Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft I
Januar-April-Sitzung

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs.

Von Constantin Carathéodory.

Vorgelegt in der Sitzung vom 23. April 1938.

Inhalt.

Einleitung.

Die Theorie der abstrakten Räume ist in den letzten Jahrzehnten viel beachtet worden, und es ist gelungen, auf verschiedene Weisen den Integralbegriff auch für solche Räume zu erklären.[1]

---

[1] M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. Bull. soc. math. de France **43** (1915) p. 248.

P. J. Daniell, A general form of integral. Ann. of Math. (2) **19** (1917–18)

Eine nähere Betrachtung der Umstände zeigt, daß man in dieser Richtung noch einen Schritt weiter gehen kann. Die Räume — auch die sogenannten abstrakten Räume — sind naturgemäß Mengen, d. h. Sammlungen von Elementen, die man auch Punkte nennt, aus welchen der betrachtete Raum zusammengesetzt ist. Jede Figur, über welche integriert wird, muß daher auch als eine Menge von Elementen aufgefaßt werden. Nun kann man sich aber überlegen, daß das Vorhandensein dieser Elemente für die Bildung des Integralbegriffs belanglos ist und daß der Nachweis der Existenz des Integrals eigentlich schon deshalb gelingt, weil die Möglichkeit der Ausführung der Grundoperationen der Vereinigung, der Differenz und des Durchschnitts in dem Begriff einer Menge enthalten ist.

Der Gedanke liegt also nahe, von der Struktur der Figuren, über welche integriert werden soll, völlig abzusehen und von diesen Figuren nur zu verlangen, daß sie Operationen zulassen, die mit den gewöhnlichen Operationen der Vereinigung, der Differenz und des Durchschnitts von Mengen gewisse Züge gemeinsam haben. Hierdurch entsteht ein doppelter Vorteil: Einmal wird das Feld der möglichen Anwendungen beträchtlich erweitert. Dann aber zeigt sich, daß die Theorie eher vereinfacht wird, weil nur ihr scharf umrissenes Skelett übrigbleibt. Durch den Zwang, den man sich auferlegt, Objekte zu handhaben, die nur wenig differentiiert sind, fallen bei vielen Beweisen diejenigen kompliziertenTeile von selbst weg, die bei der Verarbeitung eines reichhaltigeren Materials aus Versehen haften geblieben waren. Bemerkenswert

p. 279 — Integrals in an infinite number of dimensions, ibid. (2) **20** (1918) p. 281.

A. Kolmogoroff, Untersuchungen über den Integralbegriff, Math. Ann. **103** (1930) S. 654.

H. Hahn, Über den Integralbegriff, Festschr. d. 57. Vers. Deutsch. Philolog. u. Schulmänner in Salzburg 1929, S. 193.

— Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen. Ann. della R. Scuola Normale Sup. di Pisa (Sc. Fis. e Mat.) (2) **2** (1933) p. 429.

O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon. Fund. math. **15** (1930) p. 131.

J. Ridder, Integration in abstrakten Räumen. Fund. math. **24** (1935), S. 72.

S. Saks, Theory of the Integral. Monografie Matematyczne, Tom. VII, Warszawa 1937.

ist, daß der allergrößte Teil der Resultate, die für das Lebesguesche und das Lebesgue-Stieltjessche Integral gelten, auch mit so durchaus primitiven Mitteln gewonnen werden können. Es sind eben nur wenige Details, die durch Spezialisierung der Voraussetzungen dem allgemeinen Bilde hinzugefügt werden.

Die mathematischen Objekte, die wir im ersten Kapitel dieser Schrift definieren, können selbstverständlich als Elemente einer verallgemeinerten Algebra von Boole betrachtet werden.[2] Bei diesen Algebren werden jedoch die Summe und das Produkt von zwei beliebigen Elementen gleichzeitig postuliert und als gleichberechtigt empfunden. Für unsere Zwecke ist es dagegen vorteilhafter, die Vereinigung, die Differenz und den Durchschnitt nicht symmetrisch zu behandeln. Wir werden nur die erste dieser Operationen postulieren, um sie dann durch weitere Axiome so einzuschränken, daß hierdurch allein schon die Existenz der beiden anderen Operationen gesichert wird. Man erhält auf diese Weise ein System von Axiomen, das bei der Bildung von Beispielen besonders einfach gehandhabt werden kann. (Vgl. §§ 9 u. 10.)

Für mathematische Objekte, die so grundlegende und wichtige Eigenschaften besitzen, muß man einen Namen haben, der ganz neutral ist und keine falschen Assoziationen erweckt. Wir werden sehen (§ 9), daß diese Objekte nicht immer Mengen sind, so daß die Bezeichnung ,,Menge" nicht benutzt werden kann. Der Name ,,Körper", der vieles für sich hätte, ist ebenfalls ausgeschlossen, weil sein Gebrauch zu Mißverständnissen führen würde; die ,,Strukturen", die Ore eingeführt hat, sind viel zu allgemein. Nichts hindert aber Soma (τὸ σῶμα = Körper) zu sagen.[3]

---

[2] O. Ore, On the foundation of Abstract Algebra. Ann. Math. (2) **36** (1935) p. 406.

M. H. Stone, Postulates for Boolean Algebras and generalized Boolean Algebras. Amer. Journ. of Mathem. **57** (1935) p. 703.

[3] Das Wort Soma ist allerdings schon von E. Study in seinen Untersuchungen über räumliche Kinematik gebraucht worden. Die Benutzung derselben Bezeichnung für Gegenstände, die in ganz getrennten Gebieten der Mathematik vorkommen, kann nicht zu Verwechslungen führen. Auch das Wort ,,Körper" wird in der Geometrie und in der Algebra mit verschiedenen Bedeutungen gebraucht.

Für die Übertragung des Begriffs des Integrals kann man verschiedene Prinzipien benutzen. Herr Kolmogoroff hat die Idee von Leibniz einer Summa omnium zu Ende geführt. Herr Hahn hat sich von dem Gedanken leiten lassen, daß nach Einschränkung der Mengen, über welche integriert werden soll, das Integral eine total-additive Funktion ist.

Viel einfacher und direkter kommt man zum Ziel, wenn man von elementaren Eigenschaften des Inhalts bezw. des Volumens ausgeht. Diese Eigenschaften sind so anschaulich, daß sie Archimedes hätte postulieren können.[4] Sie stellen die Verallgemeinerung der folgenden geometrischen Sätze dar:

Satz 1. Wenn man eine ebene Figur F schuppenförmig mit endlich oder unendlich vielen ebensolchen Figuren $F_1, F_2, \ldots$ vollständig überdeckt, so ist der Flächeninhalt von F nicht größer als die Summe der Flächeninhalte aller F_k.

Satz 2. Das Volumen eines geraden Zylinders ist gleich dem Produkt seiner Höhe mit dem Inhalt seiner Basis.

Der erste dieser Sätze führt ganz von selbst zu der Theorie der Maßfunktionen, die ich vor langer Zeit entwickelt habe.[5] Die Maßfunktionen lassen sich ohne Schwierigkeit auch als Somenfunktionen definieren. Diesen Dingen ist das zweite Kapitel dieser Note gewidmet.

Um den Satz 2 zu übertragen, der mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung in Verbindung gebracht werden kann, muß man Ortsfunktionen auf einem Körper von Somen betrachten. Diese Ortsfunktionen, die den gewöhnlichen Punktfunktionen analog sein sollen, werden durch die obere und untere Grenze, die sie auf den verschiedenen Somen annehmen, festgelegt.

---

[4] Man vergleiche die λαμβανόμενα (Postulata) von Archimedes am Anfang des ersten Buches über Kugel und Zylinder. Opera Omnia, ed. Heiberg, Leipzig, Teubner, 1910, Bd. I p. 8.

[5] C. Carathéodory, Über das lineare Maß — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. Gött. Nachr. (1914) S. 404. Vgl. auch Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, Teubner, 1918 (2. Aufl. 1927) Kap. V.

Dann bedarf es nur noch eines kleinen Aufwands an Mühe, um die ganze Theorie zu Ende zu führen: es genügt, das Lebesgue-Stieltjessche Integral als eine Maßfunktion zu betrachten, für welche der Mittelwertsatz gilt. Die obige Definition der Ortsfunktionen ist für diese Auffassung des Integrals besonders geeignet. Bei der Entwicklung dieses Gedankens kann man durchweg Methoden benutzen, die sehr geläufig sind. Dieser Teil des Kap. III, der leicht zu vervollständigen ist, konnte aus diesem Grunde sehr kurz gehalten werden.

Man bemerke übrigens, daß man die Resultate von Hahn erhält, wenn man das Integral $I^* A$ nur auf dem Körper definiert, auf welchem diese Maßfunktion meßbar ist.

Kapitel I. Die Somen.

1. Axiomatische Definition der Somen. Irgendwelche mathematischen Objekte, die ein System bilden, für welches die folgenden sechs Axiome verifiziert sind, sollen mit dem Namen Soma bezeichnet werden. Die Mengen eines gewöhnlichen Euklidischen oder eines beliebigen abstrakten Raumes fallen unter diesen Begriff.

Axiom 1. Die Gesamtheit der Somen $A, B, \ldots$ bildet eine Menge $\mathfrak{M}$. Für irgend zwei Somen A, B soll immer bestimmt werden können, ob $A = B$ oder ob $A \neq B$ ist. Hierbei wird durch das Gleichheitszeichen irgendeine Beziehung ausgedrückt, die den Forderungen genügt

(1. 1) $\quad A = A$

(1. 2) $\quad$ aus $A = B$ folgt $B = A$

(1. 3) $\quad$ aus $A = B$ und $B = C$ folgt $A = C$.

Axiom 2. Jedem Paar A, B von Somen wird ein drittes Soma $A \dotplus B$ eindeutig zugeordnet, das die Vereinigung von A und B genannt wird.

Für die Vereinigung gelten die Regeln

$$A \dotplus A = A \tag{1. 4}$$

$$A \dotplus B = B \dotplus A \tag{1. 5}$$

$$A \dotplus (B \dotplus C) = (A \dotplus B) \dotplus C \tag{1. 6}$$

$$\text{aus } B = B' \text{ folgt } A \dotplus B = A \dotplus B'. \tag{1. 7}$$

Wir führen nun folgende Definition ein:

Definition 1. Man sagt, daß das Soma B ein Teil des Somas A ist, und schreibt

$$B \subseteqq A \text{ oder auch } A \supseteqq B, \tag{1. 8}$$

wenn

$$A \dotplus B = A \tag{1. 9}$$

ist.

Die Menge $\mathfrak{M}$ der Somen wird hierdurch, nach der Bezeichnung von Hausdorff,[6] teilweise geordnet. Erstens ist nämlich nach der Definition 1 und der Gleichung (1. 4)

$$A \subseteqq A. \tag{1. 10}$$

Zweitens folgt aus $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$, daß immer $A = B$ sein muß. In diesem Fall müssen nämlich A und B beide gleich $A \dotplus B$ sein.

Drittens folgt aus $B \subseteqq A$ und aus $C \subseteqq B$, daß $C \subseteqq A$ ist; denn man hat

$$A = B \dotplus A = (C \dotplus B) \dotplus A = C \dotplus (B \dotplus A) = C \dotplus A.$$

Die drei Eigenschaften der Reflexivität, der Antisymmetrie und der Transitivität sind also alle erfüllt.

Wir bemerken noch, daß der Satz gilt:

---

[6] F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin 1927, S. 29 u. 62.

Satz 1. Notwendig und hinreichend dafür, daß $B \subseteqq A$ sei, ist, daß mindestens ein Soma B_1 existiert, so daß $B \dotplus B_1 = A$ gilt.

