# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1947

---

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

# Mechanische Quadratur nach Gauß für periodische Funktionen.

Herrn Georg Faber zum 70. Geburtstag am 5. April 1947 gewidmet.

Von Robert Schmidt in München.

Vorgelegt von Herrn H. Tietze am 7. November 1947.

Die Formeln der sogenannten „Mechanischen Quadratur" im Sinne von Gauß erhält man durch die Forderung: Die Konstanten

$$R_1, \ldots, R_k$$

zusammen mit den weiteren Konstanten (Argumentwerten)

$$u_1, \ldots, u_k \quad (-1 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_k \leqq +1)$$

so zu wählen, daß die Gleichung

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = R_1 f(u_1) + \cdots + R_k f(u_k)$$

für alle Polynome vom Höchstgrad $2k-1$ erfüllt ist.

Dieser Gaußsche Ansatz scheint in der Abwandlung, daß die gewöhnlichen Polynome vorgeschriebenen Höchstgrades durch andersartige Funktionen, etwa durch geeignete Bereiche von trigonometrischen Polynomen ersetzt werden, nicht verfolgt worden zu sein.

Ein Schritt in dieser Richtung wird im folgenden getan. – Im Abschnitt A werden die Grundtatsachen zusammengestellt, die sich bei der Durchführung des Gaußschen Ansatzes im Bereich der trigonometrischen Polynome ergeben. Im Abschnitt B werden einige Folgerungen gezogen, die die näherungsweise Darstellung von Fourierschen Koeffizienten durch endliche Summen betreffen.

## A

Es bedeute $\mathfrak{F}$ eine Menge von Funktionen $f(x)$, die in $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbar sind. Wenn ein System $\Gamma$ von Konstanten

$$R_0, \ldots, R_h;\ t_0, \ldots, t_h \quad (0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_h < 2\pi)$$

so beschaffen ist, daß die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = R_0 f(t_0) + \cdots + R_k f(t_k)$$

für alle Elemente $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ erfüllt ist, dann soll $\Gamma$ als ein „Gaußsches System der Menge $\mathfrak{F}$" bezeichnet werden, nötigenfalls mit dem Zusatz „von der Ordnung $k$". Es ist $k = 0, 1, \ldots$ beliebig, aber dann als fest zu betrachten, so daß es überflüssig erscheint, die Größen $R_\varkappa$, $t_\varkappa$ mit dem oberen Index $k$ zu versehen.

**Satz 1.** „Es bedeute $\mathfrak{T}$ die Menge der trigonometrischen Polynome $T(x)$ von der Form

$$T(x) = \sum_{\nu=-k}^{+k} a_\nu e^{i\nu x} = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{k} (A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x)$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_{-k}, \ldots, a_{+k}$ oder beliebigen Koeffizienten $A_0, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$.

Dafür, daß $\Gamma$ ein Gaußsches System der Menge $\mathfrak{T}$ bildet, ist notwendig und hinreichend:

$$R_0 = R_1 = \cdots = R_k = \frac{1}{k+1}$$

und – wenn $\omega = \frac{2\pi}{k+1}$ gesetzt wird – mit beliebigem, jeweils festem $\gamma$ aus $0 \leqq \gamma < \omega$

$$t_0 = \gamma,\ t_1 = \gamma + \omega,\ t_2 = \gamma + 2\omega, \ldots, t_k = \gamma + k\omega."$$

Beweis.

I. Es sei $\Gamma$ ein Gaußsches System der Menge $\mathfrak{T}$. Dann hat man insbesondere, wenn man der Reihe nach $\mathfrak{T}(x) = 1, e^{ix}, \ldots, e^{ikx}$ wählt,

$$\begin{aligned}
&R_0 + R_1 + \cdots + R_k = 1\\
&R_0 e^{it_0} + R_1 e^{it_1} + \cdots + R_k e^{it_k} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&R_0 e^{ikt_0} + R_1 e^{ikt_1} + \cdots + R_k e^{ikt_k} = 0.
\end{aligned}$$

Weil $t_0, \ldots, t_k$ paarweise inkongruent modulo $2\pi$ sind, so ist die (Vandermondesche) Determinante dieses Gleichungssystems für $R_0, \ldots, R_k$ von Null verschieden, und man erhält

$$R_\varkappa = \frac{(-1)^\varkappa \cdot e^{i(t_0 + \cdots + t_{\varkappa-1} + t_{\varkappa+1} + \cdots + t_k)}}{(e^{it_\varkappa} - e^{it_0}) \ldots (e^{it_\varkappa} - e^{it_{\varkappa-1}})(e^{it_{\varkappa+1}} - e^{it_\varkappa}) \ldots (e^{it_k} - e^{it_\varkappa})},$$

und mit der Abkürzung $\tau = t_0 + \cdots + t_k$

$$R_\varkappa = \frac{e^{i(\tau - t_\varkappa)}}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}{}' (e^{it_\nu} - e^{it_\varkappa})} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, k), \tag{1}$$

worin der Akzent besagen soll, daß der Multiplikationsindex $\nu = \varkappa$ auszulassen ist. – Wählt man ferner der Reihe nach $T(x) = 1, e^{-ix}, \ldots, e^{-ikx}$, so hat man

$$\begin{array}{llll} R_0 & + R_1 & + \cdots + R_k & = 1 \\ R_0\, e^{-it_0} & + R_1\, e^{-it_1} & + \cdots + R_k\, e^{-it_k} & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_0\, e^{-ikt_0} & + R_1\, e^{-ikt_1} & + \cdots + R_k\, e^{-ikt_k} & = 0, \end{array}$$

