Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft I
Januar-April-Sitzung

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Darstellung der Gesamtkrümmung einer Fläche mit Hilfe von Lotparameter.

Von Hermann von Schelling.

Vorgelegt von Herrn C. Carathéodory in der Sitzung vom 23. April 1938.

In einem Aufsatz in der „Deutschen Mathemathik"[1] habe ich gezeigt, daß bestimmte Parameter, die ich kurz Lotparameter nennen möchte, zur Darstellung der Krümmung von ebenen Kurven und von Flächen recht geeignet sind. Ich habe dabei vorausgesetzt, die betrachteten Kurven oder Flächen seien bereits auf diese Parameter bezogen. Ziel dieser Mitteilung soll es sein, eine solche Darstellung praktisch zu verwirklichen.

Wir beginnen wieder mit den Kurven der Ebene. Von einem festen Punkt O fällen wir auf die im Punkte P an die Kurve gelegte Tangente das Lot, welches die Länge l habe. Die Tangente hat dann die Gleichung

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - l = 0. \tag{1}$$

Wir wollen l als Parameter wählen, also $\varphi = \varphi(l)$ annehmen. Lassen wir l variieren, so hüllt die Tangente die Kurve ein. Um die Koordinaten x und y der Enveloppe zu finden, leiten wir nach l ab und erhalten

$$\varphi' (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) - 1 = 0. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) finden wir die gesuchte Darstellung

$$\mathfrak{x}(l) = \left\{ l \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi'};\ l \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\varphi'} \right\}. \tag{3}$$

Nur die Kreise um den Ursprung entziehen sich ihr. Der Einheitsvektor der Normalen ist

$$\mathfrak{n} = \{ \cos \varphi;\ \sin \varphi \}. \tag{4}$$

---

[1] Darstellung der Krümmung von Kurven und Flächen durch Differentialausdrücke erster Ordnung; Dtsche Math. **2**, 675–681.

Wir verifizieren die Beziehung $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{n} = l$, die als Kontrolle der Darstellung wichtig ist.

Bezeichnen wir mit k die Krümmung der Kurve, so gilt:

$$k\,ds = |\,d\mathfrak{n}\,| = \varphi'\,dl.$$

Für die Gesamtkrümmung eines Kurvenbogens erhalten wir also

$$\int k\,ds = \int \varphi'\,dl = \varphi - \varphi_0. \tag{5}$$

Diese Beziehung ist freilich trivial. Trotzdem schreibe ich sie an. Denn wir werden nachher eine sicher weniger vertraute Formel für die Gesamtkrümmung eines Flächenstückes finden, zu der uns der elementare Ausdruck den Weg weist.

Aus (3) ergibt sich

$$u = \frac{1}{2}\,\mathfrak{r}^2 = \frac{1}{2}\left(l^2 + \frac{1}{\varphi'^2}\right). \tag{6}$$

Nach meiner erwähnten Arbeit gilt

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{du}{dl} = l - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}. \tag{7}$$

Damit ist für unsere Darstellung der Krümmungsradius der Kurve bestimmt.

Im Bestreben, den heuristischen Wert der Analogie klar herauszuarbeiten, möchte ich noch ein Beispiel bringen. Wir fragen nach den Kurven, die durch die l-Einteilung in Abschnitte gleicher Gesamtkrümmung zerlegt werden. Nach (5) muß $\varphi' = c_1$ oder $\varphi = c_0 + c_1 l$ sein. Gemäß (3) lautet die Darstellung unserer Kurve

$$\mathfrak{r} = \left\{ l \cos(c_0 + c_1 l) - \frac{\sin(c_0 + c_1 l)}{c_1};\right.$$
$$\left. l \sin(c_0 + c_1 l) + \frac{\cos(c_0 + c_1 l}{c_1}\right\}.$$

Nach (7) ist $\rho = l$. Für die Evolute finden wir also

$$\mathfrak{r} - \rho\,\mathfrak{n} = \left\{ -\frac{\sin(c_0 + c_1 l)}{c_1};\ \frac{\cos(c_0 + c_1 l)}{c_1} \right\}.$$

Das ist ein Kreis um den Ursprung mit dem Radius $\frac{1}{c_1}$. Somit gilt der Satz, daß die Kreisevolventen durch die l-Einteilung in Abschnitte gleicher Gesamtkrümmung zerlegt werden. Der Ursprung muß in den Mittelpunkt des Kreises gelegt werden.