Ist nämlich $B \subseteqq A$, so kann man $B_1 = A$ setzen. Ist umgekehrt $B \dotplus B_1 = A$, so hat man

$$B \dotplus A = B \dotplus (B \dotplus B_1) = B \dotplus B_1 = A.$$

2. Ist $A \subseteqq C$ und $B \subseteqq C$, so hat man

$$(A \dotplus B) \dotplus C = A \dotplus (B \dotplus C) = A \dotplus C = C,$$

und es gilt daher der

Satz 2. Ist $A \subseteqq C$ und $B \subseteqq C$, so ist auch $(A \dotplus B) \subseteqq C$.

Da sowohl A als auch B Teile von $A \dotplus B$ sind, so besagt der letzte Satz, daß die Vereinigung von zwei Somen das „kleinste" Soma ist, das jedes von ihnen als Teil enthält. Dieses Resultat kann ohne weiteres auf die Vereinigung $A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_n$ von endlich vielen Somen übertragen werden.

Aber für unendlich viele Somen braucht es ein Soma, das jedes von ihnen als Teil enthält, nicht zu geben. Man erkennt dies, indem man als Somen die positiven ganzen Zahlen versteht, und als Vereinigung der beiden Somen $A = p$ und $B = q$ die größere der beiden Zahlen p und q nimmt. Deshalb stellt das folgende Axiom eine neue Bedingung für die Vereinigung von Somen dar:

Axiom 3. Sind $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele Somen, so gibt es ein kleinstes Soma V, das jedes der Somen A_k als Teil enthält. Das Soma V wird die Vereinigung aller A_k genannt, und man schreibt $V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$

Es soll also $V \supseteqq A_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) sein, und wenn für ein Soma W die analoge Bedingung $W \supseteqq A_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) erfüllt ist, so muß immer $V \subseteqq W$ sein. Es ist klar, daß die Vereinigung V durch die postulierte Eigenschaft eindeutig definiert ist. Für jedes Soma V', das die gleiche Eigenschaft besitzt, muß nämlich sowohl $V \subseteqq V'$ als auch $V' \subseteqq V$ sein.

Die beiden folgenden Sätze sind fast evidente Folgerungen des Axioms 3.

Satz 3. Sind die abzählbar vielen Somen $A_1, A_2, \ldots$ alle gleich einem und demselben Soma B, so ist ihre Vereinigung V auch gleich B.

Es ist nämlich $B \subseteqq V$, und weil für jedes k auch $A_k \subseteqq B$ ist, so muß überdies $V \subseteqq B$ sein.

Satz 4. Es seien A_k und B_k $(k = 1, 2, \ldots)$ zwei Folgen von Somen. Mit A bezw. mit B bezeichnen wir die Vereinigungen dieser Folgen. Ist für jedes k immer $A_k \subseteqq B_k$, so ist auch $A \subseteqq B$.

In der Tat gilt für jeden Wert von k, nach den Voraussetzungen des Satzes, $A_k \subseteqq B$, so daß nach Axiom 3 auch $A \subseteqq B$ sein muß.

Endlich besteht auch der folgende Doppelreihensatz.

Satz 5. Mit A_{kj} bezeichnen wir irgendwelche abzählbar viele Somen und mit V ihre Vereinigung. Ferner bezeichnen wir für jedes fest gewählte k mit A_k die Vereinigung von $A_{k1}, A_{k2}, \ldots$. Dann ist V auch die Vereinigung aller A_k.

Wir bezeichnen mit V' die Vereinigung der A_k und haben zu zeigen, daß $V' = V$ ist. Da alle $A_{k1}, A_{k2}, \ldots$ Teile von V sind, ist nach dem Axiom 3 ihre Vereinigung $A_k \subseteqq V$. Da ferner die letzte Beziehung für alle k gilt, ist auch $V' \subseteqq V$. Umgekehrt ist jedes A_{kj} ein Teil des entsprechenden A_k und daher ein Teil von V'. Es folgt hieraus $V \subseteqq V'$ und schließlich, wie zu beweisen war, $V' = V$.

3. Die Somen sollen weiteren Axiomen genügen.

Axiom 4. Es gibt mindestens ein Soma O, das leere Soma, das Teil eines beliebigen Somas ist.

Aus der postulierten Eigenschaft von O folgt, daß es gerade nur ein leeres Soma geben kann, für welches immer für jedes Soma A die Relation

$$A \dotplus O = A \qquad (3.1)$$

gilt. Bei konkreten Beispielen kann man immer, falls ein Soma O

mit den verlangten Eigenschaften nicht von vornherein vorhanden ist, ein Soma O hinzufügen, für welches (3. 1) gelten soll.

Wir führen jetzt folgende Definition ein:

Definition 2. Zwei Somen A, B, die außer dem leeren Soma O keine weiteren gemeinsamen Teile besitzen, heißen fremd (oder disjunkt). Sind A und B fremd, so schreiben wir

$$A \circ B. \tag{3. 2}$$

Unmittelbar aus dieser Definition folgen die beiden Sätze:

Satz 6. Ist $B \subseteq A$ und ist $B \circ A$, so ist $B = O$.

In der Tat muß ja B gemeinsamer Teil von A und B sein.

Satz 7. Mit $B \circ A$ ist für jeden Teil C von B auch $C \circ A$.

Jeder gemeinsame Teil von C und A muß nämlich auch gemeinsamer Teil von B und A und daher gleich O sein.

Wir können alle bisherigen Axiome verifizieren, wenn wir die Somen als offene lineare Teilintervalle eines fest gegebenen Intervalls auf der x-Achse deuten und für die Vereinigung von zwei Somen das kleinste offene Intervall nehmen, das die beiden Somen enthält. Dann kann es vorkommen, daß ein nicht leeres Soma C die Relationen $C \circ A$, $C \circ B$ und $C \subseteq A \dotplus B$ gleichzeitig erfüllt.

Wählt man zweitens für die Somen beliebige abgeschlossene Punktmengen eines Euklidischen Raumes und setzt die Vereinigung von abzählbar vielen derartigen Somen A_k gleich der abgeschlossenen Hülle der Vereinigung der Punktmengen, die diese Somen darstellen, so sind nicht nur alle bisherigen Axiome erfüllt, sondern es folgt auch aus $C \circ A$ und $C \circ B$ die Relation $C \circ (A \dotplus B)$. Sind aber unendlich viele Somen A_k gegeben, so folgt hier nicht notwendig aus $C \circ A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, daß auch $C \circ (A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots)$ sein muß. Das folgende Axiom 5 stellt daher eine neue Forderung dar, die man nicht auf eine einfachere reduzieren kann.

Axiom 5. Ist ein Soma B fremd allen Somen $A_1, A_2, \ldots$ einer Folge, so ist B ebenfalls fremd der Vereinigung $A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots\ldots$ dieser Somen.

Um unsere Theorie zu vervollständigen, müssen wir ein letztes Axiom fordern.

Axiom 6. Sind A und B zwei beliebige Somen, so gibt es immer mindestens ein Soma B_1, das den Bedingungen

$$B_1 \circ A, \; B_1 \dotplus B = B, \; B_1 \dotplus A = B \dotplus A \tag{3.3}$$

gleichzeitig genügt.

Dieses Axiom stellt wieder eine von den früheren unabhängige Forderung dar. Wählt man für die Somen die offenen Punktmengen einer Ebene, so gelten alle Axiome 1 bis 5. Stellen aber die Somen A und B das Innere von Kreisen, die sich schneiden, dar, so können die Relationen (3. 3) nicht erfüllt werden.

Das Axiom 6 ist einem Satz äquivalent, der bequemer zu handhaben ist als das Axiom 6 selbst.

Wenden wir nämlich das Axiom 6 auf das Paar B_1 und B von Somen an, die in (3. 3) vorkommen, so erhält man ein gewisses Soma B_2 mit den Relationen

$$B_2 \circ B_1, \; B_2 \dotplus B = B, \; B_2 \dotplus B_1 = B \dotplus B_1. \tag{3.4}$$

Wegen der zweiten Formel in (3.3) hat man also auch

$$B_1 \dotplus B_2 = B. \tag{3.5}$$

Wir wenden ein zweites Mal das Axiom 6 auf die Somen A und B_2 an und erhalten ein B_3 mit

$$B_3 \circ A, \; B_3 \dotplus B_2 = B_2, \; B_3 \dotplus A = B_2 \dotplus A. \tag{3.6}$$

Nun folgt aus (3. 6) und (3. 4), daß gleichzeitig $B_3 \subseteq B_2$ und $B_2 \circ B_1$ ist; nach Satz 7 ist dann $B_3 \circ B_1$. Mit Berücksichtigung von $B_3 \circ A$ und von $B_1 \dotplus A = B \dotplus A$ findet man hierauf nach Axiom 5

$$B_3 \circ (A \dotplus B). \tag{3.7}$$

Andererseits hat man nach (3.6) und (3.4)

$$B_3 \subseteqq B_2 \subseteqq B \subseteqq A \dotplus B. \tag{3.8}$$

Aus diesen letzten Beziehungen folgt nach Satz 6, daß $B_3 = O$ ist, und man hat schließlich nach (3. 6)

$$B_2 \dotplus A = A. \tag{3. 9}$$

Es gilt daher der

Satz 8. Sind A und B zwei beliebige Somen, so gibt es immer Paare B_1 und B_2 von Somen, die den Bedingungen

$$B_1 \dotplus B_2 = B, \quad B_1 \circ A, \quad B_2 \subseteqq A \tag{3. 10}$$

gleichzeitig genügen.

4. Durchschnitt. Summe. Differenz. Man kann jetzt zeigen, daß alle Verknüpfungseigenschaften der gewöhnlichen Punktmengen des Euklidischen Raumes auch für die Somen gelten. Wir beweisen hierzu den

Satz 9. Ist $C \subseteqq A \dotplus B$ und ist gleichzeitig $C \circ B$, so ist $C \subseteqq A$.

Nach dem Satz 8 kann man nämlich schreiben

$$C = C_1 \dotplus C_2, \quad C_1 \circ A, \quad C_2 \subseteqq A.$$

Aus $C_1 \subseteqq C$ und $C \circ B$ folgt aber nach Satz 7, daß $C_1 \circ B$ sein muß. Nun ist nach dem Axiom 5

$$C_1 \circ (A \dotplus B)$$

und nach Voraussetzung ist $C_1 \subseteqq C \subseteqq (A \dotplus B)$.

Also muß nach Satz 6 das Soma $C_1 = O$ sein, und man hat schließlich

$$C = C_2 \dotplus O = C_2 \subseteqq A,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir sind jetzt imstande, ein Gegenstück zu den Ausführungen am Anfang des § 2 auszusprechen. Es gilt der

Satz 10. Unter den gemeinsamen Teilen von zwei Somen A und B gibt es einen größten, der der Durchschnitt von A mit B genannt wird.

Der Durchschnitt von A mit B wird durch das Zeichen AB dargestellt.

Es seien B_1 und B_2 die Somen, für welche die Relationen (3. 10) gelten, und C sei ein beliebiger gemeinsamer Teil von A und B. Aus $C \subseteqq A$ und $A \circ B_1$ folgt nach Satz 7, daß $C \circ B_1$ ist. Aus $C \subseteqq B = B_1 \dotplus B_2$ und $C \circ B_1$ folgt nach Satz 9, daß $C \subseteqq B_2$ ist. Nun ist aber B_2 selbst ein gemeinsamer Teil von A und B; es ist also $B_2 = AB$, und der Durchschnitt AB von zwei gegebenen Somen ist wegen seiner charakteristischen Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Wir heben noch folgendes Analogon der Definition 1 hervor:

Satz 11. Das Soma B ist dann und nur dann ein Teil von A, wenn $AB = B$ ist.

