgegengesetzten Bildpunkten des Paares führen. Der Zweipunkthaufen wird durch die Enden eines Kugeldurchmessers abgebildet, die nach den Richtungen 12 und 21 zu bezeichnen sind, je nachdem der Halbmesser nach dem Bildpunkt der Richtung 12 oder 21 gleichlaufend ist, wobei die Halbmesser der Kugel vom Mittelpunkt aus durchlaufend gedacht werden. Wird der Dreipunkthaufen in den Richtungen 12, 23, 31 durchlaufen, so wird er auf der Kugel durch drei Punktpaare abgebildet, die auf einem Großkreis parallel der Ebene des Punkthaufens liegen müssen. Dem Vierpunkthaufen entspricht im Kugelbild ein Satz von sechs Gegenpunktpaaren, die zu je dreien auf einem Großkreis liegen, dessen Ebene der Ebene der drei Punkte parallel ist. Die Abbildung besteht aus den sechs Ecken eines Kugelvierseits, dessen Seiten den vier Ebenen des Vierpunkthaufens entsprechen. Ganz ähnlich ist es beim n -Punkthaufen. Sein Kugelbild besteht aus $n(n-1)/2$ Gegenpunktpaaren, die die Ecken eines $n(n-1)(n-2)/6$ Kugel- n -seits sind.

4. Die Wiederherstellung eines Raumgebildes aus seiner Kugelabbildung.

Zu dieser sind einige wichtige Bemerkungen über die Abbildung voranzuschicken. Das Kugelbild besteht aus zwei Gruppen von Punkten, die sich an den Enden von Durchmessern gegenüberliegen. Die beiden Gruppen sind gegengleich (sym-

metrisch), aber nicht deckungsgleich (kongruent). Die Punkte der einen Gruppe sind nicht beliebig wählbar, da sie sonst nicht die Abbildung eines Raumpunkthaufens darstellen würden. Die Bedingungen, die sie erfüllen müssen, gehen aus den Eigenschaften der Verbindungsrichtungen zwischen den Punkten eines Haufens hervor. So kann man zum Beispiel von den sechs Bildpunkten eines Vierpunkthaufens drei beliebig annehmen, die den Richtungen von einem Raumpunkt nach den drei übrigen entsprechen. Die restlichen drei Bildpunkte müssen auf einem Großkreis liegen, dessen Ebene der jener drei übrigen Punkte parallel ist. Dieser Großkreis kann auf der Kugel auch noch willkürlich angenommen werden, aber dann sind die drei fehlenden Bildpunkte des Haufens bestimmt, und zwar als Schnittpunkte des angenommenen Großkreises mit jenen, die durch je zwei der frei gewählten Bildpunkte hindurchgehen. Sind die notwendigen Bedingungen erfüllt, so kann man an die Wiederherstellung des Raumpunkthaufens aus seinem Kugelbild herangehen. Zuvor muß man noch eine passende Bezeichnung der Bildpunkte auf der Kugel einführen, durch welche die Punkte einer Gruppe von der ihrer Gegenpunkte getrennt werden. Da die Bildpunkte Richtungen im Raum darstellen, wird man zu ihrer Bezeichnung je zwei Buchstaben benützen, die für den Gegenpunkt vertauscht sind. Drei Bildpunkte auf einem Großkreis werden dabei mit drei Doppelbuchstaben wie ab , bc , ca versehen, während zu ihren Gegenpunkten ba , cb , ac gehören. Nun kann mit dem Aufbau des Raumpunkthaufens begonnen werden, wobei von vorneherein feststeht, daß der Maßstab des Punkthaufens und seine Parallelverschiebung im Raum unbestimmt bleiben. Man geht von einem beliebigen Punkt a aus, zieht durch ihn den zum Halbmesser von ab parallelen Halbstrahl. Auf ihm wählt man beliebig den Punkt b und zieht durch ihn den zum Halbmesser von bc parallelen Halbstrahl, auf dem der Punkt c so liegt, daß ca dem Kugelhalbmesser von ca parallel ist. So fährt man fort, bis alle Kugelbildpunkte erschöpft sind. Würde man den Aufbau mit der Gruppe der Gegenpunkte ausführen, so käme man auf einen Raumpunkthaufen, der dem ersten gegengleich ist. Ohne daß vorher ein solcher Aufbau des Raumpunkthaufens erfolgt ist, kann aus dem Kugelbild der Winkel

von irgend zwei Verbindungslinien des Punkthaufens entnommen werden. Wird ein Raumpunkthaufen gedreht, so dreht sich sein Kugelbild im gleichen Maße und umgekehrt. Wird ein Kugelhafen einer reellen Kollineation unterworfen, so ändert sich seine Kugelabbildung durch die gleiche Kollineation, wobei die Kugel in ein Ellipsoid übergeht. Aus dem geänderten Kugelbild geht durch das gleiche Aufbauverfahren wieder der kollinear veränderte Punkthaufe hervor.

Wird die Wiederherstellung des Raumgebildes aus der Kugelabbildung auf die Kugelabbildung des Haufens der Aufnahmestandpunkte angewandt, so hat man die Standortung aus der Stellortung gewonnen. Der Übergang von der Stellortung zur Standortung deckt sich also, geometrisch ausgedrückt, vollkommen mit der Lösung der Aufgabe, vom gnomonischen Kugelbild eines Punkthaufens auf diesen selbst zu schließen.

5. Anwendung der gnomonischen Kugelabbildung auf die Ortungsaufgabe.

Bei dieser Anwendung denken wir uns die Bildkugel mehrfach überdeckt je nach der Zahl der Aufnahmen, die in die jeweilige Ortungsaufgabe eingehen, also doppelt überdeckt mit Bildern, wenn wir zwei Aufnahmen zusammen orten. Auf jeder Überdeckung werden die Bilder einer Aufnahme gezeichnet und dann die beiden Bilder so gegeneinander verschoben, bis die Ortungsbedingungen erfüllt sind. Für eine wirksame rechnerische Ortung muß immer vorausgesetzt werden, daß eine angenäherte Ortung bereits vorliegt, so daß die rechnerisch zu erfassenden Veränderungen, die die genäherte Ortung in eine genaue überführen, nur klein sind und durch lineare Gleichungen genügend genau ausgedrückt werden können. Das Verfahren zur Herstellung einer genäherten Ortung hängt ganz von dem aufgenommenen Gelände und den Umständen der Aufnahme ab. Bei flachem Gelände und großer Flughöhe bietet die Nadirtriangulation ein wirksames Mittel dazu, besonders wenn es sich um angenäherte Senkrechtaufnahmen handelt. Beobachtung oder Abbildung einer mit der Kammer fest verbundenen Dosenlibelle im Augenblick der Aufnahme oder gleichzeitige Bilder des Horizontes

in zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen sind zur Verschärfung sehr geeignet. Wenn die Voraussetzungen für eine Nadirtriangulation nicht gegeben wird, kann mittels des Multiplexgerätes oder einem feineren Wiederherstellungsgerät eine genäherte Ortung gefunden werden. Dabei sind häufig Drehungen der einen Aufnahme gegen die andere, denen Drehungen der gnomonischen Bilder dieser Aufnahmen entsprechen, nötig, welche auch das Ausmaß überschreiten, das für die Anwendung linearer Gleichungen zulässig ist. Es ergibt sich also ein Bedürfnis für strengere Drehungsformeln. Das Zusammensuchen entsprechender Punktpaare unter Verwendung des Raumbildeindrucks muß der Ausmessung der Koordinaten der Bildpunkte vorausgehen. In die Rechnung führt man zweckmäßig nicht die unmittelbar gemessenen Koordinaten der Bildpunkte ein, sondern die Richtungskosinus der Zielstrahlen, die zugleich die drei Anteile der Einheitspfeile (Pfeile von der Länge „eins“) in der Zielrichtung sind. Ist a der Zielpunkt im Gelände, so werde Einheitspfeil in der Zielrichtung mit $\alpha = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ bezeichnet, wobei a_1 a_2 a_3 die Richtungskosinus der Zielrichtung und $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$ die Einheitspfeile in den Koordinatenrichtungen bedeuten. Sie hängen mit den Bildkoordinaten x y und der Bildweite f der Aufnahmekammer folgendermaßen zusammen:

$$a_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} \quad a_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}} \quad a_3 = \frac{-f}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}.$$