daraus

$$R_\varkappa = \frac{e^{-i(\tau - t_\varkappa)}}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}{}' (e^{-it_\nu} - e^{-it_\varkappa})} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, k). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) zusammen folgt

$$e^{i2(\tau - t_\varkappa)} \cdot \prod_{\nu=0}^{k}{}' \frac{e^{-it_\nu} - e^{-it_\varkappa}}{e^{it_\nu} - e^{it_\varkappa}} = 1,$$

$$e^{i2(\tau - t_\varkappa)} \cdot (-1)^k \cdot e^{-i\{t_0 + \cdots + t_{\varkappa-1} + t_{\varkappa+1} + \cdots + t_\varkappa + k t_\varkappa\}} = 1,$$

$$(-1)^k \cdot e^{i\{\tau - (k+1)t_\varkappa} = 1,$$

insbesondere für $\varkappa = 0$:

$$(-1)^k \cdot e^{i\{\tau - (k+1)t_0\}} = 1,$$

und damit weiter

$$e^{i(k+1)(t_\varkappa - t_0)} = 1,$$

$$(k+1)(t_\varkappa - t_0) \equiv 0 \bmod 2\pi,$$

$$t_\varkappa \equiv t_0 \bmod \frac{2\pi}{k+1} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, k)$$

Aus $0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < 2\pi$ folgt jetzt, wenn $\gamma = t_0$ gesetzt wird,

$$0 \leqq \gamma < \frac{2\pi}{k+1}$$

und

$$t_0 = \gamma, t_1 = \gamma + \frac{2\pi}{k+1}, \quad t_2 = \gamma + 2\frac{2\pi}{k+1}, \ldots,$$
$$t_k = \gamma + k\frac{2\pi}{k+1}.$$

Zurückkehrend zu (1) wird nunmehr mit $\omega = \frac{2\pi}{k+1}$:

$$R_\varkappa = \frac{e^{i(k\gamma + k\pi - \varkappa\omega)}}{e^{ik\gamma} \cdot \prod_\nu' (e^{i\nu\omega} - e^{i\varkappa\omega})}$$

$$= \frac{e^{ik\pi} \cdot e^{-i\varkappa\omega}}{(-1)^k \cdot e^{ik\varkappa\omega} \cdot \prod_\nu' (1 - e^{i(\nu-\varkappa)\omega})}$$

$$= \frac{e^{-i(k+1)\varkappa\omega}}{\prod_\nu' (1 - e^{i(\nu-\varkappa)\omega})} = \frac{1}{\prod_\nu' (1 - e^{i(\nu-\varkappa)\omega})}.$$

Für $\nu = 0, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, k$ durchläuft der Faktor $\nu - \varkappa$ modulo $k + 1$ gerade die Reste $1, \ldots, k$. Also sind die $R_\varkappa$ untereinander gleich, und da ihre Summe gleich 1 ist, so ist

$$R_\varkappa = \frac{1}{k+1} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, k).$$

Damit sind die im Satze 1 angegebenen Bedingungen als notwendig erkannt dafür, daß $\Gamma$ ein Gaußsches System der Menge $\mathfrak{T}$ ist.

II. Um einzusehen, daß die genannten Bedingungen auch hinreichend sind, bedarf es aus Linearitätsgründen nur des Nachweises, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(x)\,dx = \frac{1}{k+1}\{T(\gamma) + T(\gamma+\omega) + \cdots + T(\gamma + k\omega)\}$$

für die speziellen Polynome

$$T_\nu(x) = e^{i\nu x} \qquad (\nu = 0 \pm 1, \ldots, \pm k)$$

erfüllt ist. Das verifiziert man unmittelbar.

Der ursprüngliche Gaußsche Ansatz der Integraldarstellung durch Summen der Form $R_0 f(t_0) + \ldots + R_k f(t_k)$ in seiner

Durchführung für gewöhnliche Polynome liefert bekanntlich Eindeutigkeit der Konstanten $R_\varkappa$, $t_\varkappa$. Es liegt nahe, auch in der hier verfolgten Analogie für trigonometrische Polynome Eindeutigkeit anzustreben. In dieser Richtung liegen die Sätze 2 und 3, die zunächst etwas gekünstelt erscheinen mögen. Sie erweisen sich jedoch im Abschnitt B als angemessenes Werkzeug, um die Leistungsfähigkeit der Gaußschen Methode bei der Summendarstellung der Fourierschen Koeffizienten aufzuzeigen und abzugrenzen.

Es seien $\rho$ und $\sigma$ gegebene Konstanten. Nunmehr bedeute $\mathfrak{T}^*$ die Menge der trigonometrischen Polynome

$$(\mathfrak{T}^*) \qquad T^*(x) = \sum_{\nu=-k}^{+k} a_\nu\, e^{i\nu x} + c\cdot\left\{\rho\, e^{-i(k+1)x} - \sigma\, e^{+i(k+1)x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{k} (A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x)$$

$$+ C\cdot\left\{(\rho-\sigma)\cos(k+1)\,x - i\,(\rho+\sigma)\sin(k+1)\,x\right\}$$

mit beliebigen $a_{-k}, \ldots, a_{+k}, c$ oder beliebigen $A_0, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k, C$. Im Falle $\rho = \sigma = 0$ ist die Menge $\mathfrak{T}^*$ mit der Menge $\mathfrak{T}$ des Satzes 1 identisch, und die Frage nach den Gaußschen Systemen der Menge $\mathfrak{T}^*$ wird durch den Satz 1 beantwortet. Im folgenden wird daher

$$|\rho|^2 + |\sigma|^2 > 0$$

vorausgesetzt werden.