Nun wollen wir zu den Flächen übergehen. Den Ursprung der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z nennen wir M. Von den beiden festen Polen $O_1 = \{a;\ 0;\ 0\}$ und $O_2 = \{-a;\ 0;\ 0\}$ fällen wir die Lote l_1 und l_2 auf die im Punkte P an die Fläche gelegte Berührungsebene. Die Gleichung dieser Ebene lautet:

$$(8)\quad (l_1 - l_2)\,x + W\cos\varphi\cdot y + W\sin\varphi\cdot z - a\,(l_1 + l_2) = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$W = \sqrt{4a^2 - (l_1 - l_2)^2}$$

geschrieben ist. Wir betrachten l_1 und l_2 als Parameter, nehmen also $\varphi = \varphi\,(l_1, l_2)$ an. Um die Koordinaten x, y, z der von der Ebene eingehüllten Fläche zu erhalten, haben wir die Gleichung (8) partiell nach l_1 und l_2 zu differentiieren. Die ursprüngliche wie auch die beiden abgeleiteten Gleichungen sind in x, y, z linear. Wenn wir die Flächen $K = 0$ und die Drehflächen um die x-Achse ausschließen, ist die Auflösung nach x, y, z möglich. Schreiben wir $\mathfrak{r} = \{x;\ y;\ z\}$, so wird

$$(10\text{a})\quad \mathfrak{r} = \frac{1}{2a(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})}\left\{\frac{(l_1^2 - l_2^2)}{2}(\varphi_{l1} + \varphi_{l2}) - \frac{W^2}{2}(\varphi_{l1} - \varphi_{l2});\right.$$
$$-\frac{4a^2}{W}\sin\varphi + W\cos\varphi\,(l_1\varphi_{l1} + l_2\varphi_{l2});$$
$$\left.+\frac{4a^2}{W}\cos\varphi + W\sin\varphi\,(l_1\varphi_{l1} + l_2\varphi_{l2})\right\}.$$

Die von den Polen O_1 und O_2 ausgehenden Radienvektoren wollen wir mit $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ bezeichnen. In den y und z Komponenten stimmen sie mit $\mathfrak{r}$ überein; für die x Komponenten erhalten wir

$$(10\text{b})\quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2a(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})}\left(l_1(l_1 - l_2)(\varphi_{l1} + \varphi_{l2}) + W^2\varphi_{l2}\right);\\ x_2 &= \frac{1}{2a(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})}\left(l_2(l_1 - l_2)(\varphi_{l1} + \varphi_{l2}) - W^2\varphi_{l1}\right). \end{aligned}$$

Die Auflösung, mit der ich nicht langweilen wollte, ist etwas mühselig. Darum ist es wichtig, über einfache Kontrollen zu verfügen. Für den Einheitsvektor der Flächennormalen gilt die Darstellung

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{2a}\{ l_1 - l_2;\ W \cos \varphi;\ W \sin \varphi \}. \tag{11}$$

Es ist leicht, mit ihrer Hilfe die Beziehungen $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{N} = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{N} = l_1$, $r_2\, \mathfrak{N} = l_2$ zu verifizieren.