Dabei ist die Z -richtung positiv nach oben angenommen; das Minuszeichen bei a_3 zeigt an, daß die Aufnahme nach unten zu erfolgt ist. Den Bildpunkten einer Aufnahme entspricht nun ein Bündel von Zielstrahlen, oder Einheitspfeilen, das einer gemeinsamen Drehung zu unterwerfen ist, um zur Stellortung zu gelangen. Zur Berechnung des gedrehten Bündels führen wir den Einheitsdrehpfeil $\mathbf{u}$ in der Richtung der Drehachse und den Drehwinkel q ein (Abb. 1). Der Endpunkt A des zu drehenden Einheitspfeiles OA bewegt sich bei der Drehung nach $\bar{A}$ auf einem Kreis vom Halbmesser $\sin(MOA)$. Der Halbmesser MA dieses Kreises und zwar gegen den Mittelpunkt M zu gerichtet, wird durch den Pfeil $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \alpha)$ dargestellt, der dazu senkrechte Halbmesser MB durch den Pfeil $\mathbf{u} \times \alpha$, der vom Kreismittel-

punkt M weg zeigt. Die Anteile des um den Winkel q gegen MA gedrehten Halbmessers $M\bar{A}$ sind: $M\bar{A} \sin q$ und $M\bar{A} \cos q$, die als Pfeile betrachtet, durch $u \times a \sin q$ und $-u \times (u \times a) \cos q$ zu bezeichnen sind.

Daher setzt sich die als Pfeil aufgefaßte Veränderung $\Delta \bar{a}$ des Pfeiles a infolge der Drehung um die Achse u und den Drehwinkel q folgendermaßen zusammen:

$$\Delta \bar{a} = \sin q \, u \times a + (1 - \cos q) \, u \times (u \times a).$$

Für kleine Drehwinkel q fällt der zweite Teil der Summe fort und im ersten Teil kann $\sin q$ durch q ersetzt werden, das man mit u

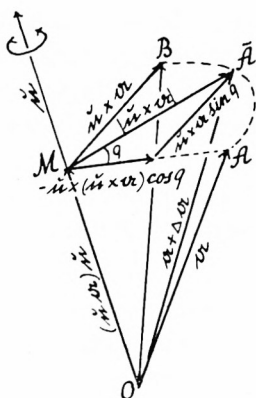


Abb. 1.

zu dem kleinen Drehpfeil du zusammenzieht, dessen Richtung die Drehachse und dessen Länge den Drehwinkel (in Bogenmaß) angibt. Für ganz kleine Drehwinkel gilt alsdann für die Veränderung da durch die Drehung $da = du \times a$. Zur Abschätzung der bei Anwendung dieser Formel auf endliche kleine Drehungen begangenen Vernachlässigung dient die Formel

$$\Delta \bar{a} = \Delta u \times a + \frac{1}{2} \Delta u \times (\Delta u \times a),$$

die bis auf Glieder 3. O. in Δu genau ist.

Die Lösung der Ortungsaufgabe, soweit sie die Stellortung betrifft, vollzieht sich nun in zwei Stufen. Auf der ersten Stufe wird das Zielstrahlenbündel der ersten Aufnahme und damit

auch sein Kugelbild festgehalten und das der zweiten Aufnahme so gegen das festgehaltene erste gedreht, daß die Ortungsbedingungen erfüllt sind. Die Ortungsbedingungen können sowohl aus der Forderung des Schneidens entsprechender Zielstrahlen nach der erfolgten Standortung wie auch aus den astronomischen Verhältnissen der mit aufgenommenen Sonnenbilder hervorgehen. Bei der zweiten Stufe der Stellortung werden die so vorbereiteten Zielstrahlenbündel gemeinsam gedreht, bis sie die bei der Aufnahme selbst innegehabte Stellung im Raum wieder einnehmen. Mit dieser Drehung geht natürlich auch eine gemeinsame Drehung der Kugelbilder einher, die ich als „Aufrichtung“ bezeichnen will. Diese Aufrichtung ist nur auf astronomischer Grundlage möglich und fällt bei Aufnahmen ohne Sonnenortung weg. Sie erfolgt zunächst in bezug auf das astronomische, durch Erdachse und Widderpunkt gegebene System, kann aber auf das durch die Lotrichtung in einem Aufnahmepunkt und die Himmelsrichtungen daselbst bestimmte übergeführt werden, sobald und insoweit die geographischen Koordinaten (Länge und Breite) des Aufnahmepunktes bekannt sind.

6. Ortungsbedingungen, die aus dem Zusammenschluß entspringen.

Wir betrachten drei Paare von Zielstrahlenbündeln, $a \ b \ c$ von der ersten und $a' \ b' \ c'$ von der zweiten Aufnahme herrührend, wobei sich a und a' , b und b' , c und c' auf den gleichen Zielpunkt beziehen. Ihre Kugelbilder in der vorausgesetzten genäherten Ortung werden mit den gleichen Buchstaben bezeichnet (Abb. 2). Die entsprechende Punkte verbindenden Großkreise schneiden sich annähernd in einem Punkt der Bildkugel, d. h. sie bilden dort ein kleines Dreieck. Durch eine kleine Drehung, deren Pfeil δu sein soll, werden $a' \ b' \ c'$ in eine neue Lage $\bar{a}' \ \bar{b}' \ \bar{c}'$ auf der Kugel übergeführt, so daß sich die verbindenden Großkreise $a \ \bar{a}' \ b \ \bar{b}' \ c \ \bar{c}'$ nun wirklich in einem Punkt schneiden, also das „fehlerzeigende“ Dreieck verschwindet. Die Ebenen dieser Großkreise müssen dann ein Büschel bilden und die Pole dieser Großkreise in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegen. Die Richtungen nach den Polen sind durch die Produkte $a \times \bar{a}'$, $b \times \bar{b}'$,

$\mathbf{c} \times \bar{\mathbf{c}}'$ gegeben. Das Verschwinden des dreifachen Produktes $(\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{a}}', \mathbf{b} \times \bar{\mathbf{b}}', \mathbf{c} \times \bar{\mathbf{c}}')$ ist die Bedingung dafür. Nun ist:

$$\bar{\mathbf{a}}' = \mathbf{a}' + d\mathbf{u} \times \mathbf{a}', \quad \bar{\mathbf{b}}' = \mathbf{b}' + d\mathbf{u} \times \mathbf{b}', \quad \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c}' + d\mathbf{u} \times \mathbf{c}'$$

und: $\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{a}}' = \mathbf{a} \times \mathbf{a}' + \mathbf{a} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{a}'),$

$$\mathbf{b} \times \bar{\mathbf{b}}' = \mathbf{b} \times \mathbf{b}' + \mathbf{b} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{b}'),$$

$$\mathbf{c} \times \bar{\mathbf{c}}' = \mathbf{c} \times \mathbf{c}' + \mathbf{c} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{c}').$$

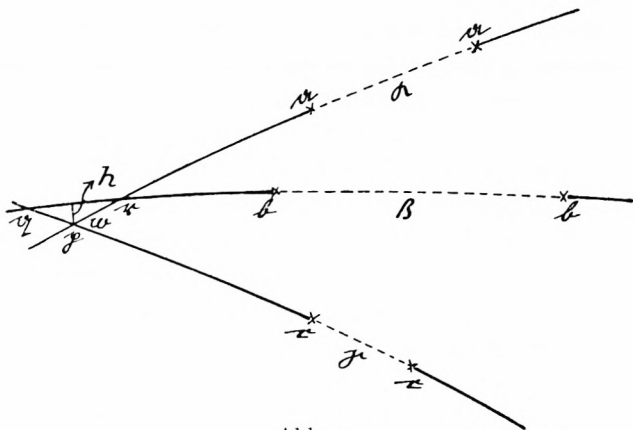


Abb. 2.