Ist $AB = B$, so ist B ein Teil von A; ist $B \subseteqq A$, so ist jeder Teil von B und insbesondere B selbst gemeinsamer Teil von A und B, und daher ist $B = AB$.

5. Wir führen jetzt neue Bezeichnungen ein: die Vereinigung von zwei fremden Somen B_1, B_2 soll ihre Summe genannt und mit $B_1 + B_2$ bezeichnet werden. Das Symbol $B_1 + B_2$ hat also nur dann einen Sinn, wenn $B_1 \circ B_2$ ist. Ist $A = B_1 + B_2$, so soll B_2 die Differenz von A und B_1 genannt und mit $A - B_1$ bezeichnet werden.

Nach Satz 7 sind in (3. 10) die Somen B_1 und $B_2 = AB$ fremd, und man kann schreiben

$$B_1 = B - AB.$$

Ist C ein Teil des Somas B, das dem Soma A fremd ist, so ist nach Satz 7 auch $C \circ B_2$, und nach Satz 9 ist also $C \subseteqq B_1$. Es gilt demnach der

Satz 12. Sind A, B beliebige Somen, so gibt es stets einen größten Teil von B, nämlich $(B - AB)$, der dem Soma A fremd ist.

Gleichzeitig folgt, daß die Zerlegung (3. 10) des Somas B eindeutig ist.

Zusammenfassend haben wir folgendes Resultat: Sind A, B

beliebige Somen, so sind die Somen AB, $A - AB$, $B - AB$ paarweise fremd und es gelten die Gleichungen

$$A = AB + (A - AB)$$
$$B = AB + (B - AB)$$
$$A \dotplus B = AB + (A - AB) + (B - AB).$$

Ferner ist $AB = O$ äquivalent mit $A \circ B$ und $A - AB = O$ ist äquivalent mit $A \subseteqq B$.

6. Nach der Definition des Durchschnitts AB der beiden Somen A und B ist

(6. 1) $$AB = BA.$$

Sind A, B, C drei Somen und setzt man

(6. 2) $$D' = BC,\ D = AD',$$

so ist D ein gemeinsamer Teil von A, B und C. Ist ferner U ein gemeinsamer Teil dieser drei Somen, so hat man $U \subseteqq D'$ und daher auch $U \subseteqq D$. Das Soma D ist also der größte gemeinsame Teil von A, B und C, und da dieser letzte Begriff symmetrisch ist, hat man

(6. 3) $$A(BC) = (AB)C.$$

Wir betrachten eine Folge von endlich vielen oder von abzählbar vielen Somen A_k und bezeichnen mit V ihre Vereinigung. Ist dann B ein weiteres Soma, so führen wir die Bezeichnungen ein

(6. 4) $$D = BV$$

(6. 5) $$D' = BA_1 \dotplus BA_2 \dotplus \ldots.$$

Für alle Somen BA_k hat man $BA_k \subseteqq B$ und $BA_k \subseteqq A_k \subseteqq V$. Es ist also $D' \subseteqq B$ und $D' \subseteqq V$, und folglich

(6. 6) $$D' \subseteqq D.$$

Setzen wir weiter

$$A_k = BA_k + (A_k - BA_k)$$

und bezeichnen mit D'' die Vereinigung aller $A_k - BA_k$, so ist nach dem Satze 5:

$$V = D' \dotplus D''.$$

Aus $(A_k - BA_k) \circ B$ folgt nach dem Axiom 5, daß $D'' \circ B$ ist. Da aber $D \subseteqq B$ ist, muß nach Satz 7 auch $D \circ D''$ sein; nun ist aber $D \subseteqq V = D' \dotplus D''$ und daher nach Satz 9

$$D \subseteqq D'; \tag{6.7}$$

aus (6. 6), (6. 7) folgt schließlich $D = D'$ oder

$$BV = BA_1 \dotplus BA_2 \dotplus \dots. \tag{6.8}$$

Zusammenfassend gilt der

Satz 13. Für den Durchschnitt AB von beliebigen Somen gelten das kommutative und das assoziative Gesetz

$$AB = BA, \quad A(BC) = (AB)C.$$

Für den Durchschnitt eines Somas B mit der Vereinigung V von endlich oder von abzählbar vielen Somen gilt das distributive Gesetz (6. 8).

7. Es seien $A_1, A_2, \dots$ beliebige Somen. Wir setzen

$$D_1 = A_1, D_2 = A_1 A_2, \dots, D_k = A_1 A_2 \dots A_k, \dots. \tag{7.1}$$

Dann haben wir $D_k \supseteqq D_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Ferner sei

$$D_1 = D_k + D'_k = D_{k+1} + D'_{k+1}. \tag{7.2}$$

Aus $D'_{k+1} = D'_k + (D_k - D_{k+1})$ folgt $D'_k \subseteqq D'_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Wir bezeichnen mit D' die Vereinigung aller D'_k; dann ist $D' \subseteqq D_1$ und man kann setzen

$$D_1 = D' + D. \tag{7.3}$$

Dann ist $D_k = D + (D' - D'_k)$ und daher $D \subseteqq D_k$ und folglich $D \subseteqq A_k$ für alle $k = 1, 2, \dots$.

Umgekehrt sei $B \subseteqq A_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. Dann ist erstens $B \subseteqq D_k$ für alle k, und insbesondere ist $B \subseteqq D_1 = D + D'$. Andererseits folgt aus $D_k \circ D'_k$, daß $B \circ D'_k$ für alle Werte von k sein muß. Nach Axiom 5 ist dann $B \circ D'$ und nach dem Satze 9 ist $B \subseteqq D$.

Es folgt also der

Satz 14. Die abzählbar vielen Somen $A_1, A_2, \ldots$ einer Folge besitzen einen größten gemeinsamen Teil D, der der Durchschnitt der Somen der Folge genannt wird.

8. Wir betrachten wieder eine Folge von beliebigen Somen A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ und setzen

$$V_k = A_k \dotplus A_{k+1} \dotplus \ldots, \quad D_k = A_k\, A_{k+1} \ldots . \tag{8. 1}$$

Dann ist

$$V_k \supseteqq V_{k+1}, \quad D_k \subseteqq D_{k+1}, \tag{8. 2}$$

und wir können zwei neue Somen definieren, die durch die Gleichungen

$$\overline{\lim_{n=\infty}}\, A_n = V_1\, V_2\, V_3 \ldots . \tag{8. 3}$$

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\, A_n = D_1 \dotplus D_2 \dotplus D_3 \dotplus \ldots . \tag{8. 4}$$

definiert werden.

Man beachte, daß für jedes k und für jedes m

$$D_k \subseteqq V_m \tag{8. 5}$$

ist. Es folgt hieraus und aus (8. 3) für jedes k

$$D_k \subseteqq \overline{\lim_{n=\infty}}\, A_n, \tag{8. 6}$$

und es ist also auch

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\, A_n \subseteqq \overline{\lim_{n=\infty}}\, A_n. \tag{8. 7}$$

Falls die beiden Somen (8. 3) und (8. 4) übereinstimmen, so sagt man, daß die Folge der Somen A_n gegen $\lim\limits_{n=\infty} A_n$ *konvergiert*.

Dies ist insbesondere der Fall, wenn die Folge der A_k monoton ist, d. h. wenn $A_k \subseteqq A_{k+1}$ oder wenn $A_{k+1} \subseteqq A_k$ für jedes k ist.

Es seien A'_k, A''_k zwei Folgen von Somen.

Wir setzen

$$A_k = A'_k \dotplus A''_k \tag{8. 8}$$

und führen mit ähnlichen Bezeichnungen wie früher die Somen V_k, V'_k, V''_k, D_k, D'_k, D''_k ein. Man hat dann

$$V_k = V'_k \dotplus V''_k \tag{8. 9}$$

und nach (8. 5)

$$V'_k \dotplus D''_m \subseteqq V_k. \tag{8. 10}$$

Ferner ist

$$(A'_k \dotplus A''_k) \ldots (A'_{k+p} \dotplus A''_{k+p}) \supseteqq D'_k \dotplus D''_k, \tag{8. 11}$$

woraus folgt

$$D'_k \dotplus D''_k \subseteqq D_k. \tag{8. 12}$$

Ähnlich hat man für jedes p

(8. 13)

$$D_k \subseteqq (V'_k \dotplus A''_k) \ldots (V'_k \dotplus A''_{k+p}) = V'_k \dotplus A''_k \ldots A''_{k+p};$$

daher ist

$$D_k \subseteqq V'_k \dotplus D''_k. \tag{8. 14}$$

Man erhält hieraus leicht

(8. 15)

$$\overline{\lim_{k=\infty}} A'_k \dotplus \underline{\lim_{k=\infty}} A''_k \subseteqq \overline{\lim_{k=\infty}} (A'_k \dotplus A''_k) \subseteqq \overline{\lim_{k=\infty}} A'_k \dotplus \overline{\lim_{k=\infty}} A''_k,$$

(8. 16)

$$\underline{\lim_{k=\infty}} A'_k \dotplus \underline{\lim_{k=\infty}} A''_k \subseteqq \underline{\lim_{k=\infty}} (A'_k \dotplus A''_k) \subseteqq \overline{\lim_{k=\infty}} A'_k \dotplus \underline{\lim_{k=\infty}} A''_k.$$

Ganz ähnliche Formeln können für die Folge der Durchschnitte $(A'_k\, A''_k)$ abgeleitet werden.

9. Somen ohne punktartige Teile. Es ist interessant und wichtig festzustellen, daß es Systeme von Somen gibt, die nicht auf einen Körper von Mengen isomorph abgebildet werden können. Die Mengen sind Somen, die Primteile (nämlich ihre Elemente) enthalten. Diese Primteile können als Somen betrachtet werden, die Primsomen sind, d. h. die außer sich selbst und dem leeren Soma keinen Teil haben. Es ist aber leicht, Beispiele von Somen zu bilden, bei welchen jedes nicht leere Soma echte Teile besitzt.

Wir betrachten hierzu gewisse offene Punktmengen eines Euklidischen Raumes von beliebig vielen Dimensionen, auf welche wir die Somen eines solchen Beispiels abbilden wollen.

Ist zunächst α eine beliebige offene Punktmenge dieses Raumes und R_α ihre Begrenzung, so bildet die Gesamtheit der Punkte der Komplementärmenge von α, die nicht zu R_α gehören, eine offene Punktmenge A', deren Begrenzung R eine Teilmenge von R_α ist. Die Punktmenge

$$A = \alpha + (R_\alpha - R) \tag{9. 1}$$

besteht aus lauter inneren Punkten, und ihre Begrenzung fällt mit der Begrenzung R von A' zusammen.

Wir wollen jetzt als Somen *die offenen Punktmengen A des betrachteten Euklidischen Raumes definieren, die mit der Komplementärmenge ihrer abgeschlossenen Hülle eine gemeinsame Begrenzung besitzen.*

Zwei solche Somen werden einander gleichgesetzt, wenn sie im Euklidischen Raum zusammenfallen. Sind zwei beliebige Somen B und C gegeben, so bezeichne man mit α die Vereinigung der beiden entsprechenden offenen Punktmengen und konstruiere die Punktmenge A nach der Gleichung (9. 1). Wir setzen dann

$$A = B \dotplus C \tag{9. 2}$$

und verifizieren, daß das Axiom 2 hier besteht.