Die Konstanten

$$R_0, \ldots, R_k;\ t_0, \ldots, t_k \qquad (0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_k < 2\pi)$$

können offenbar nur dann ein Gaußsches System der Menge $\mathfrak{T}^*$ sein, wenn sie ein solches der Menge $\mathfrak{T}$ sind, also nur dann, wenn sie von der Form

$$R_\varkappa = \frac{1}{k+1}, \qquad t_\varkappa = \gamma + \varkappa\omega \quad (0 \leqq \gamma < \omega) \quad (3)$$

sind. Darüber hinaus ist notwendig, aber auch hinreichend, daß die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T^*(x)\,dx = R_0\, T^*(t_0) + \cdots + R_k\, T^*(t_k)$$

insbesondere für $T^*(x) = \rho\, e^{-i(k+1)x} - \sigma\, e^{+i(k+1)x}$ erfüllt ist, also

$$\rho\, e^{-i(k+1)\gamma} - \sigma\, e^{+i(k+1)\gamma} = 0. \tag{4}$$

Damit hat man zunächst den

**Satz 2.** „Wenn $|\rho| \neq |\sigma|$ ist, dann besitzt $\mathfrak{T}^*$ kein Gaußsches System der Ordnung $k$."

Es ist jetzt nur noch der Fall

$$|\rho| = |\sigma| = r \text{ mit } r > 0$$

zu behandeln. Setzt man

$$\rho = r\, e^{i\varphi}, \quad \sigma = r\, e^{i\psi} \qquad (\varphi \text{ und } \psi \text{ reell}),$$

dann folgt aus (4) als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (3) ein Gaußsches System für $\mathfrak{T}^*$ ist:

$$e^{i\{(2k+2)\gamma - \varphi + \psi\}} - 1 = 0$$

oder

$$(2k+2)\gamma \equiv \varphi - \psi \quad \operatorname{mod} 2\pi,$$

$$\gamma \equiv \frac{\varphi - \psi}{2k+2} \quad \operatorname{mod} \frac{\omega}{2}.$$

Diese Kongruenz hat wegen $0 \leqq \gamma < \omega$ genau zwei Lösungen, und zwar, wenn $\gamma_0$ den kleinsten nichtnegativen Rest von $\frac{\varphi-\psi}{2k+2}$ modulo $\frac{\omega}{2}$ bedeutet, die Lösungen $\gamma = \gamma_0$ und $\gamma = \gamma_0 + \frac{\omega}{2}$. Das ergibt den

**Satz 3.** „Wenn die Beträge von $\rho$ und $\sigma$ einander gleich sind, aber von Null verschieden, dann besitzt $\mathfrak{T}^*$ genau zwei Gaußsche Systeme $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ der Ordnung $k$, und zwar ist

$$\Gamma_1: \qquad R_\varkappa = \frac{1}{k+1} \qquad t_\varkappa = \gamma_0 + \varkappa\,\omega$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\varkappa = 0, \ldots, k)$$

$$\Gamma_2: \qquad R_\varkappa = \frac{1}{k+1} \qquad t_\varkappa = \gamma_0 + \frac{\omega}{2} + \varkappa\,\omega$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{k+1}$ und einem durch $\rho$ und $\sigma$ eindeutig bestimmten Wert $\gamma_0$, wie vorangehend erklärt."

## B

Die folgenden Überlegungen gewinnen an Einfachheit, wenn ihnen zwei Bemerkungen vorausgeschickt werden.

**Erste Vorbemerkung.** „Wenn die Funktionenmengen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ in dem Zusammenhange miteinander stehen, daß jedes Element aus $\mathfrak{F}$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{G}$ ist, und umgekehrt jedes Element aus $\mathfrak{G}$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{F}$, dann sind die Gaußschen Systeme von $\mathfrak{F}$ identisch mit denen von $\mathfrak{G}$."

Denn wenn $\Gamma$ ein Gaußsches System von $\mathfrak{F}$ ist, dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = R_0\, f(t_0) + \cdots + R_k\, f(t_k)$$

richtig nicht nur für alle Elemente $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$, sondern auch für alle Linearverbindungen von Elementen aus $\mathfrak{F}$, also insbesondere für alle Elemente aus $\mathfrak{G}$, d. h. $\Gamma$ ist auch ein Gaußsches System von $\mathfrak{G}$. Ebenso umgekehrt.

Man beachte, daß die Voraussetzungen dieser Vorbemerkung jedenfalls dann vorliegen, wenn $\mathfrak{G}$ die Menge aller möglichen Linearverbindungen von Elementen aus $\mathfrak{F}$ ist.

**Zweite Vorbemerkung.** „Wenn $\mathfrak{F}$ eine Menge von Funktionen $f(x)$ mit der Periode $2\pi$ bezeichnet, $\mathfrak{F}_c$ die Menge der Funktionen $g(x) = f(x + c)$ mit festem reellem $c$, dann läßt sich zwischen den Gaußschen Systemen von $\mathfrak{F}$ und den Gaußschen Systemen von $\mathfrak{F}_c$ eine eineindeutige Zuordnung herstellen. Zugeordnete Systeme sind dabei von gleicher Ordnung."