Mit Anwendung der Abkürzungen $\mathfrak{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{a}'$, $\mathfrak{B} = \mathbf{b} \times \mathbf{b}'$, $\mathfrak{C} = \mathbf{c} \times \mathbf{c}'$ wird dann die Zusammenschlußbedingung:

$$(\mathfrak{A} + \mathbf{a} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{a}')), \mathfrak{B} + \mathbf{b} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{b}'), \mathfrak{C} + \mathbf{c} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{c}')) = 0,$$

die sich unter Berücksichtigung der Kleinheit der $d\mathbf{u}$ enthaltenden Anteile in nachstehender Form schreiben läßt:

$$(\mathbf{a} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{a}')) \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} + (\mathbf{b} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{b}')) \cdot \mathfrak{C} \times \mathfrak{A} + (\mathbf{c} \times (d\mathbf{u} \times \mathbf{c}')) \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} + (\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) = 0.$$

Mittels der Pfeilformel: $(\mathfrak{P} \times (\mathfrak{Q} \times \mathfrak{R})) \cdot \mathfrak{S} = ((\mathfrak{S} \times \mathfrak{P}) \times \mathfrak{Q}) \cdot \mathfrak{R} = (\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{R}) (\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{S}) - (\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q}) (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{S})$ kann der Faktor $d\mathbf{u}$ herausgezogen werden, und die Bedingung nimmt die Form an:

$$d\mathbf{u} \cdot \{ \mathbf{a} \times ((\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \times \mathbf{a}') + \mathbf{b} \times ((\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) \times \mathbf{b}') + \mathbf{c} \times ((\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathbf{c}') \} + (\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) = 0.$$

Sie ist eine lineare Gleichung für die drei Anteile von

$$d\mathbf{u} = du_1 \mathbf{i} + du_2 \mathbf{j} + du_3 \mathbf{k}.$$

Zur Bestimmung der drei Größen muß man also drei solcher voneinander unabhängiger Bedingungsgleichungen ansetzen, wozu mindestens fünf Paare von zusammengehörigen Zielstrahlpfeilen erforderlich sind. Bei vier Paaren erhält man nur zwei Gleichungen für die drei Unbekannten du_1 du_2 du_3 .

Es soll nun die geometrische Bedeutung des dreifachen Produkts $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ untersucht werden, dessen Verschwinden die Erfüllung der Zusammenschlußbedingung ausdrückt. Die Pfeile $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ haben als Längen die Sinus der Winkel α β γ , welche zwei zusammengehörige Zielstrahlen miteinander einschließen. Werden diese vor das Produkt gesetzt, so wird

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (p \ q \ r),$$

wo $p \ q \ r$ Einheitspfeile sind. Das dreifache Produkt $(p \ q \ r)$ von Einheitspfeilen stellt im Kugeldreieck der Pfeilenden das gemeinsame Produkt von dem Sinus einer Dreiecksseite mit dem Sinus der zugehörigen Höhe dar. Bei der vorausgesetzten genäherten Stellortung ist jenes Kugeldreieck ein solches mit großen Seiten und kleinen Winkeln, also ein nahezu in eine Ebene plattgedrücktes. Das zugehörige Polardreieck ist dann ein solches mit kleinen Seiten und großen Winkeln, das sich nahezu auf einen Punkt zusammenzieht. Dieses Polardreieck ist aber nichts anderes als das „fehlerzeigende“ Dreieck, das beim unvollkommenen Schnitt der drei Großkreise durch $a a'$, $b b'$ und $c c'$ auftritt. Denn die Ebenen dieser Großkreise stehen senkrecht zu den Einheitspfeilen $p \ q \ r$, die die Richtungen von $a \times a'$, $b \times b'$ und $c \times c'$ angeben. Da die Seiten sinus des Dreiecks $p \ q \ r$ den Winkelsinus des Polardreiecks („fehlerzeigenden“ Dreiecks) gleich sind und ebenso die Höhen von Dreieck und Polardreieck einander entsprechen, so drückt sich auch das Produkt $(p \ q \ r)$ durch den gemeinsamen Wert jedes der Produkte Sinus eines Winkels mal dem Sinus der zugehörigen Höhe des „fehlerzeigenden“ Dreiecks aus. Demnach wird:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \omega \sin h,$$

wo ω und h Winkel und Höhe in der gleichen Ecke des „fehlerzeigenden“ Dreiecks bedeuten.

Das dreifache Produkt ($\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$) gibt ein recht vernünftiges Maß für den Grad der Erfüllung der Zusammenschlußbedingung ab. Die Faktoren $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ bemessen die Sicherheit der Lage der verbindenden Großkreise durch zusammengehörige Bildpunkte, die mit ihrer Entfernung bis zum Höchstmaß „Eins“ bei 90° Entfernung zunimmt. Der Sinus von ω kennzeichnet die Sicherheit der Lage des Eckpunktes, in dem sich die Großkreise unter dem Winkel ω schneiden und $\sin h$ ist der wegen seiner Kleinheit gleich h zu setzende Abstand jenes Eckpunktes des „fehlerzeigenden“ Dreiecks von der gegenüberliegenden Seite, der die Ausmaße des Dreiecks bestimmt. Wenn man demnach einen Überfluß von Zusammenschlußgleichungen zu erfüllen hat, was bei mehr als fünf Paaren von Zielstrahlen eintritt, so ist eine Ausgleichung nach dem Grundsatz angezeigt, daß die drei Anteile des gesuchten Drehpfeiles so gewählt werden, daß die Reste der nullseinsollenden ($\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$) möglichst klein werden.

7. Ortungsbedingung aus den Sonnenbildern.

Wir denken uns die Sonnenbilder, die von einer mit der Geländebildkammer starr verbundener Sonderkammer aufgenommen werden, auf das Geländebild so übertragen, wie es der Schnitt der Verbindungslinie Aufnahmeort Sonnenmittelpunkt mit der Bildebene verlangt. Aus den Bildkoordinaten wird der Einheitspfeil ($\mathfrak{s}$ für die erste, $\mathfrak{s}'$ für die zweite Aufnahme) der Sonnenrichtung gerechnet und dem Zielstrahlenbündel der betreffenden Aufnahme zugeteilt. Der Kosinus des Winkels zwischen beiden Sonnenrichtungen auf Grund der vorläufigen Ortung beider Zielstrahlenbündel ist dann gleich $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}'$. Wird das zweite Zielstrahlenbündel und damit auch der Einheitspfeil der zweiten Sonnenrichtung um den Drehpfeil $d\mathfrak{u}$ gedreht, so geht diese in $\mathfrak{s}' + d\mathfrak{u} \times \mathfrak{s}'$ und bildet mit der ersten Sonnenrichtung $\mathfrak{s}$ einen Winkel, dessen Kosinus

$$\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}' + \mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{u} \times \mathfrak{s}' = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}' + d\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$$

ist. Wird er gleich dem astronomisch ermittelten Winkel s gesetzt, so hat man folgende einfache Sonnenortungsbedingung:

$$\cos s = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}' + d\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}.$$