Weiter sehen wir, daß nach dieser Definition $A \dotplus B = A$ dann und nur dann gilt, wenn B, als offene Punktmenge betrachtet, eine Teilmenge der offenen Punktmenge A ist. Jetzt sieht man sofort, daß auch die Vereinigung von abzählbar vielen Somen durch dieselbe Konstruktion erhalten wird wie die Vereinigung von B und C. Ferner, daß zwei Somen A und B dann und nur dann fremd sind, wenn die Punktmengen, auf welche sie abgebildet werden, keine gemeinsamen Punkte besitzen. Endlich verifiziert man ebenso leicht die Axiome 5 und 6, indem man benutzt, daß jedem Soma A ein Soma A' zugeordnet werden kann, das ihm komplementär ist.

Alle unsere Bedingungen sind erfüllt; jedes nicht leere Soma A enthält jedoch Teile, die nicht leer sind und die von A verschieden sind, und es gibt daher überhaupt keine „Elemente", aus welchen man die Somen als Mengen darstellen könnte.

10. Bemerkung über die Darstellung von Somen. Das im letzten Paragraphen behandelte Beispiel gibt uns Anlaß, eine merkwürdige Beobachtung zu machen, die die gegenseitige Beeinflussung der Operationen betrifft, die in den beiden ersten Axiomen festgelegt sind.

Das dort behandelte System von Somen haben wir nämlich auf gewisse offene Punktmengen eines Euklidischen Raumes abgebildet, für welche die Operation der Gleichheit im üblichen Sinne genommen wird, die Operation der Vereinigung aber durch einen komplizierteren Prozeß erklärt wird. Nun kann man genau dasselbe System von Somen auf beliebige Punktmengen des Euklidischen Raumes abbilden, für welche diesmal die Operation der Vereinigung im üblichen Sinne genommen wird, die Operation der Gleichheit aber durch eine normale Kongruenz erklärt wird. Wir setzen folgendes fest: Jedes Soma A wird durch eine beliebige Punktmenge α dargestellt. Zwei Somen A und B, die auf die Punktmengen α und β abgebildet werden, sind einander gleich, wenn die inneren Punkte der abgeschlossenen Hüllen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ von α und β zusammenfallen.

Es ist noch leichter als bei der Darstellung des vorigen Paragraphen hier zu verifizieren, daß alle Axiome bestehen.

Die Identität der beiden Systeme von Somen erkennt man nun daran, daß jetzt unter den unendlich vielen Repräsentanten α eines und desselben Somas A genau eine offene Punktmenge vorhanden ist, die, wie im § 9 verlangt wurde, mit der Komplementärmenge ihrer abgeschlossenen Hülle eine gemeinsame Begrenzung besitzt. Bei der Vereinigung von zwei Somen werden diese speziellen Repräsentanten genau ebenso zusammengesetzt, wie früher festgesetzt worden war.

11. Ringe und Körper. Unter einem Ring von Somen versteht man, ähnlich wie bei Hausdorff, eine Menge $\mathfrak{R}$ von Somen, so daß mit je zwei Somen A und B aus $\mathfrak{R}$ sowohl $A \dotplus B$ als auch $A B$ zu $\mathfrak{R}$ gehören. Dagegen braucht $(A - A B)$ nicht ein Soma des Ringes zu sein. Z. B. bilden die offenen Punktmengen eines Euklidischen Raumes einen Ring dieser Art.

Unter einem Körper von Somen versteht man eine Menge $\mathfrak{K}$ von Somen, die mit den Somen A und B immer auch $(A - A B)$ und, falls die beiden Somen fremd sind, auch ihre Summe enthält. Dann muß mit A und B erstens $(B - A B)$, zweitens

$$A - (A - A B) = A B$$

und schließlich auch $A \dotplus B$ im Körper enthalten sein.

Enthält ein Körper von Somen mit abzählbar vielen seiner Elemente immer auch ihre Vereinigung, so sagt man, daß der Körper ein σ-Körper oder besser – da für die Somen dieses Körpers alle Axiome erfüllt sind – ein vollkommener Körper $\overline{\mathfrak{K}}$ ist. Die Überlegungen der §§ 7 und 8 zeigen, daß jeder vollkommene Körper mit den abzählbar unendlich vielen Somen A_k auch ihren Durchschnitt D und ebenfalls auch $\overline{\lim_{n=\infty}} A_n$ und $\underline{\lim_{n=\infty}} A_n$ enthält.

12. Wir beweisen jetzt den

Satz 15. Sind abzählbar viele Somen A_j gegeben, so gibt es einen kleinsten abzählbaren Körper von Somen, der sämtliche A_j enthält.

Wir betrachten zuerst endlich viele Somen

$$B_1, B_2, \ldots, B_m, \tag{12. 1}$$

die paarweise fremd sind. Jeder Körper, der diese Somen enthält, muß dann auch die (2^m-1) Summen

$$U_1 = B_1, U_2 = B_2, U_3 = B_1 + B_2, \ldots, U_k = B_1 + \ldots + B_m, \tag{12.2}$$

die aus den Somen (12. 1) gebildet werden, enthalten. Diese Somen (12. 2) stellen aber schon einen Körper dar; es ist der kleinste Körper, der die Somen (12. 1) enthält.

Die Konstruktion des kleinsten Körpers von Somen, der endlich viele vorgeschriebene Elemente besitzt, kann auf das Vorhergehende zurückgeführt werden. Soll z. B. der kleinste Körper von Somen konstruiert werden, der die beiden Somen A_1 und A_2 enthält, so setze man an Stelle von (12. 1) die Somen

$$A_1 A_2,\quad A_1 - A_1 A_2,\quad A_2 - A_1 A_2. \tag{12. 3}$$

Diese Somen gehören zum gesuchten Körper; sie sind fremd, und der Körper (12. 2), der aus ihnen gebildet wird, enthält sowohl A_1 als A_2. Wir nehmen an, wir hätten eine derartige Konstruktion für n Somen $A_1, \ldots, A_n$ ausgeführt und hätten die Bezeichnungen so gewählt, daß der kleinste Körper, der diese Somen enthält, durch Summenbildungen aus (12. 1) entsteht. Um nun den kleinsten Körper zu erhalten, der außer $A_1, \ldots, A_n$ noch das Soma A_{n+1} enthält, ersetze man das System (12. 1) durch

$$\begin{gathered} A_{n+1}B_1,\quad B_1 - A_{n+1}B_1,\quad A_{n+1}B_2, \ldots,\quad B_m - A_{n+1}B_m, \\ A_{n+1} - A_{n+1}(B_1 + \ldots + B_m). \end{gathered} \tag{12. 4}$$

Sind jetzt abzählbar viele Somen $A_1, A_2, \ldots$ gegeben, so bestimme man für $n = 1, 2, \ldots$ die aus endlich vielen Somen bestehenden kleinsten Körper

$$B_{n1},\ B_{n2},\ \ldots\ B_{n m_n}, \tag{12. 5}$$

die die n ersten Somen $A_1, \ldots, A_n$ enthalten. Jeder der Körper (12. 5) ist in allen folgenden enthalten; man schreibe nacheinander alle diese Systeme auf, indem man jedes Soma, das schon früher vorgekommen ist, wegläßt. Man erhält auf diese Weise einen Körper von abzählbar vielen Somen $U_1, U_2, \ldots$, der den kleinsten Körper darstellt, der alle A_k enthält. Die Folge der Somen $A_1, A_2, \ldots$ nennt man eine Basis des Körpers $\{U_k\}$.

13. Fügt man den Somen $U_1, U_2, \ldots$ irgendeines abzählbaren Körpers $\mathfrak{K}$ die Somen

$$B = U_{k_1} + U_{k_2} + \ldots \tag{13. 1}$$

hinzu, die aus der Vereinigung von abzählbar vielen U_j bestehen, so erhält man einen Ring von Somen, den man nach Hausdorff mit $\mathfrak{K}_\sigma$ bezeichnet und der nicht mehr abzählbar zu sein braucht.

Besteht z. B. die abzählbare Basis $A_1, A_2, \ldots$ eines Körpers von Punktmengen eines Euklidischen m-dimensionalen Raumes aus allen Intervallen, deren Ecken rationale Koordinaten besitzen, so kann man jede offene Punktmenge dieses Raumes in der Gestalt (13. 1) schreiben. Der kleinste vollkommene Körper, der die Punktmengen A_k enthält, besteht aber schon aus der Gesamtheit der Borelschen Punktmengen des betrachteten Raumes.

Kapitel II. Die Maßfunktionen.

14. Definitionen. Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge von Somen. Wird jedem Soma A aus $\mathfrak{A}$ eine reelle Zahl $\varphi(A)$ zugeordnet, so soll $\varphi(A)$ eine Funktion von Somen mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ genannt werden. Im allgemeinen werden wir annehmen, daß $\mathfrak{A}$ ein Körper von Somen ist, und wenn $\mathfrak{A}$ kein Körper ist, werden wir es hervorheben.

Die Somenfunktion $\varphi(A)$ wird monoton wachsend genannt, wenn mit $B \subseteq A$ immer auch $\varphi(B) \leqq \varphi(A)$ ist.

Wir nehmen an, daß A, B zwei fremde Mengen aus $\mathfrak{A}$ sind. Ist dann immer

$$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B), \tag{14. 1}$$

so wird die Somenfunktion $\varphi(A)$ additiv genannt. Ist immer

$$\varphi(A+B) \geqq \varphi(A) + \varphi(B), \tag{14. 2}$$

so heißt $\varphi(A)$ halb-additiv nach oben, und ebenso heißt $\varphi(A)$ halb-additiv nach unten, falls immer

$$\varphi(A+B) \leqq \varphi(A) + \varphi(B) \tag{14. 3}$$

ist.

Wir nehmen jetzt an, daß die Vereinigung V einer Folge von endlich oder abzählbar vielen, paarweise fremden Somen $A_1, A_2, \ldots$ ebenso wie jedes einzelne dieser Somen in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Ist dann immer, wenn dies zutrifft,

$$\varphi(V) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots, \tag{14. 4}$$

so heißt die Somenfunktion $\varphi(A)$ totaladditiv auf $\mathfrak{A}$.

Ist endlich immer – auch wenn die A_j nicht paarweise fremd sind – unter denselben Umständen

$$(14.5) \qquad \varphi(V) \leqq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \dots,$$

so soll die Somenfunktion $\varphi(A)$ vereinigungsbeschränkt genannt werden.[7]

15. Maßfunktionen. Wir werden jetzt Funktionen $\varphi(A)$ von Somen betrachten, für welche $\mathfrak{A}$ ein vollkommener Körper ist. Die Hauptrolle in unserer Theorie werden Somenfunktionen spielen, die erstens nicht-negativ, die zweitens monoton wachsend und die drittens vereinigungsbeschränkt sind. Somenfunktionen, die diese drei Eigenschaften besitzen, sollen Maßfunktionen genannt werden.

Man bemerke, daß man die beiden letzten Eigenschaften zusammenfassen kann, indem man verlangt, daß aus

$$B \subseteq A_1 \dotplus A_2 \dotplus \dots$$

stets die Relation folgen soll

$$\varphi(B) \leqq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \dots$$

Diese Bedingung stellt die Übertragung der Forderung dar, die im Satze 1 der Einleitung ausgesprochen ist.

Durch jede Maßfunktion wird die Gesamtmenge aller Somen in zwei Klassen zerlegt, von denen die eine aus allen Somen besteht, die „für $\varphi(A)$ meßbar" sind, wobei folgende Definition für die Meßbarkeit zugrunde gelegt wird:

Definition 1. Ein Soma U heißt meßbar für eine Maßfunktion $\varphi(A)$, wenn für alle möglichen Somen A immer

$$(15.1) \qquad \varphi(A) = \varphi(AU) + \varphi(A - AU)$$

ist.