Denn wenn $\Gamma$ ein Gaußsches System von $\mathfrak{F}$ ist, dann ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} g(x-c)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\,dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = R_0\, f(t_0) + \cdots + R_k\, f(t_k)\\ &= R_0\, g(t_0 - c) + \cdots + R_k\, g(t_k - c).\end{aligned}$$

Die kleinsten nichtnegativen Reste von $t_0 - c, \ldots, t_k - c$ modulo $2\pi$ sind paarweise verschieden. Sie sollen, der Größe nach geordnet, mit $\tau_0, \ldots, \tau_k$ bezeichnet werden. Es ist also

$$0 \leqq \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < 2\pi,$$

$$\tau_\nu \equiv t_{\varkappa_\nu} - c \mod 2\pi \qquad (\nu = 0, \ldots, k),$$

und die Indizes $\varkappa_0, \ldots, \varkappa_k$ sind eine Umordnung der Indizes $0, \ldots, k$. Wenn man noch $R_{\varkappa_\nu}$ mit $\mathsf{P}_\nu$ bezeichnet, so wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \mathsf{P}_0\, g(\tau_0) + \cdots + \mathsf{P}_k\, g(\tau_k)$$

für alle Elemente $g(x)$ aus $\mathfrak{F}_c$. Jedem Gaußschen System $R_0, \ldots, R_k;\ t_0, \ldots, t_k$ von $\mathfrak{F}$ wird also auf diese Weise eindeutig ein Gaußsches System $\mathsf{P}_0, \ldots, \mathsf{P}_k;\ \tau_0, \ldots, \tau_k$ von $\mathfrak{F}_c$ zugeordnet.

Auf gleiche Weise wird jedem Gaußschen System von $\mathfrak{F}_c$ eindeutig ein Gaußsches System von $\mathfrak{F}$ zugeordnet. Dieser zweite Prozeß ist zu dem ersten invers, die Zuordnung zwischen den Gaußschen Systemen von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_c$ ist daher eineindeutig.

Nach diesen Vorbereitungen sei

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x) \quad \text{oder} \quad \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}$$

die Fouriersche Reihe einer Funktion $f(x)$, also

$$A_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos \mu x\, dx, \qquad B_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin \mu x\, dx$$

oder

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i\nu x}\, dx.$$

Um im Sinne des Gaußschen Verfahrens „möglichst gute“ Näherungsdarstellungen für die Fourierschen Koeffizienten in der Gestalt

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} A_\mu \\ \frac{1}{2} B_\mu \end{matrix} \sim R_0\, f(t_0) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \mu t_0 + \cdots + R_k\, f(t_k) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \mu t_k$$

oder

$$a_\nu \sim R_0\, f(t_0)\, e^{-i\nu t_0} + \cdots + R_k\, f(t_k)\, e^{-i\nu t_k}$$

zu erhalten, wird man die Funktionen $f(x)$ von der Form

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} (A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x) \quad (m \text{ fest}) \tag{5}$$

in den Vordergrund stellen; ebenso – besonders im Hinblick auf die Bedürfnisse der Praktischen Mathematik – die Funktionen $f(x)$ von der Form

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} (A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x) + \frac{1}{2} A_{m+1} \cos (m+1) x \quad (5a)$$

und von der Form

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{\mu=1}^{m} (A_\mu \cos \mu x + B_\mu \sin \mu x) + \frac{1}{2} B_{m+1} \sin (m+1) x. \quad (5b)$$

Es ist der Natur der Sache angemessen, wenn man zunächst die Funktionen (5) in der angedeuteten Richtung behandelt, sodann die Funktionen (5a) und (5b) gemeinsam.

Dementsprechend werde zunächst die Menge (5) ins Auge gefaßt. Es ist (5) gleichbedeutend mit der Menge $\mathfrak{F}$ der Funktionen

$$(\mathfrak{F}) \qquad f(x) = \sum_{\nu=-m}^{+m} a_\nu e^{i\nu x} \qquad (m = 0, 1, \ldots \text{ fest}).$$

Sie gibt Veranlassung zur Bildung der Menge $\mathfrak{T}$, deren Elemente die Integranden der Fourierschen Koeffizienten $a_{-m}, \ldots, a_{+m}$ der Elemente von $\mathfrak{F}$ sind, also

$$(\mathfrak{T}) \qquad \sum_{\mu=-m}^{+m} a_\mu e^{i(\mu-\nu)x} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_\mu$. Ersichtlich ist jeder dieser Integranden – also jedes Element aus $\mathfrak{T}$ – eine Linearverbindung der Funktionen

$$(\mathfrak{E}) \qquad e^{-i2mx},\ e^{-i(2m-1)x}, \ldots, e^{+i2mx}.$$

Jede dieser Funktionen ($\mathfrak{E}$) ist aber auch ein Element aus $\mathfrak{T}$, wie man erkennt, wenn man in ($\mathfrak{T}$) einmal

$$a_{-m} = 1,\ a_\mu = 0 \text{ sonst}$$

wählt, sodann

$$a_{+m} = 1,\ a_\mu = 0 \text{ sonst.}$$

Mit dem Hinweis auf die erste Vorbemerkung dieses Abschnitts folgt nun aus dem Satz 1 sofort der

**Satz 4.** „Es sei $\Gamma$ ein System von Konstanten

$$R_0, \ldots, R_{2m};\quad t_0, \ldots, t_{2m} \qquad (0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_{2m} < 2\pi),$$

und es bezeichne $\mathfrak{F}$ die Menge der trigonometrischen Polynome

$$f(x) = \sum_{\nu=-m}^{+m} a_\nu e^{i\nu x}$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_{-m}, \ldots, a_{+m}$.

Dafür, daß mit dem System $\Gamma$ die Gleichungen

$$a_\nu = R_0 f(t_0) e^{-i\nu t_0} + \cdots + R_{2m} f(t_{2m}) e^{-i\nu t_{2m}} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm m)$$

für alle Elemente $f(x)$ aus $\mathfrak{F}$ erfüllt sind, ist notwendig und hinreichend:

$$R_\varkappa = \frac{1}{2m+1} \text{ und } t_\varkappa = \gamma + \varkappa \frac{2\pi}{2m+1} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, 2m)$$

mit beliebigem, jeweils festem $\gamma$ aus $0 \leqq \gamma < \frac{2\pi}{2m+1}$."