Der Winkel s beider Sonnenrichtungen wird aus den Aufnahmezeiten t und t' , die auf Weltzeit umgerechnet sind, folgendermaßen bestimmt. Es seien α δ und α' δ' die Koordinaten der Sonnenörter zu den Zeiten t und t' , so ergibt sich die Entfernung s aus einem Kugeldreieck $S S' \text{ Pol}$, das von den Stundenkreisen der Sonne gebildet wird (Abb. 3). Auf den Stundenkreisen sind die Polabstände $90^\circ - \delta$ und $90^\circ - \delta'$ der Sonnenörter. Der Winkel Θ beider Stundenkreise setzt sich aus der Zwischenzeit $t' - t$, die zwischen den Aufnahmen verflossen ist und aus dem Rektaszensionsunterschied $\alpha' - \alpha$ der beiden Sonnenörter zusammen: $\Theta = (t' - t) - (\alpha' - \alpha)$. Dabei muß der Zeitunterschied von mitt-

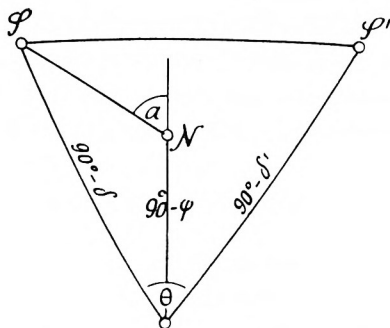


Abb. 3. In Abb. 3 sind die Sonnenbilder S und S' , der Nadir N und der Himmelspol auf die positiv gedachte Bildebene der ersten Luftaufnahme übertragen.

lerer Zeit, in der er beobachtet wurde, in Sternzeit umgerechnet werden. Der Winkel Θ ist dann von Zeitmaß in Winkelmaß umzurechnen. Aus dem Dreieck $S S' \text{ Pol}$ berechnet sich die Seite $S S'$ zu:

$$\cos s = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos \Theta.$$

Bei zwei zusammengeorteten Aufnahmen ergibt sich nur eine Ortungsbedingung mittels der Sonnenbilder; die zwei noch fehlenden müssen aus dem Zusammenschluß entsprechender Zielstrahlen gewonnen werden, wofür die Bilder von vier Geländepunkten nötig sind. Stehen die Koordinaten von mehr Geländepunkten zur Verfügung, so liegt es nahe, die astronomische Bedingung streng zu erfüllen und unter den überschüssigen Zu-

sammenschlußbedingungen nach dem Grundsatz am Schlusse des letzten Absatzes zu vermitteln. Genaue Zeitbestimmung der Aufnahmen ist dafür Voraussetzung. Mittels des so erhaltenen Drehpfeiles α wird nun das Zielstrahlenbündel der zweiten Aufnahme gedreht und es befindet sich dann in solcher Stellung gegenüber dem der ersten Aufnahme, daß sich nach geschehener Standortung entsprechende Zielstrahlen beider Büschel möglichst schneiden.

8. Die Aufrichtung des gnomonischen Kugelbildes.

Wenn über die Lage der Aufnahmepunkte über der Erde nichts weiter bekannt ist, so ist damit die Stellortung der Aufnahmen erschöpft. In der Regel wird man aber die geographische Lage eines der Standpunkte mit einiger Annäherung kennen, und dann kann das gegenseitig geortete Kugelbild beider Aufnahmen noch so gedreht werden, daß es nach dem Lote in diesem Standpunkte und nach den Himmelsrichtungen in ihm geortet ist. Zu diesem Zweck ergänzen wir das in Abb. 3 dargestellte Himmelsbild durch Einfügung des Nadirs N jenes Standpunktes. Die auf der Kugel gemessene Entfernung NP ist durch $90^\circ - \varphi$ gegeben, wobei φ die geographische Breite des Aufnahmestandpunktes bedeutet. Außerdem braucht man noch den Stundenwinkel NPS am Pol. Dieser wird über die wahre Ortszeit der Aufnahme gerechnet. Die mittlere Ortszeit ist gleich Weltzeit $-\lambda$, wobei λ die geographische Länge bedeutet, die für Orte westlich von Greenwich negatives Vorzeichen hat. Die wahre Sonnenzeit wird aus der mittleren durch Hinzufügung der Zeitgleichung gefunden. Der Stundenwinkel NPS der Sonne ist der Unterschied der wahren Sonnenzeit gegen 12^h . Man überführt ihn von Stundenmaß in Winkelmaß. Aus dem Kugeldreieck NPS , in dem nun die zwei Seiten $NP = 90^\circ - \varphi$ und $PS = 90^\circ - \delta$ sowie der eingeschlossene Winkel bekannt sind, läßt sich nun der Nadirabstand NS der Sonne im Zeitpunkt der ersten Aufnahme und in Verbindung mit dem bereits bekannten Kugeldreieck SPS' auch der auf den Nadir der ersten Aufnahme bezogene Nadirabstand NS' der Sonne im Zeitpunkt der zweiten Aufnahme berechnen. Wäre das

gegenseitig geortete Kugelbild der beiden Aufnahmen bereits richtig gegenüber dem Lot und den Himmelsrichtungen im ersten Standpunkt geortet, so müßten die Einheitspfeile der geodätischen Sonnenrichtungen, wie sie sich aus dem Kugelbild ergeben, mit den astronomisch ermittelten auf Lot und Himmelsrichtungen bezogenen zusammenfallen. Wegen der vorausgesetzten genäherten Ortung der Kugelbilder trifft das nur annähernd¹ zu, kann aber durch eine kleine durch den Drehpfeil $d\omega$ gekennzeichnete Drehung des Kugelbildes erreicht werden. $\mathfrak{s}$ ist der geodätische Einheitspfeil in der ersten Sonnenrichtung $\bar{\mathfrak{s}}' = \mathfrak{s}' + d\mathfrak{u} \times \mathfrak{s}'$ jener in der zweiten vor der gemeinsamen Drehung. $\mathfrak{s} + d\omega \times \mathfrak{s}$ und $\bar{\mathfrak{s}}' + d\omega \times \bar{\mathfrak{s}}'$ sind sie es nach derselben. Sind $\mathfrak{s}_a$ und $\mathfrak{s}'_a$ die astronomischen Sonnenrichtungen, so ergeben sich für den aufrichtenden Drehpfeil $d\omega$ die Pfeilgleichungen: $d\omega \times \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_a - \mathfrak{s}$ und $d\omega \times \bar{\mathfrak{s}}' = \mathfrak{s}'_a - \bar{\mathfrak{s}}'$, denen sechs Gleichungen für die drei Anteile von $d\omega$ entsprechen, die aber wegen der vorausgegangenen Gleichsetzung des geodätischen und astronomischen Richtungsunterschiedes nicht unabhängig voneinander sind. Man rechnet aus dreien von ihnen, die sich aber nicht alle auf die gleiche Sonnenrichtung beziehen dürfen, die Anteile von $d\omega$. Dann dreht man das Zielstrahlenbündel der ersten Aufnahme um $d\omega$ und das der zweiten um $d\mathfrak{v} = d\mathfrak{u} + d\omega$ und hat damit ihre Aufrichtung erreicht.