Ich füge noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\mathfrak{r}_1^2 = \frac{1}{2}\left(l_1^2 + \frac{1}{(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})^2}\left(\frac{4a^2}{W^2} + W^2 \varphi_{l2}^2\right)\right) \\ u_2 &= \frac{1}{2}\mathfrak{r}_2^2 = \frac{1}{2}\left(l_2^2 + \frac{1}{(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})^2}\left(\frac{4a^2}{W^2} + W^2 \varphi_{l1}^2\right)\right) \end{aligned} \tag{12}$$

an, aus denen gemäß meiner früheren Untersuchung

$$\frac{1}{K} = R_1 R_2 = \frac{\delta u_1}{\delta l_1}\frac{\delta u_2}{\delta l_2} - \frac{\delta u_1}{\delta l_2}\frac{\delta u_2}{\delta l_1} \tag{13}$$

berechnet werden kann. Jedoch wird der Ausdruck im allgemeinen so verwickelt, daß seine Wiedergabe zwecklos wäre. Weit einfacher gestaltet sich die Gesamtkrümmung, zu deren Bestimmung wir jetzt schreiten wollen. Es wird nach (11)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{l1} &= \frac{1}{2a}\Big\{ +1;\ -\frac{l_1 - l_2}{W}\cos\varphi - W \sin\varphi \cdot \varphi_{l1}; \\ &\qquad\qquad -\frac{l_1 - l_2}{W}\sin\varphi + W\cos\varphi \cdot \varphi_{l1} \Big\}, \\ \mathfrak{N}_{l2} &= \frac{1}{2a}\Big\{ -1;\ +\frac{l_1 - l_2}{W}\cos\varphi - W \sin\varphi \cdot \varphi_{l1}; \\ &\qquad\qquad +\frac{l_1 - l_2}{W}\sin\varphi + W\cos\varphi \cdot \varphi_{l2} \Big\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Daraus folgt

(15)

$$(\mathfrak{N}_{l1} \times \mathfrak{N}_{l2}) = -\frac{(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})\,\mathfrak{N}}{2a} \text{ oder } d\omega = -\frac{1}{2a}(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})\,dl_1\,dl_2.$$

Hierbei haben wir das Flächenelement der Einheitskugel mit $d\omega$ bezeichnet, während wir unter do dasjenige der Fläche selbst verstehen wollen. Nun ist $K = d\omega : do$. Für die Gesamtkrümmung finden wir daher

$$(16)\qquad \int\limits_B K\,do = \int\limits_B d\omega = -\frac{1}{2a}\int\!\!\int(\varphi_{l1} + \varphi_{l2})\,dl_1\,dl_2.$$

Das ist das versprochene Gegenstück zu (5). Liegt also eine Fläche in der Form (10a) vor, so kann die Gesamtkrümmung eines jeden von Parameterlinien begrenzten Flächenstücks durch die einfache Formel (16) berechnet werden. Man könnte sie durch den Ansatz $\varphi = \dfrac{\delta^2\psi}{\delta l_1\,\delta l_2}$ sogar integralfrei schreiben.

Es ist sehr natürlich, nach denjenigen Flächen zu fragen, die duch die (l_1, l_2)-Netzeinteilung in Stücke gleicher Gesamtkrümmung zerlegt werden. Dazu ist nach (16) nur $\varphi_{l1} + \varphi_{l2} = \text{Const} \neq 0$ notwendig, woraus sofort die Lösung $\varphi = c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + f(l_1 - l_2)$ mit $c_1 + c_2 \neq 0$ folgt. Führen wir diesen Ausdruck in (10a) ein, so haben wir also eine ganze Flächenklasse erhalten, da in der Darstellung die von einer Veränderlichen abhängige willkürliche Funktion $f(l_1 - l_2)$ vorkommt. Setzen wir weiter den für φ gefundenen Ausdruck in den Vektor der Flächennormalen (11) ein, so bekommen wir eine Zerlegung der Kugeloberfläche in inhaltsgleiche Bereiche. Es sei allerdings betont, daß es sich nicht um die allgemeinste derartige Zerlegung handelt, die eine von zwei Veränderlichen abhängige willkürliche Funktion enthalten müßte.