Es sollen nun die Funktionen (5a) und (5b) in der gleichen Richtung behandelt werden. Diese Funktionen sind enthalten in denen der Form

$$f^*(x) = \sum_{\nu=-m}^{+m} a_\nu e^{i\nu x} + c \cdot \{p e^{-i(m+1)x} + q e^{+i(m+1)x}\}$$

mit fest gegebenen Konstanten $p$ und $q$. Man erhält (5a) für

$$p = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\quad q = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\quad \text{(5b) für } p = \tfrac{i}{2}\sqrt{2},\quad q = -\tfrac{i}{2}\sqrt{2}.$$

Die Konstanten $p$ und $q$ sollen nicht auf die eben angegebenen speziellen Wertpaare beschränkt werden. Man wird jedoch, um Gleichberechtigung des Koeffizienten $c$ mit den Koeffizienten $a_{-m}, \ldots, a_{+m}$ herzustellen, durch geeignete Einschränkung der zugelassenen Wertpaare $p, q$ dafür sorgen, daß die Funktionen

$$(\varphi) \quad \varphi_0(x) = e^{-imx}, \ldots, \varphi_{2m}(x) = e^{+imx},$$
$$\varphi_{2m+1}(x) = p e^{-i(m+1)x} + q e^{+i(m+1)x}$$

ein unitäres System bilden, daß also

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_\mu(x)\,\overline{\varphi}_\nu(x)\,dx = \begin{cases} 1 \text{ für } \mu = \nu \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

wird. Dafür ist notwendig und hinreichend:

$$|p|^2 + |q|^2 = 1.$$

Man hat dann, wenn man noch

$$b_0 = a_{-m}, \ldots, b_{2m} = a_{+m}, b_{2m+1} = c$$

setzt:

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(x)\,\overline{\varphi}_\nu(x)\,dx \qquad (\nu = 0, \ldots, 2m+1).$$

Damit erscheint es ausreichend begründet, die nachfolgend erklärte Menge $\mathfrak{F}^*$ zum Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen zu machen: Es bedeute $\mathfrak{F}^*$ die Menge der Funktionen $f^*(x)$ von der Form

$$(\mathfrak{F}^*) \qquad f^*(x) = \sum_{\nu=-m}^{+m} a_\nu e^{i\nu x} + c\cdot\{p\,e^{-i(m+1)x} + q\,e^{+i(m+1)x}\}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{2m+1} b_\mu \varphi_\mu(x)$$

mit fest gegebenen Konstanten $p$ und $q$ derart, daß

$$|p|^2 + |q|^2 = 1$$

erfüllt ist, und mit beliebigen Koeffizienten $b_0 = a_{-m}, \ldots, b_{2m} = a_{+m}, b_{2m+1} = c$. Die Menge der Integranden in der Koeffizientendarstellung

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(x)\,\overline{\varphi}_\nu(x)\,dx,$$

also die Menge der Funktionen

$$(\mathfrak{T}^*) \qquad \sum_{\mu=0}^{2m+1} b_\mu \varphi_\mu(x)\,\overline{\varphi}_\nu(x)$$

mit beliebigen Koeffizienten $b_\mu$, soll mit $\mathfrak{T}^*$ bezeichnet werden.

Die Menge $\mathfrak{B}^*$ der Funktionen

$$(\mathfrak{B}^*) \qquad \psi_{\mu\nu}(x) = \varphi_\mu(x)\,\overline{\varphi}_\nu(x) \qquad (\mu, \nu = 0, \ldots, 2m+1)$$

wird als Teilmenge von $\mathfrak{T}^*$ erkannt, wenn man einen beliebigen der Koeffizienten $b_\mu$ gleich 1 wählt, alle übrigen gleich 0. Da ferner jedes Element aus $\mathfrak{T}^*$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$ ist, so sind – erste Vorbemerkung – die Gaußschen Systeme von $\mathfrak{T}^*$ mit denen von $\mathfrak{B}^*$ identisch.

Bis hierher konnte $m$ jede nichtnegative ganze Zahl sein. In den nachfolgenden Überlegungen sieht man sich jedoch gezwungen, den Fall $m = 0$ gesondert zu behandeln, und es zeigt sich, daß in diesem Falle Verhältnisse vorliegen, die von denen in den Fällen $m = 1, 2, \ldots$ völlig verschieden sind. Demgemäß sollen die begonnenen Überlegungen unter der Voraussetzung zu Ende geführt werden, daß $m$ eine natürliche Zahl ist. Der Fall $m = 0$ wird im Anschluß an den Satz 5 durch die Ergänzungssätze I und II erledigt.

Fortfahrend kann man nun in der eben eingeschlagenen Richtung einen Schritt weitergehen, indem man die Menge $\mathfrak{C}^*$ der Funktionen

$$(\mathfrak{C}^*) \qquad e^{-i(2m+1)x}, \ldots, \quad e^{+i(2m+1)x},$$
$$p\bar{q}\, e^{-i(2m+2)x} + \bar{p} q\, e^{+i(2m+2)x}$$

heranzieht. Ersichtlich ist jedes Element aus $\mathfrak{B}^*$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{C}^*$. Umgekehrt ist auch – hier wird $m \neq 0$ benutzt – jedes Element aus $\mathfrak{C}^*$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$; denn zunächst ist

$$\psi_{\mu\nu}(x) = e^{i(\mu-\nu)x} \quad \text{für } \mu, \nu = 0, \ldots, 2m,$$