9. Die Herstellung des Geländemodelles aus der Stellortung.

Wenn die Stellortung (mit oder ohne Aufrichtung des Kugelbildes) vollzogen ist, so beginnt die Herstellung des Geländemodelles mit der Aufsuchung der Standlinienrichtung. Aus den georteten Zielstrahlenbündeln werden die Pfeile $\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \times \bar{\mathfrak{a}}'$ $\mathfrak{B} = \mathfrak{b} \times \bar{\mathfrak{b}}'$ usw. und aus ihnen die weiteren wie $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ gerechnet. Jeder solcher Pfeil hat die Richtung der Standlinie

¹ In bezug auf die Himmelsrichtungen können auch beliebig große Abweichungen vorkommen, die dann durch Drehung um das genäherte Lot auf ein kleines Ausmaß zurückgeführt werden muß. Das Ausmaß der Drehung ist dem Sonnenazimut zu entnehmen, das aus dem Kugeldreieck NPS berechnet werden kann. Erst dann können die sechs Gleichungen für den Drehpfeil $d\omega$ angesetzt werden.

zwischen den beiden Aufnahmepunkten. Das Gleichlaufen der Pfeile $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ usw. ist ebenso sehr ein Kennzeichen der gelungenen Stellortung wie das Verschwinden der dreifachen Produkte wie $(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C})$ usw. Wird nun einer dieser Pfeile durch Beifügung eines Zahlenfaktors auf die wahre Länge der Standlinie gebracht, oder, wenn diese noch unbekannt ist, auf die Länge „Eins“, so möge er mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet werden, wobei noch vorausgesetzt wird, daß er vom ersten Standpunkt O gegen den zweiten O' zielt. Es sei a ein angezielter Geländepunkt; die Einheitspfeile in den Zielrichtungen Oa und $O'a$ sind aus der Stellortung bekannt, es fehlen nur die Entfernungen $Oa = A$ und $O'a = A'$. Für ihre Berechnung bedient man sich der Pfeilgleichung: $\mathfrak{K} + A'a' - Aa = o$, welche den Schluß des Dreiecks $O O'a$ ausdrückt und den drei Gleichungen zwischen den Anteilen der Pfeile gleichwertig ist.

$$K_1 + A'a'_1 - Aa_1 = o$$

$$K_2 + A'a'_2 - Aa_2 = o$$

$$K_3 + A'a'_3 - Aa_3 = o.$$

Aus zweien von ihnen etwa der ersten und der dritten berechnen sich dann wie folgt:

$$A = \frac{a'_1 K_3 - a'_3 K_1}{a'_1 a_3 - a'_3 a_1} \quad A' = \frac{a_1 K_3 - a_3 K_1}{a'_1 a_3 - a'_3 a_1},$$

woraus die auf den Ursprung O bezogenen Koordinaten von a werden:

$$x = Aa_1 \quad y = Aa_2 \quad z = Aa_3.$$

Die auf O' als Ursprung bezogenen Koordinaten des gleichen Geländepunktes a werden:

$$x' = A'a'_1 \quad y' = A'a'_2 \quad z' = A'a'_3.$$

Die Unterschiede beider Koordinaten müssen die Anteile $K_1 K_2 K_3$ von $\mathfrak{K}$ ergeben, was eine gute Rechenprobe ist. Im Falle, daß die Stellortung aus einer Ausgleichung hervorgegangen ist, werden die von O und O' aus bestimmten Koordinaten nach Berücksichtigung der Anteile von $\mathfrak{K}$ noch etwas verschieden sein und dann empfiehlt es sich, alle drei Gleichungen für A und A'

zu ihrer Bestimmung heranzuziehen und sie nach der Methode der kl. Quadr. auszugleichen, was zu den Formeln führt:

$$A = \frac{\alpha \cdot (\mathfrak{R} - (\alpha' \cdot \mathfrak{R}) \alpha')}{1 - (\alpha \cdot \alpha')^2} \quad A' = \frac{\alpha' \cdot ((\alpha \cdot \mathfrak{R}) \alpha - \mathfrak{R})}{1 - (\alpha \cdot \alpha')^2}.$$

Die mit diesen Werten gerechneten Punktkoordinaten von α entsprechen den Endpunkten des kürzesten Abstandes der beiden sich kreuzenden Zielstrahlen.

10. Rechenbeispiel zur Sonnenortung, Zusammenschlußgleichungen.

Um die Art und den Umfang der mit der Sonnenortung von zwei Luftaufnahmen verbundenen Rechnungen darzulegen, gebe ich im folgenden ein erdichtetes Beispiel, da wirkliche sonnengeortete Aufnahmen wegen Mangel entsprechender Aufnahmegeräte nicht zu beschaffen sind. Die Vorausberechnung eines solchen Beispiels ist naturgemäß weit umständlicher als die rechnerische Wiederherstellung des angenommenen Geländes aus seinen Bildern. Ich habe das Beispiel so gewählt, daß Höhenunterschiede des Geländes bis zu ein Drittel der Flughöhe ausmachen, um die Gültigkeit der Formeln auch bei großen Höhenunterschieden zu zeigen (Abb. 4). Die Bildweite der Aufnahmekammer ist mit $f=100,00$ mm angenommen worden. Die Bildkoordinaten sind in Millimetern gegeben. Die Sonnenbilder sind so berechnet, wie sie bei Umkehrung der Lichtrichtung in der Aufnahmekammer entstehen würden. Es sind die Koordinaten von fünf Geländepunkten angegeben, obwohl bei der Sonnenortung die von viere ausreichen, damit das Beispiel auch für die einfache Ortung durch Zusammenschluß ohne Sonnenbilder brauchbar ist. Die Aufnahmen sind annähernd senkrecht nach unten gedacht, die Y -achsen der Bilder zeigen annähernd nach Norden, was sich am Schluß der Rechnung dahin auswirkt, daß eine im allgemeinen Fall endliche gemeinsame Drehung um die Aufnahmerichtung durch eine kleine Drehung ersetzt wird. Die erste Aufnahme fand am 1. Juli 1938 um $10^h 0^m 0^s$ Weltzeit unter $\varphi = 45^\circ$ $\lambda = 0^\circ$ statt, die zweite Aufnahme am 2. Juli 1938 um $14^h 0^m 0^s$; die erste also vormittags, die zweite nachmittags.

In der folgenden Tafel 1 sind die Koordinaten der Bildpunkte beider Aufnahmen sowie die daraus gerechneten Richtungskosinus der Zielrichtungen bezogen auf das System der Aufnahmekammer angegeben. Die Richtungskosinus sind gleichzeitig die Anteile der Einheitspfeile in den Zielrichtungen. Für die folgenden Rechnungen ist die Rechenmaschine und nicht

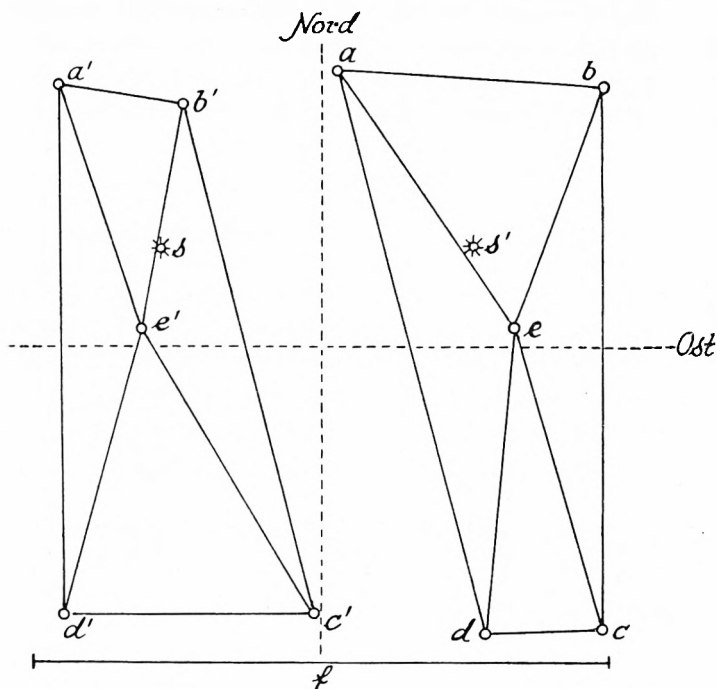


Abb. 4. Die beiden Aufnahmen mit ihren Achsen zur Deckung gebracht.

die Logarithmentafel das gegebene Werkzeug; nur bei der Berechnung der Richtungskosinus wird man sich zweckmäßig einer Quadrattafel bedienen, um das Wurzelziehen zu vermeiden. Ich selbst habe allerdings die Rechnung mit 5stelligen Logarithmen geführt, da mir eine Rechenmaschine gerade nicht zur Verfügung stand; beim Nachrechnen mit der Maschine werden sich also kleine Unterschiede ergeben können. In Abb. 4 ist die Lage der Bildpunkte übersichtlich wiedergegeben und zwar wie sie sich im Bildabdruck (Positiv) zeigt.