Die Menge aller Somen U, die für $\varphi(A)$ meßbar sind, bildet, falls sie nicht leer ist, einen vollkommenen Körper (vgl. meine

[7] Diese Bezeichnung soll nicht etwa bedeuten, daß $\varphi(V)$ immer endlich sein muß. Die Annahme, daß $\varphi(V) = +\infty$ sein kann, ist nicht auszuschließen.

Vorlesungen über reelle Funktionen §§ 239–244). Auf diesem vollkommenen Körper, der der Maßkörper von $\varphi(A)$ genannt werden soll, ist die Funktion $\varphi(A)$ totaladditiv (ibid. § 246).

Da in allen Anwendungen dieser Maßkörper eine hervorragende Rolle spielt, wollen wir den Maßfunktionen von Somen, bei welchen er nicht leer ist, einen besonderen Namen geben und führen folgende Definition ein:

Definition 2. Eine Maßfunktion von Somen wird eine normale Maßfunktion μ^*A genannt, wenn ihr Maßkörper mindestens einen abzählbaren Körper enthält.

Für meßbare Somen U schreiben wir μU an Stelle von $\mu^* U$.

Da jeder Körper das leere Soma O enthält, muß das Soma O für jede normale Maßfunktion meßbar sein, und es folgt aus

$$\mu^*A = \mu^*O + \mu^*(A - O) = \mu O + \mu^*A, \tag{15.2}$$

daß für alle normalen Maßfunktionen $\mu O = 0$ ist, außer wenn μA identisch gleich $+\infty$ ist.

Die Somen N, für welche $\mu N = 0$ ist, werden Nullsomen der Maßfunktion genannt. Alle Nullsomen sind meßbar (a. a. O. § 251).

Man beachte, daß hier entgegen meiner früheren Definition (a. a. O. § 235), die identisch verschwindende Somenfunktion $\mu A \equiv 0$ und die Somenfunktion $\mu A \equiv +\infty$ auch als normale Maßfunktionen aufgefaßt werden. Auch die Bezeichnung „Maßfunktion" habe ich, dem Beispiel von Hahn folgend,[8] etwas weiter gefaßt als in meinem Buche.

Bei der gleichzeitigen Betrachtung von verschiedenen normalen Maßfunktionen sind die Somen besonders zu beachten, die für alle diese Maßfunktionen zugleich meßbar sind. Wir benutzen folgende Definition:

Definition 3. Endlich oder unendlich viele normale Maßfunktionen nennt man vergleichbar, wenn der Durchschnitt aller ihrer Maßkörper unendlich viele Somen enthält.

---

[8] H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin, J. Springer, 1921, S. 424 und S. 430 Fußn.

Für vergleichbare Maßfunktionen gibt es infolgedessen immer einen vollkommenen Körper von Somen, der nicht leer ist und deren einzelne Elemente für alle betrachteten Maßfunktionen gleichzeitig meßbar sind.

Für normale Maßfunktionen gelten die folgenden allgemeinen Sätze:

Satz 1. Ist $\mu^* A$ eine normale Maßfunktion und ist K ein beliebiges Soma, so wird durch die Gleichung

$$\nu^* A = \mu^* (KA) \tag{15.3}$$

eine mit $\mu^* A$ vergleichbare Maßfunktion definiert.

Satz 2. Bezeichnet man mit $\mu_j{}^* A$ eine Folge von endlich vielen vergleichbaren Maßfunktionen und mit a_j eine Folge von nicht-negativen Zahlen, so wird durch

$$\mu^* A = a_1 \mu_1{}^* A + a_2 \mu_2{}^* A + \ldots + a_m \mu_m{}^* A \tag{15.4}$$

eine mit den früheren vergleichbare Maßfunktion definiert.

Satz 3. Werden mit $\mu_j{}^* A$ vergleichbare Maßfunktionen bezeichnet und existiert für jedes Soma A der Grenzwert

$$\nu^* A = \lim_{j = \infty} \mu_j{}^* A, \tag{15.5}$$

so ist die Somenfunktion $\nu^* A$ eine mit den $\mu_j{}^* A$ vergleichbare Maßfunktion, wenn sie vereinigungsbeschränkt ist.

Man bemerke, daß die letzte Voraussetzung dieses Satzes immer erfüllt ist, wenn für jedes Soma A

$$\nu^* A \geqq \mu_j{}^* A \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{15.6}$$

ist. Man hat dann in der Tat, wenn $V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$ ist,

$$\mu_j{}^* V \leqq \mu_j{}^* A_1 + \mu_j{}^* A_2 + \ldots \leqq \nu^* A_1 + \nu^* A_2 + \ldots, \tag{15.7}$$

woraus durch Grenzübergang nach (15.5) folgt:

$$\nu^* V \leqq \nu^* A_1 + \nu^* A_2 + \ldots \tag{15.8}$$

16. Konstruktion von Maßfunktionen. Die einfachste Methode, um Maßfunktionen zu erhalten, ist folgende.

Es sei $\mathfrak{U}$ eine Menge von Somen U, die keinen Körper zu bilden braucht, die aber die Eigenschaft besitzt, daß jedes Soma A durch die Vereinigung von endlich- oder abzählbarvielen Somen U_j aus $\mathfrak{U}$ überdeckt werden kann. Jedem Soma U aus $\mathfrak{U}$ ordnen wir eine nicht-negative Zahl $p\,(U)$ zu, die wir das G e w i c h t von U nennen.

Ein beliebiges Soma A überdecken wir mit endlich- oder abzählbarvielen Somen U_j aus $\mathfrak{U}$ und bilden die Summe

$$\sum_j p\,(U_j). \tag{16. 1}$$

Dann setzen wir $\mu^* A$ gleich der unteren Grenze aller auf diese Weise berechneten Zahlen (16. 1). Bezeichnen wir die Vereinigung der Folge der U_j mit $V\,(U_j)$, so können wir also schreiben

$$\mu^* A = g(\sum_j p\,(U_j);\; V\,(U_j) \supseteqq A). \tag{16. 2}$$

Man beweist ohne Mühe, daß $\mu^* A$ nicht-negativ, monoton wachsend und vereinigungsbeschränkt ist; die Somenfunktion $\mu^* A$ ist also eine Maßfunktion. Außerdem ist nach (16. 2)

$$\mu^* U \leqq p\,(U) \qquad (U \varepsilon \mathfrak{U}). \tag{16. 3}$$

Es sei $\nu^* A$ eine weitere Maßfunktion, die diese letztere Eigenschaft besitzt. Für jedes Soma A hat man, falls $V\,(U_j) \supseteqq A$ ist,

$$\nu^* A \leqq \sum_j \nu^* U_j \leqq \sum_j p\,(U_j), \tag{16. 4}$$

und hieraus folgt

$$\nu^* A \leqq \mu^* A\,. \tag{16. 5}$$

Die Funktion von Somen $\mu^* A$, die durch die Gleichung (16. 2) definiert wird, ist also die g r ö ß t e Maßfunktion, für welche (16. 3) gilt.

17. Wir müssen jetzt Kriterien entwickeln, die uns erlauben zu schließen, daß die Somenfunktion $\mu^* A$ eine normale Maßfunktion ist. Es gibt verschiedene Arten von solchen Kriterien. Man kann z. B. annehmen, daß die Somen U einen b e l i e b i g e n

Körper $\mathfrak{K}$ bilden und daß die Gewichtsfunktion $p(U)$ auf diesem Körper halbadditiv nach oben ist. Jedes Soma U des Körpers ist dann meßbar für $\mu^* A$.

Es sei nämlich W ein beliebiges Soma, für welches $\mu^* W < +\infty$ ist. Wir setzen

$$(17.1) \qquad A = WU, \quad B = W - WU$$

und bestimmen eine Folge U_j von Somen aus unserem Körper, für welche gleichzeitig

$$(17.2) \qquad W \subseteqq V(U_j), \quad \sum_j p(U_j) \leqq \mu^* W + \varepsilon$$

ist. Setzt man

$$(17.3) \qquad U'_j = U U_j, \quad U''_j = U_j - U U_j,$$

so ist $A \subseteqq V(U'_j)$, $B \subseteqq V(U''_j)$, und daher

$$(17.4) \qquad \mu^* A \leqq \sum_j p(U'_j), \quad \mu^* B \leqq \sum_j p(U''_j).$$

Wegen der angenommenen halben Additivität nach oben der Gewichtsfunktion ist aber

$$(17.5) \qquad p(U_j) \geqq p(U'_j) + p(U''_j),$$

und man hat schließlich

$$(17.6) \qquad \mu^* W \geqq \mu^* WU + \mu^*(W - WU).$$

Aus dieser letzten Relation folgt die Meßbarkeit der U, die zu beweisen war.

18. Für einen gegebenen abzählbaren Körper $\mathfrak{K}$ von Somen mit der Basis $A_1, A_2, \ldots$ ist es sehr leicht, mit Hilfe der Überlegungen des § 12 die allgemeinsten additiven Gewichtsfunktionen zu bestimmen.

Man führe zwei Folgen p_j und θ_j von nichtnegativen Zahlen ein und setze außerdem voraus, daß $0 \leqq \theta_j \leqq 1$ ist. Dann soll A_1 das Gewicht p_1 haben; ferner, falls keines der Somen $A_1 A_2$ und $A_1 - A_1 A_2$ leer ist, so sollen diese Somen die Gewichte $p_1 \theta_1$ und $(1 - \theta_1) p_1$ haben; endlich soll $A_2 - A_1 A_2$, wenn es nicht leer ist, das Gewicht p_2 erhalten. Auf ähnliche Weise fährt man fort, indem man stets aus den Folgen p_j und θ_j die erste

Zahl benutzt, die noch nicht verbraucht worden ist. Dann ist auch für die übrigen Somen des Körpers die Gewichtsverteilung eindeutig bestimmt.

19. Es kann aber sehr wohl vorkommen, daß für gewisse additive Mengenfunktionen $p(U_h)$, die auf dem abzählbaren Körper $\{U_k\}$ definiert sind, die Maßfunktion $\mu^* A$, die wir im § 16 konstruiert haben, durchweg mit den Ungleichheiten

$$(19.\ 1) \qquad \mu\, U_h < p\,(U_h)$$

verbunden ist. Die Möglichkeit, daß unter Umständen $\mu^* A \equiv 0$ ist, muß deshalb in Rechnung gestellt werden. Es ist sogar denkbar, daß es gewisse Körper $\mathfrak{K}$ von Somen gibt, für welche immer $\mu^* A \equiv 0$ ist, sobald die Gewichtsfunktion $p\,(U_h)$ auf diesem Körper additiv ist. Auf derartig gestaltete Körper gibt es überhaupt keine nicht identisch verschwindende Maßfunktion, für welche die Somen von $\mathfrak{K}$ meßbar sind. Das folgende Beispiel ist besonders lehrreich:

Mit ξ_i bezeichnen wir die abzählbar vielen rationalen Punkte der x-Achse; wir ordnen jedem ξ_i eine positive Zahl α_i zu und nehmen an, daß $\sum\limits_i \alpha_i < \infty$ ist.

Nun betrachten wir die halbgeschlossenen Intervalle

$$\delta_{ij} : \xi_i \leqq x < \xi_j$$

und den abzählbaren Körper $\{U_k\}$, der aus der Basis dieser Intervalle gebildet wird. Jede der Punktmengen U_k besteht aus endlich vielen Intervallen δ_{ij}, die vollkommen getrennt liegen, die also auch keinen gemeinsamen Endpunkt besitzen.