d. h. die Funktionen

$$e^{-i2mx}, \ldots, e^{+i2mx}$$

sind Elemente aus $\mathfrak{B}^*$, also gewiß Linearverbindungen von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$. Ferner ist

$$\psi_{2m+1,\nu}(x) = p\, e^{-i(\nu+1)x} + q\, e^{+i(2m+1-\nu)x} \quad \text{für } \nu = 0, \ldots, 2m$$
$$\psi_{\mu,2m+1}(x) = \bar{p}\, e^{+i(\mu+1)x} + \bar{q}\, e^{-i(2m+1-\mu)x}$$
$$\text{für } \mu = 0, \ldots, 2m,$$

daher insbesondere

$$\psi_{2m+1,2m}(x) = p\, e^{-i(2m+1)x} + q\, e^{+ix}$$
$$\psi_{0,2m+1}(x) = \bar{q}\, e^{-i(2m+1)x} + \bar{p}\, e^{+ix}.$$

Die Funktion $e^{ix}$ ist (wegen $m \geqq 1$) bereits als Element aus $\mathfrak{B}^*$ erkannt. Aus mindestens einer der eben gewonnenen Gleichungen folgt nun, daß $e^{-i(2m-1)x}$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$ ist. Das Gleiche für $e^{+i(2m+1)x}$ folgt aus mindestens einer der beiden Gleichungen

$$\psi_{2m+1,0}(x) = p\,e^{-ix} + q\,e^{+i(2m+1)x}$$

$$\psi_{2m,2m+1}(x) = \bar{q}\,e^{-ix} + \bar{p}\,e^{+i(2m+1)x}.$$

Schließlich ist

$$\psi_{2m+1,2m+1}(x) = p\bar{q}\,e^{-i(2m+2)x} + \bar{p}q\,e^{+i(2m+2)x} + 1,$$

also auch das letzte der Elemente aus $\mathfrak{C}^*$ eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$. Auf Grund der ersten Vorbemerkung sind die Gaußschen Systeme von $\mathfrak{B}^*$, und damit diejenigen von $\mathfrak{T}^*$, mit denen von $\mathfrak{C}^*$ identisch.

Es werde gesetzt

$$\rho = p\bar{q},\quad \sigma = \bar{p}q.$$

Dann und nur dann ist $\rho = \sigma = 0$, wenn $p = 0$ oder wenn $q = 0$ ist. Es liegen dann die Voraussetzungen des Satzes 1 vor, wenn man unter Beachtung der ersten Vorbemerkung für die Menge $\mathfrak{T}$ die Menge $\mathfrak{C}^*$ eintreten läßt ($k = 2m + 1$). Andernfalls, also wenn weder $p = 0$ noch $q = 0$ ist, sind die Beträge von $\rho$ und $\sigma$ einander gleich und von Null verschieden. Dann liegen die Voraussetzungen des Satzes 3 mit $\mathfrak{C}^*$ an Stelle von $\mathfrak{T}^*$ vor ($k = 2m + 1$), und zwar wird mit $\varphi, \psi$; $\alpha, \beta$; $\gamma, \gamma_0$ in ihrer früheren Bedeutung

$$\varphi \equiv \alpha - \beta,\quad \psi \equiv -\alpha + \beta \mod 2\pi,$$

also $\gamma_0$ der kleinste nichtnegative Rest von $\frac{\alpha-\beta}{2m+2} \mod \frac{2\pi}{4m+4}$.

Das Ergebnis ist der

**Satz 5.** „Mit einer natürlichen Zahl $m$ sei $\Gamma$ ein System von Konstanten

$$R_0, \ldots, R_{2m+1};\ t_0, \ldots, t_{2m+1}\ (0 \leqq t_0 < t_1 < \ldots < t_{2m+1} < 2\pi),$$

und es bezeichne $\mathfrak{F}^*$ die Menge der trigonometrischen Polynome

$$f^*(x) = \sum_{\mu=0}^{2m+1} b_\mu \varphi_\mu(x)$$

mit

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} e^{i(\mu - m)x} & \text{für } \mu = 0, \ldots, 2m \\ p\, e^{-i(m+1)x} + q\, e^{+i(m+1)x} & \text{für } \mu = 2m+1, \end{cases}$$

worin $p = |p|\, e^{i\alpha}$ und $q = |q|\, e^{i\beta}$ fest gegebene Konstanten sind, die der Bedingung

$$|p|^2 + |q|^2 = 1$$

genügen.

Dafür, daß mit dem System $\Gamma$ die Gleichungen

$$b_\mu = R_0 f(t_0)\, \bar{\varphi}_\mu(t_0) + \ldots + R_{2m+1} f(t_{2m+1})\, \bar{\varphi}_\mu(t_{2m+1})$$
$$(\mu = 0, \ldots, 2m+1)$$

für alle Elemente $f^*(x)$ aus $\mathfrak{F}^*$ erfüllt sind, ist notwendig und hinreichend, falls

I. $p = 0$ oder $q = 0$ ist:

$$R_\varkappa = \frac{1}{2m+2} \text{ und } t_\varkappa = \gamma + \varkappa \frac{2\pi}{2m+2} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, 2m+1)$$

mit beliebigem, jeweils festem $\gamma$ aus $0 \leqq \gamma < \frac{2\pi}{2m+2}$;

II. $p \neq 0$ und $q \neq 0$ ist:

$$R_\varkappa = \frac{1}{2m+2} \text{ und } t_\varkappa = \gamma_0 + \varkappa \frac{2\pi}{2m+2} \qquad (\varkappa = 0, \ldots, 2m+1)$$

oder

$$R_\varkappa = \frac{1}{2m+2} \text{ und } t_\varkappa = \gamma_0 + \left(\varkappa + \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{2m+2}$$
$$(\varkappa = 0, \ldots, 2m+1)$$

mit der Bezeichnung $\gamma_0$ für den kleinsten nichtnegativen Rest von $\frac{\alpha - \beta}{2m+2}$ modulo $\frac{2\pi}{4m+4}$."