Tafel 1.

Erste Aufnahme.

Bildkoordinaten			Richtungskosinus		
<i>a</i>	2,297	47,736	<i>a</i>	0,02073	0,43071 — 0,90228
<i>b</i>	48,818	45,358	<i>b</i>	0,40625	0,37743 — 0,83217
<i>c</i>	48,355	— 48,650	<i>c</i>	0,39876	— 0,40119 — 0,82465
<i>d</i>	28,392	— 49,764	<i>d</i>	0,24636	— 0,43180 — 0,86768
<i>e</i>	33,009	3,463	<i>e</i>	0,31329	0,03287 — 0,94907
<i>s</i>	— 56,837	33,882	<i>s</i>	— 0,47400	0,28258 — 0,83396

Zweite Aufnahme.

Bildkoordinaten			Richtungskosinus		
<i>a'</i>	— 45,109	45,228	<i>a'</i>	— 0,38015	0,38145 — 0,84275
<i>b'</i>	— 24,444	42,153	<i>b'</i>	— 0,21974	0,37894 — 0,89896
<i>c'</i>	— 0,900	— 46,420	<i>c'</i>	— 0,00816	— 0,42103 — 0,90700
<i>d'</i>	— 44,290	— 46,354	<i>d'</i>	— 0,37285	— 0,39022 — 0,84183
<i>e'</i>	— 31,038	3,161	<i>e'</i>	— 0,29628	0,03017 — 0,95461
<i>s'</i>	53,048	34,715	<i>s'</i>	0,44794	0,29333 — 0,84459

Die Rechnung beginnt mit der Auswertung der vier Pfeile $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D}$, wobei $\mathfrak{A} = \alpha \times \alpha'$. Man ordnet die untereinanderstehenden Anteile von α und α' um in:

	a_1	a_2	a_3	
α	0,02073	0,43071	— 0,90228	
α'	— 0,38015	0,38115	— 0,84275	
	a_1	a_2'	a_3'	
$a_2 a_3'$	—	$a_2' a_3$	$a_3 a_1$	—
0,43017	0,38115	— 0,90218	— 0,84275	0,02073
— 0,84275	— 0,90228	— 0,38015	0,02073	0,38115
— 0,36196	— 0,34599	0,34567	0,01742	0,00795
+ 0,34599		0,01742		0,16501
$\mathfrak{A}$	— 0,01597	0,36309		0,17296
α'	— 0,38105	0,38115		— 0,84275
Probe: $\mathfrak{A} \cdot \alpha'$	0,00612	0,13924		— 0,14535
				Summe: 0,00001

Sodann bildet man die Produkte der untereinanderstehenden Zahlen und zieht sie voneinander ab. Damit erhält man bereits die Anteile des Pfeiles $\mathfrak{A}$. Zu der sehr notwendigen Sicherung dieser Rechnung bildet man hierauf

$$\mathfrak{A} \cdot \alpha = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3$$

oder auch $\mathfrak{A} \cdot \alpha'$, was sich zu Null ergeben muß. In Tafel 2 sind die Rechenergebnisse zusammengestellt.

Tafel 2.

$\mathfrak{A}$	— 0,019060	0,36309	0,17164
$\mathfrak{B}$	— 0,023973	0,54807	0,23689
$\mathfrak{C}$	0,016675	0,36841	— 0,17117
$\mathfrak{D}$	0,024916	0,53091	— 0,25713

Nun wählen wir zweimal je drei Pfeile, z. B. $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D}$ aus und leiten aus ihnen je eine Zusammenschlußbedingung ab. Dazu ist zunächst die Berechnung der Produkte $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D} \times \mathfrak{B}$ nötig. Die Rechnung für $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ erfolgt wieder im Anschluß auf die Umordnung der in Tafel 2 untereinanderstehenden Anteile von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$A_2 B_3 - B_2 A_3$		$A_3 B_1 - B_3 A_1$		$A_1 B_2 - B_1 A_2$	
0,36309	0,54807	0,17164	0,23689	— 0,019060	— 0,023973
0,23689	0,17164	— 0,023973	— 0,019060	0,54807	0,36309
0,085394	0,094070	— 0,0041146	— 0,0045151	— 0,0104462	— 0,0086418
— 0,094070		0,0045151		0,0086418	
$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$	— 0,008676	0,0004005		— 0,0018044	
$\mathfrak{A}$	— 0,019060	0,36309		0,17164	
Probe:					
$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$	0,00016536	+ 0,00014437		— 0,00030971	
					Summe: 0,00000002

In der folgenden Tafel 3 sind nun die Produkte zusammengestellt:

Tafel 3.

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$	— 0,008676	0,0004005	— 0,0018044
$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$	— 0,181086	— 0,0001532	— 0,0179710
$\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$	0,124934	0,0004003	0,0130328
$\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$	— 0,003854	0,0000229	— 0,0003262
$\mathfrak{D} \times \mathfrak{B}$	0,266694	0,0002618	0,0263834.

Nun werden die dreifachen Produkte $(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D})$ wie folgt gerechnet:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = 0,008676 \quad 0,0004005 \quad -0,0018044$$

$$\mathfrak{C} \quad 0,016675 \quad 0,36841 \quad -0,17117$$

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} = 0,00014467 + 0,00014755 + 0,00030886 = 0,00031194$$

Auf demselben Wege findet man das Produkt

$$(\mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D}) = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D} = 0,0000275.$$

Die Werte dieser Produkte sind die konstanten Glieder in den beiden Gleichungen für die drei unbekannten Drehpfeilanteile, durch die das Zielstrahlenbündel der zweiten Aufnahme gegenüber dem der ersten geortet wird. Die Beiwerte der Drehpfeilanteile berechnen sich aus den vierfachen Produkten wie $(a \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})) \times a'$.

$$a \quad 0,02073 \quad 0,43071 \quad -0,90228$$

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \quad -0,181086 \quad -0,0001532 \quad -0,0179710$$

$$a' \quad -0,38015 \quad 0,38145 \quad -0,84275$$

$$a \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \quad -0,0078784 \quad 0,1637645 \quad 0,0779928$$

$$(a \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})) \times a' \quad -0,167742 \quad -0,0362853 \quad 0,0592528$$

Das Ergebnis ähnlicher Rechnungen ist in Tafel 4 zusammengestellt:

Tafel 4.

$(a \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})) \times a'$	$-0,167742$	$-0,036285$	$0,059253$
$(b \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A})) \times b'$	$0,116031$	$0,015048$	$-0,022019$
$(c \times (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})) \times c'$	$-0,008540$	$0,000983$	$-0,000380$
	$-0,060251$	$-0,020254$	$0,036854$
$(d \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})) \times d'$	$-0,166530$	$0,035604$	$0,057260$
$(b \times (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D})) \times b'$	$-0,003557$	$-0,000415$	$0,000694$
$(c \times (\mathfrak{D} \times \mathfrak{B})) \times c'$	$0,254108$	$-0,010279$	$0,002485$
	$0,084021$	$0,024910$	$0,060438$

Durch Vereinigung der Anteile von je drei vierfachen Produkten erhält man die Beiwerte der drei gesuchten Drehpfeilanteile in den beiden Zusammenschlußgleichungen. Letztere lauten:

$$-0,060251 du_1 - 0,020254 du_2 + 0,036854 du_3 + 0,0003119 = 0,$$

$$0,084021 du_1 + 0,024910 du_2 + 0,060438 du_3 + 0,0000275 = 0.$$

11. Die Sonnenortungsgleichung und die Aufrichtung.

Die aus der Sonnenortung hervorgehende Gleichung für die drei Anteile des Drehpfeiles ist viel einfacher aufzustellen. Sie sagt aus, daß nach der Drehung des Zielstrahlenbündels der zweiten Aufnahme die mitgedrehte Sonnenrichtung mit der unveränderten Sonnenrichtung der ersten Aufnahme den aus den Aufnahmezeiten zu berechnenden Winkel der beiden astronomischen Sonnenrichtungen einschließt. Zu den Aufnahmezeiten sind die Koordinaten des Sonnenmittelpunktes:

am 1. Juli 38 10^h 0^m 0^s $\alpha = 6^h 38^m 45,0^s$ $\delta = 23^{\circ} 08' 45,3''$ $g = -3^m 33,0^s$

am 2. Juli 38 14^h 0^m 0^s $\alpha' = 6^h 43^m 34,6^s$ $\delta' = 23^{\circ} 4' 0,8''$ $g' = -3^m 46,6^s$.