Ordnet man nun erstens jedem Intervall δ_{ij} als Gewicht die Summe der Zahlen α_m zu, die den Punkten ξ_m im Inneren von δ_{ij} entsprechen, und fügt man noch das Gewicht α_i des linken Endpunktes ξ_i hinzu, so erhält man eine erste additive Gewichtsfunktion p'_k, die jedem U_k zugeteilt ist, und man findet, daß unter diesen Umständen $\mu U_k = p'_k$ ist.

Fügt man aber der Summe der α_m die Zahl α_j zu, die dem rechten Endpunkt entspricht, so erhält man eine zweite Gewichtsfunktion p''_k, die ebenfalls additiv ist, aber man findet jetzt, daß $\mu^* A \equiv 0$ sein muß.

20. Es genügt aber schon, daß $p(U)$ totaladditiv auf dem Körper $\mathfrak{K}$ sei, um schließen zu können, daß

$$\mu U = p(U) \tag{20. 1}$$

ist. Es gibt in der Tat jedenfalls Somen U'_j $(j = 1, 2, \ldots)$ des Körpers, für welche, nach Vorgabe einer beliebigen positiven Zahl ε, gleichzeitig

$$U'_1 \dotplus U'_2 \dotplus \ldots . \supseteqq U$$

und

$$\sum_j p(U'_j) < \mu U + \varepsilon$$

gilt. Man kann dann Somen $U''_1, U''_2, \ldots$ finden, die paarweise fremd sind und für welche einerseits $U''_j \subseteqq U'_j$, andererseits $U = U''_1 + U''_2 + \ldots .$ ist.

Wegen der totalen Additivität von $p(U)$ hat man nun

$$p(U) = p(U''_1) + p(U''_2) + \ldots \leqq p(U'_1) + p(U'_2) + \ldots,$$

und daher ist auch

$$p(U) \leqq \mu U,$$

eine Relation, die die Gleichung (20. 1) nach sich zieht.

Das letzte Beispiel des vorigen Paragraphen zeigt also insbesondere, daß es additive Funktionen $p(U_k)$ gibt, die nicht totaladditiv sind.

21. Inhaltsfunktionen. Die Maßfunktionen, die wir konstruiert haben, besitzen spezielle Eigenschaften, die man hervorheben muß.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}$ den Körper von Somen, den wir unseren Überlegungen zugrunde gelegt haben, und bilden erstens das System $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}_\sigma$ der Somen, die aus der Vereinigung von endlich- oder abzählbarvielen Somen aus $\mathfrak{K}$ bestehen; zweitens bilden wir das System $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}_{\sigma\delta}$ der Somen, die als Durchschnitt von endlich- oder abzählbarvielen Somen aus $\mathfrak{K}'$ dargestellt werden können.

Jedes beliebige Soma A mit $\mu^* A < +\infty$ kann man mit endlich- oder abzählbarvielen Somen U_j aus $\mathfrak{K}$ überdecken, so daß (für ein gegebenes $\varepsilon > 0$)

$$\mu^* A + \varepsilon > \sum_j p(U_j) \tag{21. 1}$$

sei. Bezeichnet man mit U die Vereinigung aller U_j, so gehört das Soma U dem System $\mathfrak{K}'$ an. Man hat nun

$$\mu U \leqq \sum_j \mu U_j \leqq \sum_j p(U_j), \tag{21. 2}$$

und da $A \subseteqq U$ ist, hat man endlich

$$\mu U - \varepsilon < \mu^* A \leqq \mu U. \tag{21. 3}$$

Hieraus folgt die Existenz einer maßgleichen Hülle $\bar{A}$ von A, die als Soma von $\mathfrak{K}^*$ dargestellt werden kann.

Jede Maßfunktion, die diese Eigenschaft besitzt, und für welche außerdem für alle Somen U aus dem ursprünglichen Körper $\mu U < +\infty$ ist, soll eine Inhaltsfunktion von Somen genannt werden.[8]

22. Die Bedeutung dieser Inhaltsfunktionen folgt aus den folgenden Überlegungen. Es sei $\rho^* A$ eine beliebige Maßfunktion, die für den Körper $\mathfrak{K}$ meßbar ist. Ist dann K ein Soma, für welches $\rho^* K < \infty$ ist, so ist die Somenfunktion

$$\nu^* A = \rho^* (KA) \tag{22. 1}$$

eine durchweg endliche und auf $\mathfrak{K}$ meßbare Maßfunktion. Auf dem Körper $\mathfrak{K}$ ist also $\nu^* A$ totaladditiv. Nach den §§ 20 und 21 gibt es dann eine Inhaltsfunktion $\mu^* A$, die auf allen Somen aus $\mathfrak{K}$ der Bedingung

$$\mu U = \nu U \tag{22. 2.}$$

genügt. Dann muß aber $\mu A = \nu A$ sein auf allen Somen, die zum vollkommenen Körper $\bar{\mathfrak{K}}$ gehören, der aus dem Körper $\mathfrak{K}$ durch Limesbildungen entsteht. Da man sehr oft die Maßfunktionen nur auf Somen von $\bar{\mathfrak{K}}$ zu be-

[8] Die Inhaltsfunktionen sind (für metrische Räume) zuerst von H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin, J. Springer (1921) S. 444 definiert und untersucht worden.

rechnen hat, kann man dann die allgemeinsten Maßfunktionen ν^*A durch Inhaltsfunktionen ersetzen.

23. Besonders brauchbar ist diese Bemerkung, wenn man spezielle Maßfunktionen zu betrachten hat, die wir erweiterte Inhaltsfunktionen nennen wollen.

Eine Maßfunktion soll eine erweiterte Inhaltsfunktion genannt werden, wenn jedem Soma A eine maßgleiche Hülle zugeordnet werden kann, die zum vollkommenen Körper $\overline{\mathfrak{K}}$, den wir soeben erwähnt haben, gehört.

Dann kann man ohne Einschränkung voraussetzen, daß das Soma K, das in (22. 1) erscheint, auch zu diesem Körper $\overline{\mathfrak{K}}$ gehört. Ferner folgt ohne Schwierigkeit, daß jetzt die Gleichung (22. 2) durch

$$\mu^*A = \nu^*A \tag{23. 1}$$

ersetzt werden kann, wobei A ein beliebiges Soma bedeutet, das Teil von K ist.

Der Begriff der gewöhnlichen Inhaltsfunktionen ist vielfach für die Anwendungen zu speziell. Z. B. fällt das „lineare Maß" schon nicht mehr unter diesen Begriff. Mit erweiterten Inhaltsfunktionen kann man aber so gut wie alle Fragen behandeln, die bisher in der Analysis vorgekommen sind.

Eine sehr allgemeine Methode, um erweiterte Inhaltsfunktionen zu erhalten, besteht in folgender Modifikation der Überlegungen des § 16. Wir betrachten eine Folge

$$\mathfrak{A}_1 \supseteqq \mathfrak{A}_2 \supseteqq \ldots \tag{23. 2}$$

von ineinandergeschachtelten Mengen von Somen, deren Durchschnitt leer sein kann. Jedem Soma A aus $\mathfrak{A}_1$ wird ein Gewicht $p(A)$ zugeordnet. Bezeichnet man dann mit μ_j^*A die Maßfunktion, die man nach der Konstruktion des § 16 erhält, wenn man nur die Somen aus $\mathfrak{A}_j$ benutzt, so ist

$$\mu_1^*A \leqq \mu_2^*A \leqq \ldots \tag{23. 3}$$

Die Somenfunktion $\mu^*A = \lim\limits_{j=\infty} \mu_j^*A$ ist dann ebenfalls eine Maßfunktion.

Man überlegt sich leicht, daß die Maßfunktionen, die ich in meiner Arbeit über das lineare Maß betrachtet habe, und daß die allgemeineren Maßfunktionen dieser Art, die Herr F. Hausdorff untersucht hat,[9] mit Hilfe der obigen Methode gewonnen werden können. Wie aus diesen Arbeiten hervorgeht, ist es – wenigstens in metrischen Räumen – immer möglich zu erzwingen, daß die Grenzfunktion $\mu^* A$ eine erweiterte Inhaltsfunktion ist, selbst wenn die einzelnen Näherungsfunktionen $\mu_j^* A$ keine normalen Maßfunktionen sind.

24. Für Inhaltsfunktionen ist es möglich, den Begriff der Vergleichbarkeit (§ 15) zu präzisieren.

Zwei oder mehrere Inhaltsfunktionen sollen gleichartig genannt werden, wenn das System $\mathfrak{K}^*$ von Somen, das in ihrer Definition eingeht, für alle betrachteten Inhaltsfunktionen dasselbe ist.

Ebenso sollen mehrere erweiterte Inhaltsfunktionen in beliebiger Anzahl gleichartig genannt werden, wenn der vollkommene Körper $\overline{\mathfrak{K}}$, der in ihrer Definition eingeht, für alle diese Funktionen derselbe ist.

Gleichartige Inhaltsfunktionen sind selbstverständlich nach unserer früheren Definition vergleichbar.

25. Wir erwähnen noch einen Satz, der für viele Untersuchungen außerordentlich bequem ist.

Es sei $\varphi(U)$ eine Somenfunktion, die auf dem Ring $\mathfrak{K}'$, den wir im § 21 aus dem Körper $\mathfrak{K}$ gewonnen haben, nicht-negativ, monoton wachsend und vereinigungsbeschränkt ist. Ist dann $\varphi(U)$ auf dem Körper $\mathfrak{K}$ additiv, so ist $\varphi(U)$ auf $\mathfrak{K}'$ totaladditiv.

Jedes Soma U aus $\mathfrak{K}'$ kann nämlich als Summe von paarweise fremden Somen $U_1, U_2, \ldots$, die alle zu $\mathfrak{K}$ gehören, dargestellt werden. Da $\varphi(U)$ monoton auf $\mathfrak{K}'$ und additiv auf $\mathfrak{K}$ ist, hat man

$$(25.1) \qquad \varphi(U) \geqq \varphi(U_1 + \ldots + U_m) = \varphi(U_1) + \ldots + \varphi(U_m).$$

[9] F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. **79** (1919) S. 157.

Es ist daher

$$\varphi(U) \geqq \varphi(U_1) + \varphi(U_2) + \ldots \tag{25. 2}$$

Da nun $\varphi(U)$ vereinigungsbeschränkt ist, so muß diese Funktion totaladditiv auf $\mathfrak{K}$ sein.

Es gibt daher eine Inhaltsfunktion $\mu^* A$, die auf $\mathfrak{K}'$ meßbar ist und die für alle Mengen U aus $\mathfrak{K}'$ der Bedingung $\mu U = \varphi(U)$ genügt. Mithin ist $\varphi(U)$ auch auf $\mathfrak{K}'$ totaladditiv.

26. Die Nullvariation und die totalstetigen Funktionen. Die klassischen Resultate von Lebesgue über monotone Funktionen $f(x)$ können ohne Mühe auf unsere Somenfunktionen übertragen werden.

Wir bemerken zunächst, daß wenn $\mu^* A$ und $\mu_1{}^* A$ zwei gleichartige Inhaltsfunktionen sind, die der Definition des § 21 genügen, durch die Gleichung

$$\mu_2{}^* A = \mu^* A - \mu_1{}^* A \tag{26. 1}$$

wieder eine ebensolche Inhaltsfunktion definiert wird, sobald für alle Somen A, für welche $\mu^* A < +\infty$ ist, die rechte Seite dieser Gleichung $\geqq 0$ ist.