Nur den einfachsten Sonderfall unserer Flächenklasse wollen wir etwas näher betrachten. Ich meine den Ansatz

$$\varphi = l_1 + l_2.$$

Dann haben wir, wenn wieder $W = \sqrt{4a^2 - (l_1 - l_2)^2}$ geschrieben wird,

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{4a}\left\{(l_1^2 - l_2^2); -\frac{4a^2}{W}\sin(l_1 + l_2) + W(l_1 + l_2)\cos(l_1 + l_2);\right.$$
$$\left.\frac{4a^2}{W}\cos(l_1 + l_2) + W(l_1 + l_2)\sin(l_1 + l_2)\right\}.$$

Um eine Vorstellung zu gewinnen, betrachten wir die Projektionen der Kurven $(l_1 - l_2) = \text{Const}$ und $(l_1 + l_2) = \text{Const}$ auf die Ebene $x = 0$. Die Quadratwurzel W wird positiv gezogen. Die Projektionen der Kurven $l_1 - l_2 = \text{Const}$ sind Kreisevolventen. Der zugehörige Kreis hat die Gleichung

$$y^2 + z^2 = \frac{a^2}{4a^2 - (l_1 - l_2)^2},$$

alle Evolventen beginnen auf der z-Achse. Der Teil $+\frac{1}{2} \leqq z < \infty$ dieser Achse ist eine Rückkehrkante unserer Fläche. Es ist schon jetzt klar, daß die Fläche sich in endlosen, weiter und weiter werdenden Windungen um die x-Achse herum ins Unendliche abrollt. Dieser Eindruck wird durch die Projektionen der Kurven $(l_1 + l_2) = \text{Const}$ auf die Symmetrieebene $x = 0$ bestätigt. Wir finden

$$4\big(\cos(l_1 + l_2)\,y + \sin(l_1 + l_2)\,z\big)\big(-\sin(l_1 + l_2)\,y + \cos(l_1 + l_2)\,z\big) = l_1 + l_2.$$

Die Drehung $y = \cos\alpha\cdot\eta + \sin\alpha\cdot\zeta$, $z = -\sin\alpha\cdot\eta + \cos\alpha\cdot\zeta$ führt mit $\alpha = \frac{\pi}{4} - (l_1 + l_2)$ diese Kurven in die gleichseitigen Hyperbeln

$$\zeta^2 - \eta^2 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

über. Das sind die gesuchten Projektionen der Kurven $(l_1 + l_2) = \text{Const}$.

Wir wollen noch kurz die zugehörige flächengleiche Netzeinteilung der Einheitskugel betrachten. Ihre Darstellung lautet:

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{2a}\left\{l_1 - l_2;\ \sqrt{4a^2 - (l_1 - l_2)^2}\cos(l_1 + l_2);\right.$$
$$\left.\sqrt{4a^2 - (l_1 - l_2)^2}\sin(l_1 + l_2)\right\}.$$

Daraus $\frac{1}{2}(l_1 - l_2) = ax, \quad \frac{1}{2}(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{y}$

oder $l_1 = + ax + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{y}, \quad l_2 = - ax + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{y}.$

Somit gilt $\frac{1}{a^2}\left(l_i - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{y}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad i = 1, 2.$

Schreiben wir

$$y = \rho\cos\beta,\ z = \rho\sin\beta,$$

so lautet die Gleichung der Projektionen der Parameterlinien auf die Ebene $x = 0$ einfach

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \left(l_i - \frac{1}{2}\beta\right)^2}, \quad i = 1, 2.$$

Diese Kurven können also leicht gezeichnet werden, es sind Spiralen, die sich von Pol zu Pol winden.

Unsere spezielle Fläche ist in gewisser Hinsicht ein Gegenstück zur Kreisevolvente. Für diese Kurve gilt $\rho = l$, für unsere Fläche $\frac{1}{K} = R_1 R_2 = l_1 l_2$. Die einzelnen Krümmungsradien R_1 und R_2 lassen sich aber nicht mehr so einfach ausdrücken. Für die allgemeineren Flächen unserer Klasse nimmt auch die Formel für das Krümmungsmaß eine recht komplizierte Form an.