Die zwischen den beiden Aufnahmen verflossene mittlere Sonnenzeit ist 28^h 0^m 0^s. Ihre Verwandlung in Sternzeit ergibt: 28^h 4^m 36,0^s. Der Unterschied $\alpha' - \alpha = -4^m 49,6^s$. Es wird demnach der Winkel Θ zwischen den beiden Stundenkreisen der Sonne:

$$\Theta = 28^h 4^m 36,0^s - 4^m 49,6^s = 27^h 59^m 46,4^s.$$

Der Überschuß über 24^h nämlich 3^h 59^m 46,4^s gibt in Gradmaß: 59° 56' 36''. Die Polabstände der Sonne zu den beiden Aufnahmezeiten sind $90^\circ - \delta = 66^\circ 51' 15''$ und $90^\circ - \delta' = 66^\circ 55' 59''$. Hieraus rechnet sich der Winkelabstand der Sonnenrichtungen $s = 54^\circ 42' 33''$ bzw. $\cos s = 0,57772$. Zum Ansetzen der Gleichung für den Drehpfeil $\mathcal{A}$ brauchen wir noch $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$.

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{s} & - 0,47400 & 0,28258 \quad - 0,83396 \\ \mathfrak{s}' & 0,44794 & 0,29333 \quad - 0,84459 \\ \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}' & - 0,21230 & 0,08292 \quad 0,70433 \quad = 0,57495 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} s_2 s'_3 & - & s'_2 s_2 & & s_3 s'_1 & - & s'_3 s_1 & & s_1 s'_2 & - & s'_1 s_2 \\ 0,28258 & & 0,29333 & - & 0,83396 & - & 0,84459 & - & 0,47400 & 0,44794 \\ - 0,84459 & - & 0,83396 & & 0,44794 & - & 0,47400 & & 0,29333 & 0,28258 \\ - 0,23867 & - & 0,24462 & - & 0,37357 & & 0,40034 & - & 0,13904 & 0,12658 \\ \hline & & 0,24462 & & - 0,40034 & & & & - 0,12658 & \\ \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}' & 0,00595 & & & - 0,77391 & & & & - 0,26562 & \end{array}$$

Die Gleichung wird alsdann: $\cos s = \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}' - du \cdot \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}'$

$$0,57772 = 0,57495 + 0,00595 \, du_1 + 0,77391 \, du_2 + 0,26562 \, du_3$$

oder:

$$-0,00595 \, du_1 + 0,77391 \, du_2 + 0,26562 \, du_3 - 0,00277 = 0.$$

Mit den beiden Zusammenschlußgleichungen (S. 90 unten) bestimmt sie die drei Anteile des gesuchten Drehpfeiles. Die Auflösung der drei Gleichungen geschieht am besten mittels dreireihiger Determinanten.

Man erhält: $du_1 = 0,001073$ $du_2 = 0,004967$ $du_3 = -0,003995$.

Wir kommen nun zur Aufrichtung des Kugelbildes beider Aufnahmen.

Da die Länge $\lambda = 0$ und die Breite $\varphi = 45^\circ$ des ersten Standpunktes bekannt sind, kennen wir die Bestimmungsstücke des Nadirdreiecks SPN , nämlich $PN = 90^\circ - \varphi = 45^\circ$, $SN = 90^\circ - \delta = 66^\circ 51' 15''$. Der Winkel NPS ist der Stundenwinkel der Sonne. Die mittlere Ortszeit der Sonne fällt wegen $\lambda = 0$ mit der Weltzeit der Aufnahme $10^h 0^m 0^s$ zusammen. Die wahre Ortszeit wird durch Hinzufügung der Zeitgleichung g zur mittleren Ortszeit erhalten und ist infolgedessen: $10^h 0^m 0^s - 3^m 33,0^s = 9^h 56^m 27,0^s$. Ihr Abstand vom Mittag ist: $2^h 3^m 33,0^s = 30^\circ 53' 15'' = \angle NPS$. Die Ausrechnung des Dreiecks gibt für NS $33^\circ 17' 15''$ und für das Azimut der Sonne von Süden ab gezählt $50^\circ 19' 9''$. Ebenso läßt sich das Dreieck NPS' auswerten. Der Winkel am Pol ist $59^\circ 56' 36'' - 30^\circ 53' 15'' = 29^\circ 3' 11'' = \angle SPS' - NPS$. Die drei Anteile des Einheitspfeiles in der astronomischen Richtung $\mathfrak{s}$ sind folgende: $\sin NS \sin a$, $\sin NS \cos a$, $\cos NS$, wobei a das Azimut von NS bedeutet. Entsprechend sind sie für den Einheitspfeil in der Richtung NS' $\sin NS' \sin a'$, $\sin NS' \cos a'$, $\cos NS'$. Die Anteile verstehen sich beidemale im geographischen Koordinatensystem der ersten Aufnahme. Daher ist:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{s}_a - 0,47202 & 0,28006 - 0,83594 \\ \mathfrak{s}'_a & 0,44682 \quad 0,29161 - 0,84576 \end{array} \quad (\text{astr. Richtungen}).$$

Diese astronomischen Richtungen werden nun zwecks Aufrichtung mit den geodätischen Richtungen verglichen. Für die erste Aufnahme ist $\mathfrak{s}_g - 0,47400 \ 0,28258 - 0,83396$. Sie stimmt genähert mit $\mathfrak{s}_a$ überein, ein Beweis dafür, daß diese Aufnahme annähernd mit der Y -Achse nach Norden geortet war.

Für die zweite Aufnahme müssen die in Tafel 1 angegebenen Werte erst mit dem Drehpfeil $d\omega$ umgerechnet werden; man hat $\bar{\mathfrak{s}}' = \mathfrak{s}' + d\omega \times \mathfrak{s}'$ zu bilden und erhält:

$$\bar{\mathfrak{s}}'_g \ 0,44491 \ 0,29244 - 0,84650.$$

Nun soll ein Drehpfeil $d\omega$ so gefunden werden, daß

$$\mathfrak{s}_g + d\omega \times \mathfrak{s}_g = \mathfrak{s}_a \text{ und } \bar{\mathfrak{s}}'_g + d\omega \times \bar{\mathfrak{s}}'_g = \mathfrak{s}'_a$$

$$\begin{array}{cccc} d\omega & d\omega_1 & d\omega_2 & d\omega_3 \\ \mathfrak{s}_g - 0,47400 & 0,28258 & - 0,83396 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} d\omega & d\omega_1 & d\omega_2 & d\omega_3 \\ \bar{\mathfrak{s}}'_g & 0,44491 & 0,29244 & - 0,84650 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} - 0,83396 \ d\omega_2 & - 0,28258 \ d\omega_3 & = - 0,47202 + 0,47400 = & 0,00198 \\ 0,83396 \ d\omega_1 & - 0,47400 \ d\omega_3 & = & 0,28006 - 0,28258 = - 0,00252 \\ 0,28258 \ d\omega_1 + 0,47400 \ d\omega_2 & & = & - 0,83954 + 0,83396 = - 0,00198 \\ & - 0,84650 \ d\omega_2 & - 0,29255 \ d\omega_3 & = 0,44682 - 0,44491 = 0,00191 \\ 0,84650 \ d\omega_1 & + 0,44491 \ d\omega_3 & = & 0,29161 - 0,29244 = - 0,00083 \\ 0,29244 \ d\omega_1 - 0,44491 \ d\omega_2 & & = & - 0,84576 + 0,84650 = 0,00074 \end{array}$$

Die ersten drei Gleichungen und die letzten drei Gleichungen sind voneinander abhängig und können daher nicht zur Bestimmung der Unbekannten benützt werden, wohl aber zwei von den drei ersten und eine von den drei zweiten oder umgekehrt. Um den Abrundungsfehlern in den Beiwerten der Gleichungen möglichst zu entgehen, habe ich aus den sechs Gleichungen Normalgleichungen gebildet und diese (mit dem Rechenschieber) aufgelöst.