Definiert man nämlich für alle Somen U des Körpers $\mathfrak{K}$, auf welchen $\mu^* A$ und $\mu_1{}^* A$ endlich und meßbar sind, die Funktion

$$\varphi(U) = \mu U - \mu_1 U, \tag{26. 2}$$

so ist $\varphi(U)$ totaladditiv auf $\mathfrak{K}$, und es gibt eine Inhaltsfunktion $\mu_2{}^* A$, die auf $\mathfrak{K}$ mit $\varphi(U)$ zusammenfällt. Dann muß aber auch die Gleichung (26. 1) ganz allgemein für $\mu_2{}^* A$ gelten, sobald ihre rechte Seite einen Sinn hat.

27. Es seien $\mu^* A$ und $\nu^* A$ zwei gleichartige Inhaltsfunktionen und $\mathfrak{K}$ sei ein abzählbarer Körper, auf welchem diese Funktionen gleichzeitig meßbar sind.

Für die Inhaltsfunktion $\mu^* A$ soll ferner folgende Eigenschaft gelten: jedem Soma U_k aus $\mathfrak{K}$ und jeder positiven Zahl ε soll man Somen U_j aus $\mathfrak{K}$ zuordnen können, für welche gleichzeitig

(27.1) $$U_j \subseteqq U_k, \quad \mu U_j < \varepsilon$$

ist.

Es sei jetzt U ein beliebiges Soma, das dem Ring $\mathfrak{K}'$ angehört, der im § 21 definiert worden ist, und λ sei eine beliebige positive Zahl. Wir bezeichnen mit $\varphi_\lambda(U)$ die obere Grenze aller Zahlen $\nu U'$, wenn U' ein Soma aus $\mathfrak{K}'$ bedeutet, für welches gleichzeitig $U' \subseteqq U$ und $\mu U' < \lambda$ ist. Wir drücken dies aus durch die Formel

(27.2) $$\varphi_\lambda(U) = G(\nu U';\ U' \subseteqq U, \mu U' < \lambda).$$

Für jedes gegebene U nimmt $\varphi_\lambda(U)$ mit λ monoton ab, und es existiert also der Grenzwert

(27.3) $$\varphi_0(U) = \lim_{\lambda = 0} \varphi_\lambda(U).$$

Jeder natürlichen Zahl k können wir nach (27.2) ein Soma U'_k zuordnen, für welches

(27.4) $$U'_k \subseteqq U, \ \mu U'_k < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \nu U'_k > \varphi_{\frac{1}{2^{k+1}}}(U) - \frac{1}{2^k}$$

besteht. Setzen wir dann

(27.5) $$V'_k = U'_k \dot{+} U'_{k+1} \dot{+} \ldots,$$

so ist

(27.6) $$V'_k \subseteqq U, \quad \mu V'_k < \frac{1}{2^k}$$

und daher

(27.7) $$\nu V'_k \leqq \varphi_{\frac{1}{2^k}}(U).$$

Andererseits ist für jede natürliche Zahl p nach (27.5) und (27.4)

(27.8) $$V'_k \supseteqq U'_{k+p}, \quad \nu V'_k > \varphi_0(U) - \frac{1}{2^{k+p}},$$

und also auch $\nu V'_k \geqq \varphi_0(U)$.

Nun setzen wir

(27.9) $$V = \lim_{k=\infty} V'_k = \overline{\lim_{k=\infty}} U'_k$$

und erhalten

$$(27.\ 10) \qquad \mu V = 0, \quad \nu V = \varphi_0 (U).$$

Auf diese Weise kann man jedem Soma U_j aus $\mathfrak{K}$ ein Soma V_j zuordnen, für welches die Relationen $V_j \subseteqq U_j$, $\mu V_j = 0$ und $\nu V_j = \varphi_0 (U_j)$ gelten. Setzen wir dann

$$(27.\ 11) \qquad V_0 = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots,$$

so können wir durch die Gleichung

$$(27.\ 12) \qquad \nu_0{}^* A = \nu^* (V_0 A)$$

eine Inhaltsfunktion definieren, die wir die Nullvariation von $\nu^* A$ bezüglich der Inhaltsfunktion $\mu^* A$ nennen.

Die Nullvariation hebt denjenigen, möglicherweise nicht identisch verschwindenden Bestandteil der Inhaltsfunktion $\nu^* A$ heraus, der auf Nullmengen von $\mu^* A$ konzentriert ist.

28. Nach (27. 12) ist immer $\nu_0{}^* A \leqq \nu^* A$ und nach dem § 26 ist dann

$$(28.\ 1) \qquad \rho^* A = \nu^* A - \nu_0{}^* A$$

eine Inhaltsfunktion. Es soll jetzt für $\rho^* A$ die der Funktion (27. 2) analoge Funktion

$$(28.\ 2) \qquad \rho_\lambda U = \boldsymbol{G} (\rho U';\ U' \subseteqq U;\ \mu U' < \lambda)$$

abgeschätzt werden.

Es sei U ein beliebiges Soma aus $\mathfrak{K}'$ und U' ein ebensolches Soma, für welches $U' \subseteqq U$ und $\mu U' < \lambda$ ist. Da $\mu (V_0 U) = 0$ ist, kann man jeder positiven Zahl ε ein Soma U'' zuordnen, für welches

$$V_0 U \subseteqq U'' \subseteqq U, \ \mu U'' < \varepsilon$$

ist. Wir können dann schreiben

$$\nu (U' \dotplus U'') \leqq \varphi_{\lambda+\varepsilon} (U),$$

wobei $\varphi_{\lambda+\varepsilon} (U)$ durch (27. 2) definiert wird. Andererseits folgt aus $(U' \dotplus U'') V_0 = U V_0$, daß

$$\nu_0 (U' \dotplus U'') = \nu \left((U' \dotplus U'') V_0\right) = \nu (U V_0) = \nu_0 U$$

ist, und man erhält schließlich

$$\rho\, U' \leqq \rho\,(U' \dotplus U'') \leqq \varphi_{\lambda+\varepsilon}(U) - \varphi_0(U).$$

Hieraus folgt nach (28. 2)

$$\rho_\lambda\, U \leqq \varphi_\lambda(U) - \varphi_0(U). \tag{28. 3}$$

Insbesondere ist die Nullvariation $\rho_0{}^*A \equiv 0$, und die Inhaltsfunktion ρ^*A heißt totalstetig bezüglich der Inhaltsfunktion μ^*A.

Kapitel III. Die Lebesgue-Stieltjesschen Integrale

29. Die abstrakten Ortsfunktionen. In den gewöhnlichen Euklidischen Räumen ist der Begriff der Punktfunktion $f(P)$ einer der einfachsten, die man bilden kann. Um aber diesen Begriff auf den Bereich der Somen zu übertragen, müssen wir ihn durch einen komplizierteren ersetzen, der in gewöhnlichen Räumen mit dem ersten gleichgesetzt werden kann. Hierzu bemerken wir, daß $f(P)$ völlig bestimmt ist, wenn wir auf jeder Punktmenge A, auf welcher $f(P)$ definiert ist, die untere Grenze $\alpha(A)$ und die obere Grenze $\beta(A)$ von $f(P)$ kennen. Indem wir einige Eigenschaften der beiden Mengenfunktionen $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ hervorheben, durch welche diese charakterisiert werden, erhalten wir folgende allgemeine Definition.

Eine abstrakte Ortsfunktion f wird durch zwei Somenfunktionen $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ gegeben, die beide auf jedem vom leeren Soma O verschiedenen Soma A definiert sind und folgende Eigenschaften besitzen:

1) Es gibt zwei endliche oder unendliche Zahlen λ_1, λ_2, so daß für jedes Soma $A \neq O$

$$\lambda_1 \leqq \alpha(A) \leqq \beta(A) \leqq \lambda_2 \tag{29. 1}$$

ist.

2) Die Somenfunktion $\alpha(A)$ ist monoton abnehmend und die Somenfunktion $\beta(A)$ monoton wachsend.

3) Ist $\lambda_1 < \lambda_2$, so gibt es mindestens eine im Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ überall dicht liegende Folge von Zahlen y_k,

denen die Somen A_k eindeutig zugeordnet sind, so daß erstens immer $\beta(A_k) \leqq y_k$ ist und zweitens für jedes Soma $B \circ A_k$ immer $\alpha(B) \geqq y_k$ ist.

Man stellt sofort fest, daß mit $y_k < y_m$ immer $A_k \subseteqq A_m$ stattfinden muß. Im entgegengesetzten Falle würde ein Soma $B \neq O$ existieren, für welches die Relationen $B \subseteqq A_k$ und $B \circ A_m$ gleichzeitig gelten würden. Dann müßte man aber haben

$$\alpha(B) \geqq y_m, \quad \beta(B) \leqq \beta(A_k) \leqq y_k,$$

und entgegen (29. 1), wäre $\alpha(B) > \beta(B)$.

Sind die Zahlen y_k in einem Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ beliebig gegeben, doch so, daß sie in diesem Intervall überall dicht liegen und paarweise voneinander verschieden sind, und wird jeder dieser Zahlen y_k ein Soma A_k eindeutig zugeordnet, so wird hierdurch eine abstrakte Ortsfunktion f eindeutig bestimmt, wenn nur immer aus $y_k < y_m$ folgt, daß $A_k \subseteqq A_m$ sein soll.

Es sei A ein beliebiges Soma. Ist für alle Werte von k immer $AA_k = O$, so setze man $\alpha(A) = \lambda_2$. Sonst bezeichne man mit α' die untere Grenze der y_k, für welche $AA_k \neq O$ ist. Für $y_k > \alpha'$ hat man dann

$$\alpha(A) \leqq \alpha(A A_k) \leqq \beta(A A_k) \leqq \beta(A_k) \leqq y_k,$$

und es muß daher

$$\alpha(A) \leqq \alpha'$$

sein. Ist also $\alpha' = \lambda_1$, so muß $\alpha(A) = \lambda_1$ sein. Ist aber $\lambda_1 < \alpha'$, so ist für jedes $y_p < \alpha'$ nach unserer Annahme $A \circ A_p$, und es muß dann auch $\alpha(A) \geqq y_p$ sein. Man schließt hieraus, daß $\alpha(A) \geqq \alpha'$ ist, und erhält schließlich

$$\alpha(A) = \alpha'. \tag{29. 2}$$

Wir betrachten jetzt für die verschiedenen Werte von k die Somen $(A - AA_k)$. Ist erstens immer $A - A A_k = O$, so setze man $\beta(A) = \lambda_1$. Sonst berechnen wir die obere Grenze β' aller y_k, für welche $A - A A_k \neq O$ ist. Aus $(A - A A_k) \circ A_k$ folgt dann mit $y_k \leqq \beta'$

$$y_k \leqq \alpha(A - A A_k) \leqq \beta(A - A A_k) \leqq \beta(A),$$

und man hat daher

$$\beta(A) \geqq \beta'.$$

Ist nun $\beta' = \lambda_2$, so hat man also zu setzen $\beta(A) = \lambda_2$. Für $\beta' < y_m < \lambda_2$ muß man aber haben $A - A A_m = O$, d. h. $A \subseteqq A_m$, und es muß dann

$$\beta(A) \leqq \beta(A_m) \leqq y_m$$

sein. Man schließt ähnlich wie oben, daß

$$\beta(A) = \beta' \tag{29. 3}$$

ist.

Man verifiziere endlich, daß die beiden auf diese Weise berechneten Somenfunktionen $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ allen Forderungen genügen, die wir für die obere und die untere Grenze einer Ortsfunktion f auf den Somen A gestellt haben.

30. Indem man ähnlich vorgeht wie im Kap. VII meiner Vorlesungen über reelle Funktionen, kann man für eine Ortsfunktion f die Somen $\boldsymbol{M}(f < \lambda)$, $\boldsymbol{M}(f > \lambda)$, $\boldsymbol{M}(f \leqq \lambda)$ u. s. f. bestimmen.