Nunmehr sollen – der Vollständigkeit halber – die Folgerungen gezogen werden, die sich aus den Voraussetzungen des

Satzes 5 ergeben, wenn dort $m$ nicht eine natürliche Zahl ist, sondern $m = 0$.

Für $m = 0$ wird

$$(\mathfrak{F}^*) \qquad f^*(x) = b_0\, \varphi_0(x) + b_1\, \varphi_1(x)$$

mit

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = p\, e^{-ix} + q\, e^{+ix}$$

und der Darstellung

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x)\, \bar{\varphi}_\nu(x)\, dx \qquad (\nu = 0, 1).$$

Die Menge $\mathfrak{T}^*$ der Integranden von $b_\nu$ wird jetzt

$$(\mathfrak{T}^*) \qquad b_0\, \psi_{00}(x) + b_1\, \psi_{10}(x), \quad b_0\, \psi_{01}(x) + b_1\, \psi_{11}(x)$$

mit

$$(\mathfrak{B}^*) \quad \begin{array}{ll} \psi_{00}(x) = 1 & \psi_{01}(x) = \bar{q}\, e^{-ix} + \bar{p}\, e^{+ix} \\ \psi_{10}(x) = p\, e^{-ix} + q\, e^{+ix} & \psi_{11}(x) = p\bar{q}\, e^{-i2x} + \bar{p} q\, e^{+i2x} + 1. \end{array}$$

Die Menge $\mathfrak{B}^*$ ist Teilmenge von $\mathfrak{T}^*$, und jedes Element aus $\mathfrak{T}^*$ ist eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$.

Jetzt wird, abweichend vom Beweisgang des Satzes 5, eine Fallunterscheidung notwendig.

I. $|p| \neq |q|$.

Dann (und nur dann) besteht keine lineare Abhängigkeit zwischen $\psi_{01}(x)$ und $\psi_{10}(x)$, jedes Element aus

$$(\mathfrak{E}^*) \qquad e^{-ix}, \; 1, \; e^{+ix}, \; p\bar{q}\, e^{-i2x} + \bar{p} q\, e^{+i2x}$$

ist eine Linearverbindung von Elementen aus $\mathfrak{B}^*$, und umgekehrt. In diesem Falle kann auch hier so weitergeschlossen werden wie im Beweise des Satzes 5, und man erhält den

**Ergänzungssatz I.** „Wenn im Satze 5 die Voraussetzung

$$|p| \neq |q|$$

hinzugefügt wird, so bleibt der Satz auch für $m = 0$ richtig".

II. $|p| = |q|$.

Dann wird, wenn man $p = r e^{i\alpha}$, $q = r e^{i}$ $\left(r = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ schreibt,

$$\psi_{00}(x) = 1$$

$$\begin{aligned}
\psi_{01}(x) &= r \cdot \left\{ e^{-i(x+\beta)} + e^{+i(x-\alpha)} \right\} \\
&= r\, e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \left\{ e^{-i\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{+i\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right\} \\
&= 2 r\, e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \cos\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$(\mathfrak{B}^*)$

$$\begin{aligned}
\psi_{10}(x) &= 2 r\, e^{+i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \cos\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\psi_{11}(x) &= r^2 \cdot \left\{ e^{-i\,2\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{+i\,2\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right\} + 1 \\
&= 2 r^2 \cos 2\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 1.
\end{aligned}$$

Die Gaußschen Systeme von $\mathfrak{B}^*$ sind daher nach der ersten Vorbemerkung identisch mit denen von

$$(\mathfrak{B}^{**}) \qquad 1,\ \cos\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right),\ \cos 2\left(x - \frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Auf Grund der zweiten Vorbemerkung wird der Beweis des nachfolgenden Ergänzungssatzes II im Wesentlichen geführt sein, wenn man die Menge $\mathfrak{B}^{**}$ ersetzt durch

$$(\mathfrak{C}^{**}) \qquad 1,\ \cos x, \qquad \cos 2x.$$

Die Gaußschen Systeme von $\mathfrak{C}^{**}$ weichen in ihrer Struktur von den bisher aufgetretenen Systemen in eigenartiger Weise ab. Dafür, daß

$$(6) \qquad R_0,\ R_1;\ t_0,\ t_1 \qquad (0 \leq t_0 < t_1 < 2\pi)$$

ein Gaußsches System für $\mathfrak{C}^{**}$ ist, ist es notwendig und hinreichend, daß mit den Abkürzungen

$$u = \cos t_0 \quad v = \cos t_1$$

die Gleichungen

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&R_0 && + R_1 && = 1\\
&R_0\, u && + R_1\, v && = 0\\
&R_0\,(2\,u^2 - 1) && + R_1\,(2\,v^2 - 1) && = 0
\end{aligned}
$$

erfüllt sind. Für $u = v$ sind diese Gleichungen offenbar unverträglich. Weil

$$
\begin{vmatrix} u & v \\ 2\,u^2 - 1 & 2\,v^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,
$$

also

$$
(u - v)\,(2\,uv + 1) = 0
$$

sein muß, so ist notwendig

$$
(8)\qquad 2\,u\,v + 1 = 0.
$$

Wenn umgekehrt diese Gleichung erfüllt ist, so ist $u \neq v$, und die Gleichungen (7) haben für jedes solche Paar $u$, $v$ genau ein Lösungssystem $R_0$, $R_1$. Als Zwischenergebnis hat man dann: Dafür, daß die Konstanten (6) ein Gaußsches System für $\mathfrak{C}^{**}$ bilden, ist es notwendig und hinreichend, daß $t_0$, $t_1$ die Gleichung (8) befriedigen und $R_0$, $R_1$ das Lösungssystem der Gleichungen (7) ist, das zu diesen Werten $t_0$ und $t_1$ gehört.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Lösungen $t_0$, $t_1$ der Gleichung (8) zu kennzeichnen.