Die Normalgleichungen waren im üblichen Schema geschrieben

$$\begin{array}{ccc} dw_1 & dw_2 & dw_3 \\ 1,576 & 0,001 & - 0,019 \quad - 0,00326 \\ & 1,833 & 0,483 \quad - 0,00444 \\ & & 0,587 \quad - 0,00023 \end{array}$$

Die Auflösung ergab:

$$dw_1 = -0,00203 \quad dw_2 = -0,00298 \quad dw_3 = 0,00194.$$

Mit dem Drehpfeil du (S. 92):

$$du_1 = 0,00107 \quad du_2 = 0,00497 \quad du_3 = -0,00400$$

ergibt sich der Drehpfeil $d\mathfrak{v} = d\mathfrak{w} + du$:

$$dv_1 = -0,00096 \quad dv_2 = -0,00199 \quad dv_3 = -0,00206.$$

Nun wird das Zielstrahlenbündel der ersten Aufnahme mit dem Drehpfeil $d\mathfrak{w}$ und jenes der zweiten Aufnahme mit dem Drehpfeil $d\mathfrak{v}$ aufgerichtet. Die aufgerichteten Zielstrahlenbündel sind in Tafel 5 zusammengestellt.

Tafel 5.

$\bar{a}$ 0,02256	0,42892	—0,90307	$\bar{a}'$ —0,38104	0,38112	—0,84236
$\bar{b}$ 0,40798	0,37656	—0,83174	$\bar{b}'$ —0,22072	0,37853	—0,89890
$\bar{c}$ 0,40197	—0,40209	—0,82266	$\bar{c}'$ —0,01084	—0,42188	—0,90658
$\bar{d}$ 0,24977	—0,43308	—0,86607	$\bar{d}'$ —0,37533	—0,39027	—0,84072
$\bar{e}$ 0,31604	0,03155	—0,94822	$\bar{e}'$ —0,29813	0,02986	—0,95405

Die Zielstrahlen beider Bündel, die sich auf das gleiche Ziel beziehen, schneiden sich jetzt und sie sind außerdem gegen das Lot und die Himmelsrichtungen im ersten Standpunkt genau so gerichtet, wie bei der Aufnahme selbst.

12. Die Wiederherstellung des Geländemodells.

Zuerst sind mit den aufgerichteten Zielstrahlenbündeln die Pfeile: $\bar{\mathfrak{A}} = \bar{a} \times \bar{a}'$, $\bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{\mathfrak{C}}$, $\bar{\mathfrak{D}}$ neu zu rechnen, sodann die Produkte $\bar{\mathfrak{B}} \times \bar{\mathfrak{C}}$, $\bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{C}}$, $\bar{\mathfrak{B}} \times \bar{\mathfrak{D}}$, $\bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{D}}$. Jedes dieser Produkte hat nun die Richtung des Kernstrahles $\mathfrak{K}$. Die Ergebnisse sind in Tafel 6 zusammengestellt.

Tafel 6.

$\bar{\mathfrak{A}}$	—0,01713	0,36311	0,17203
$\bar{\mathfrak{B}}$	—0,02365	0,55031	0,23754
$\bar{\mathfrak{C}}$	0,01745	0,37335	0,17394
$\bar{\mathfrak{D}}$	0,02610	0,53505	—0,26003

$\overline{\mathfrak{B}} \times \overline{\mathfrak{C}}$	—0,18440	0,000031	—0,018433
$\overline{\mathfrak{M}} \times \overline{\mathfrak{C}}$	—0,12739	0,000022	—0,012731
$\overline{\mathfrak{B}} \times \overline{\mathfrak{D}}$	—0,27019	0,000050	—0,027017
$\overline{\mathfrak{M}} \times \overline{\mathfrak{D}}$	—0,18647	0,000036	—0,018642

Summe: —0,76845 0,000139 —0,076823

Aus obiger Summe ergibt sich durch Multiplikation mit dem Faktor 2602,7 *m* der Pfeil $\mathfrak{N}$ in der Richtung des Kernstrahles bzw. der Standlinie $O O'$

$$\mathfrak{N} \text{ 2000,00 } m \quad -0,36 m \quad 199,95 m.$$

Der Faktor wurde so gewählt, daß der Grundriß der Standlinie 2000 *m* wird, welches Maß der Rechnung der Bildkoordinaten zugrunde lag.

Die Anwendung der Formeln auf S. 85 begegnet nun keinerlei Schwierigkeiten. Wir lassen das Ergebnis in nachstehender Tafel 7 folgen.

Tafel 7.

Zielpunktskoordinaten von O aus			Zielpunktskoordinaten von O' aus		
x	y	z	x'	y'	z'
<i>a</i> 99,94	1900,23	—4000,55	—1900,04	1900,44	—4200,40
<i>b</i> 1300,09	1199,94	—2650,44	—699,92	1200,36	—2850,50
<i>c</i> 1949,91	—1950,44	—3990,55	—50,11	—1950,09	—4190,55
<i>d</i> 749,92	—1390,29	—2600,30	—1250,11	—1299,91	—2800,20
<i>e</i> 1000,00	99,93	—3000,33	1000,02	100,16	—3200,21

Unterschiede

$x-x'$	$y-y'$	$z-z'$
1999,98	—0,21	199,85
2000,01	—0,42	200,06
2000,02	—0,35	200,00
2000,03	—0,38	199,90
2000,02	—0,23	199,88

Mittel: 2000,01 —0,32 199,94

Die Unterschiede der gleichnamigen Koordinaten sind im Mittel gleich den Anteilen von $\mathfrak{R}$.

Zum Schlusse seien noch die Mittel aus den Koordinaten von beiden Standpunkten gebildet, nachdem die Koordinaten von O' mit den mittleren Unterschieden auf die von O aus zurückgeführt wurden. Außerdem wurde dem tiefstgelegenen Zielpunkt a die Höhe Null zugeteilt. Tafel 8. Man sieht, wie sehr sich diese Koordinaten den glatten Werten nähern, von denen bei der Berechnung der Bildkoordinaten ausgegangen wurde.

Tafel 8.

Koordinaten der wiederhergestellten Ziel- und Standpunkte

	x	y	z
a	99,95	1900,17	0,00
b	1300,09	1199,99	1350,00
c	1949,91	— 1950,42	9,92
d	749,91	— 1300,26	1400,22
e	1000,00	99,88	1000,20
O	0,00	0,00	4000,50
O'	2000,01	— 0,32	4200,44

Bezüglich der Rechnungen ist schließlich noch zu bemerken, daß sie ganz schematisch vor sich gehen und sich dieselben Rechengänge immer wiederholen. Der gesamte Rechengang ist auf die Verwendung einer Rechenmaschine abgestellt und setzt beim Rechner keinerlei Kenntnis in Bildmeßkunst voraus. Nur die Pfeile wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ und die dreifachen Produkte wie $(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C})$ müssen genau gerechnet werden. Für die vierfachen Produkte, die als Beiwerte in den Gleichungen für die Drehpfeile auftreten, reicht in den meisten Fällen schon die Genauigkeit des Schieberrechnens aus.