Ferner kann man die verschiedenen Operationen, die für gewöhnliche Punktfunktionen möglich sind, auf unsere Ortsfunktionen übertragen.

Sind z. B. die Ortsfunktionen $f_1, f_2, \ldots$ gegeben, und setzt man

$$A_k(\lambda) = \boldsymbol{M}(f_k < \lambda),$$

so kann man durch

$$(A_1(\lambda) \dotplus A_2(\lambda)) = \boldsymbol{M}(f < \lambda)$$

die Funktion

$$f = \max(f_1, f_2)$$

definieren.

Setzt man zweitens

$$A^*(\lambda) = \lim_{h=0} \left(\overline{\lim_{k=\infty}} A_k(\lambda - h) \right),$$

$$A_*(\lambda) = \lim_{h=0} \left(\underline{\lim_{k=\infty}} A_k(\lambda - h) \right),$$

so werden durch

$$A^*(\lambda) = \boldsymbol{M}(f^* < \lambda), \; A_*(\lambda) = \boldsymbol{M}(f_* < \lambda)$$

die Funktionen

$$f^* = \overline{\lim_{k=\infty}} f_k, \; f_* = \underline{\lim_{k=\infty}} f_k$$

definiert.

Ist für alle Werte von λ

$$A^*(\lambda) = A_*(\lambda) = A(\lambda),$$

so heißt die Folge der Ortsfunktionen konvergent. Man kann auch den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz übertragen, indem man die Existenz einer Folge von positiven Zahlen $h_1, h_2, \ldots$ postuliert, für welche die Relationen

$$A(\lambda - h_k) \subseteqq A_k(\lambda) \subseteqq A(\lambda + h_k), \; \lim_{k=\infty} h_k = 0,$$

für alle Werte von λ erfüllt sind.

Jede Ortsfunktion f kann durch gleichmäßig konvergente Folgen von endlichwertigen Funktionen gewonnen werden.

Sind die Somen $\boldsymbol{M}(f < \lambda)$ meßbar bezüglich einer Inhaltsfunktion $\mu^* A$, so sagt man, daß die Ortsfunktion f meßbar ist für $\mu^* A$.

31. Es sei $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ eine stetige Funktion, die für alle Punkte des n-dimensionalen Raumes der $u_1, \ldots, u_n$ erklärt ist. Sind dann $f_1, \ldots, f_n$ gegebene Ortsfunktionen von Somen, so kann man nach dem Satz 7 des § 349 meiner Vorlesungen über reelle Funktionen eine Ortsfunktion definieren, die mit $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ bezeichnet wird. Mit Hilfe der Begriffsbildungen des vorigen Paragraphen kann man sogar $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ erklären, wenn $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ eine beliebige Borelsche Funktion ist.

Indem man $\varphi = u_1 + u_2$ oder $\varphi = u_1 u_2$ setzt, erhält man auf diese Weise die Summe $f_1 + f_2$ und das Produkt $f_1 f_2$ von zwei gegebenen Ortsfunktionen.

Berechnet man die unteren und oberen Grenzen $\alpha_1(A)$, $\beta_1(A)$, $\alpha_2(A)$, $\beta_2(A)$ der Funktionen f_1 und f_2 auf einem Soma A und die analogen Zahlen $\alpha(A)$, $\beta(A)$ für die Summe $(f_1 + f_2)$ dieser Funktionen, so findet man die Ungleichheiten

$$(31.1) \qquad \alpha_1(A) + \alpha_2(A) \leqq \alpha(A) \leqq \alpha_1(A) + \beta_2(A),$$

$$(31.2) \qquad \alpha_1(A) + \beta_2(A) \leqq \beta(A) \leqq \beta_1(A) + \beta_2(A),$$

die wir weiter unten brauchen werden.

32. Das Lebesgue-Stieltjessche Integral. Es sei $\mu^* A$ eine gewöhnliche oder erweiterte Inhaltsfunktion von Somen (§§ 21, 23) und f eine nicht-negative Ortsfunktion, die für $\mu^* A$ meßbar ist. Das soll heißen, daß die Somen

$$(32.1) \qquad C_0 = M(f = 0),\ C_k = M\left(\frac{1}{k+1} \leqq f \leqq k\right) \quad (k = 1, 2 \ldots)$$

$$(32.2) \qquad D_\alpha^\beta = M(\alpha \leqq f \leqq \beta) \quad (0 < \alpha < \beta < \infty)$$

alle dem vollkommenen Körper $\overline{\mathfrak{K}}$ angehören sollen, der für $\mu^* A$ meßbar ist. Wir machen noch die Voraussetzung, von der man sich bei einer vollständigen Darstellung dieser Theorie befreien kann, daß alle Zahlen $\mu\, C_k$ für $k \geqq 1$ endlich sein sollen.

Als Lebesgue-Stieltjessches Integral

$$(32.3) \qquad J^* A = \int_A f\, d\mu$$

bezeichnen wir eine Somenfunktion, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) $J^* A$ ist eine mit $\mu^* A$ gleichartige gewöhnliche bzw. erweiterte Inhaltsfunktion;

b) Es ist $J C_0 = 0$;

c) bezeichnet man mit $\alpha(A)$ und $\beta(A)$ die untere und die obere Grenze von f auf dem Soma A, so ist, wenn $\mu^* A < \infty$ ist,

$$(32.4) \qquad \alpha(A)\, \mu^* A \leqq J^* A \leqq \beta(A)\, \mu^* A.$$

Es ist leicht zu sehen, daß das Integral $J^* A$ unter der Voraussetzung, daß es existiert, durch die obige Vorschrift eindeutig definiert ist. Erstens findet man für jedes beliebige Soma A, wenn man $A_k = A\, C_k$ setzt,

$$(32.5) \qquad J^* A = \lim_{k = \infty} J^* A_k.$$

Wir betrachten jetzt eine Skala von der Breite δ, d. h. eine monoton wachsende Folge von Zahlen

$$(32.6) \qquad \begin{cases} 0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots \\ 0 < y_{p+1} - y_p < \delta, \ \lim_{p = \infty} y_p = \infty \end{cases}$$

und setzen

$$E_p = M\,(y_p \leqq f < y_{p+1}) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{32. 7}$$

$$E_{pk} = E_p\, C_k. \tag{32. 8}$$

Dann ist

$$A_k = A\,E_{0k} + A\,E_{1k} + \ldots\,,$$

wobei jedesmal auf der rechten Seite, wegen der Bedeutung von C_k, nur endlich viele Glieder vorkommen.

Wegen der Meßbarkeit der Somen E_{pk} hat man dann

$$J^* A_k = J^*\,(A\,E_{0k}) + J^*\,(A\,E_{1k}) + \ldots \tag{32. 9}$$

$$\mu^* A_k = \mu^*\,(A\,E_{0k}) + \mu^*\,(A\,E_{1k}) + \ldots \tag{32. 10}$$

Nun folgt aber aus

$$E_{pk} \subseteqq D_{y_p}^{y_{p+1}} \tag{32. 11}$$

die Relation

$$y_p\, \mu^*\,(A\,E_{pk}) \leqq J^*\,(A\,E_{pk}) \leqq y_{p+1}\, \mu^*\,(A E_{pk}). \tag{32. 12}$$

Führen wir also die Lebesgueschen Summen ein:

$$s = \sum_p y_p\, \mu^*\,(A\,E_{pk}), \quad S = \sum_p y_{p+1}\, \mu^*\,(A\,E_{pk}), \tag{32. 13}$$

so erhalten wir die Beziehungen

$$s \leqq J^* A_k \leqq S, \quad S - s \leqq \delta\, \mu C_k. \tag{32. 14}$$

Man kann also $J^* A_k$ mit Hilfe der Lebesgueschen Summen s und S mit beliebiger Genauigkeit approximieren, woraus die Eindeutigkeit von $J^* A_k$ und folglich auch die Eindeutigkeit von $J^* A$ folgt.

33. Um nun auch die Existenz des Integrals festzustellen, überlege man sich nach dem klassischen Schluß, der immer in Fragen dieser Art angewandt wird, daß für eine Folge von Skalen, deren Breiten δ_j gegen Null konvergieren, die Lebesgueschen Summen (32. 13) gegen eine gemeinsame Grenze konvergieren, die wir mit $J^* A_k = J^*\,(A\,C_k)$ bezeichnen.

Nach der Bemerkung ganz am Ende des § 15 ist dann $J^*(A\,C_h)$ eine Maßfunktion, und dasselbe gilt dann auch für J^*A, wenn man diese letzte Zahl durch (32. 5) bestimmt.

Ferner ist J^*A eine erweiterte Inhaltsfunktion, weil die Lebesgueschen Summen nicht ihren Wert ändern, wenn man das Soma A durch eine seiner maßgleichen Hüllen $\bar{A}$ ersetzt und aus demselben Grunde sind μ^*A und J^*A gleichartige Inhaltsfunktionen.

Endlich überlegt man sich leicht, daß auch die Bedingungen b) und c) des § 32 erfüllt sind, womit die Existenz des Integrals festgestellt ist.

34. Die üblichen Beweise für die meisten Sätze der Lebesgueschen Integrationstheorie lassen sich ohne Mühe auf unseren Fall übertragen.

Wir wollen, um wenigstens ein Beispiel eines derartigen Beweises zu geben, zeigen, daß mit der Definition der Summe von zwei Ortsfunktionen, die wir im § 31 gegeben haben, die Formel

$$\int_A (f_1 + f_2)\, d\mu = \int_A f_1\, d\mu + \int_A f_2\, d\mu \tag{34. 1}$$

richtig bleibt. Die rechte Seite von (34. 1) stellt jedenfalls eine verallgemeinerte Inhaltsfunktion von Somen dar, und um zu zeigen, daß sie mit der linken Seite übereinstimmt, genügt es festzustellen, daß für alle Somen B, die der Bedingung

$$B \subseteqq A\,\boldsymbol{M}(\alpha \leqq (f_1 + f_2) \leqq \beta)$$

genügen, auch die Relation

$$\alpha\,\mu^*B \leqq J_1{}^*B + J_2{}^*B \leqq \beta\,\mu^*B$$

gilt.

Man setze

$$B_p = B\,\boldsymbol{M}(y_p \leqq f_2 < y_{p+1}),$$

wobei $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$ eine Skala von der Breite δ darstellt. Bezeichnet man mit α_p und β_p die untere und die obere Grenze von $(f_1 + f_2)$ auf B_p und mit α'_p, β'_p dieselben Zahlen für f_1, so gelten nach (31. 1) und (31. 2) die Relationen

$$\alpha_p \leqq \alpha'_p + y_{p+1}, \quad \beta'_p + y_p \leqq \beta_p.$$

Wegen $y_{p+1} - y_p < \delta$ ist also auch

$$\alpha - \delta \leqq \alpha_p - \delta \leqq \alpha'_p + y_p,\ \beta'_p + y_{p+1} < \beta_p + \delta \leqq \beta + \delta.$$

Man kann daher schreiben

$$(\alpha - \delta)\, \mu^* B_p \leqq J_1{}^* B_p + J_2{}^* B_p \leqq (\beta + \delta)\, \mu^* B_p,$$

und wenn man über p summiert

$$(\alpha - \delta)\, \mu^* B \leqq J_1{}^* B + J_2{}^* B \leqq (\beta + \delta)\, \mu^* B.$$

Läßt man nachträglich die positive Zahl δ gegen Null konvergieren, so erhält man die Relation, die zu beweisen war.

Verzeichnis der Bezeichnungen.