Wegen $|u| \leqq 1$, $|v| \leqq 1$ und $|u| \,.\, |v| = \frac{1}{2}$ folgt $|u| \geqq \frac{1}{2}$, $|v| \geqq \frac{1}{2}$. Daher kommen für $t_0$ und $t_1$ nur die Intervalle

$$
0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \leqq t \leqq \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3} \leqq t < 2\pi
$$

in Betracht. Da ferner $u$ und $v$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so liegt, wenn einer der Werte $t_0$, $t_1$ dem mittleren Intervall angehört, der andere in einem der beiden äußeren und umgekehrt. Für $t_0$ kommen die Endpunkte des mittleren Intervalls nicht in Betracht, weil sie $t_1 = 2\pi$ nach sich ziehen. Zu jedem $t_0$ aus $\frac{2\pi}{3} < t_0 < \frac{4\pi}{3}$ erhält man jedoch genau einen Wert $t_1$, der zusammen mit $t_0$ der Gleichung (8) und der Bedingung (6) genügt. Ferner erhält man zu jedem $t_1$ aus $\frac{2\pi}{3} \leqq t_1 \leqq \frac{4\pi}{3}$ genau einen Wert $t_0$, der zusammen mit $t_1$ die gleichen Eigenschaften hat. Damit sind aber auch alle Paare $t_0$, $t_1$ erfaßt, die der Gleichung (8) und der Bedingung (6) genügen, und jedes solche Paar kommt auf die beschriebene Weise genau einmal zum Vorschein. Als zugehörige Werte von $R_0$ und $R_1$ erhält man

$$R_0 = \frac{1}{1+2u^2} = \frac{1}{1+2\cos^2 t_0} = \frac{1}{2+\cos 2t_0}$$

$$R_1 = \frac{1}{1+2v^2} = \frac{1}{1+2\cos^2 t_1} = \frac{1}{2+\cos 2t_1}.$$

Auf die Mengen $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}^{**}$ und $\mathfrak{F}_c = \mathfrak{B}^{**}$ $\left(c = -\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ ist nun die zweite Vorbemerkung mit dem dort benutzten Zuordnungsverfahren anzuwenden. Man erhält den

**Ergänzungssatz II.** „Es sei $\Gamma$ ein System von Konstanten

$$R_0, R_1; t_0, t_1 \qquad (0 \leqq t_0 < t_1 < 2\pi),$$

und es bezeichne $\mathfrak{f}$ die Menge der trigonometrischen Polynome

$$f(x) = b_0\,\varphi_0(x) + b_1\,\varphi_1(x)$$

mit

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = p\,e^{-ix} + q\,e^{+ix},$$

worin $p = |p|\,e^{i\alpha}$ und $q = |q|\,e^{i\beta}$ fest gegebene Konstanten sind, die den Bedingungen

$$|p|^2 + |q|^2 = 1 \text{ und } |p| = |q|$$

genügen $\left(\text{also } |p| = |q| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.

Unter den Systemen $\Gamma$ gibt es solche, $\Gamma_+$, mit der Eigenschaft, daß die Gleichungen

$$b_0 = R_0\,f(t_0)\,\bar{\varphi}_0(t_0) + R_1\,f(t_1)\,\bar{\varphi}_0(t_1)$$

und

$$b_1 = R_0\,f(t_0)\,\bar{\varphi}_1(t_0) + R_1\,f(t_1)\,\bar{\varphi}_1(t_1)$$

für alle Elemente $f(x)$ aus $\mathfrak{f}$ erfüllt sind. Diese Systeme erhält man auf folgende Weise: Für jeden Wert $\vartheta$ aus

$$\frac{2\pi}{3} \leqq \vartheta \leqq \frac{4\pi}{3}$$

sei

$$\vartheta' = \arccos\left(-\frac{1}{2\cos\vartheta}\right) \qquad \left(0 \leqq \vartheta' \leqq \frac{\pi}{3}\right),$$

$$R = \frac{1}{1+2\cos^2\vartheta} \qquad R' = \frac{1}{1+2\cos^2\vartheta'}$$

$$\tau \equiv \vartheta + \frac{\alpha-\beta}{2} \mod 2\pi \qquad (0 \leqq \tau < 2\pi)$$

$$\tau' \equiv \vartheta' + \frac{\alpha-\beta}{2} \mod 2\pi \qquad (0 \leqq \tau' < 2\pi)$$

$$\tau'' \equiv -\vartheta' + \frac{\alpha-\beta}{2} \mod 2\pi \qquad (0 \leqq \tau'' < 2\pi),$$

Dann ist $R, R'$; $\tau, \tau'$ oder – falls $\tau' < \tau$ ist – $R'$ $R$; $\tau', \tau$ ein System $\Gamma_+$. Ebenso ist $R, R'$; $\tau, \tau''$ oder – falls $\tau'' < \tau$ ist – $R'$ $R$; $\tau'', \tau$ ein System $\Gamma_+$. Andere Systeme $\Gamma_+$ gibt es nicht.“

München, 10. Februar 1947.