Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Zum Beweise des Verteilungssatzes für Punkte mit unvollständigem Kontingent.

Von Otto Haupt in Erlangen und Christian Pauc in Marseille.

Vorgelegt am 2. Mai 1947.

Vorbemerkung.

1. Von Herrn *F. Roger* ist ein bekannter Denjoy'scher Satz über die Derivierten reeller Funktionen einer reellen Veränderlichen[1] folgendermaßen verallgemeinert[2] worden:

Verteilungssatz. *Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge im euklidischen E_n, wobei $2<n$, und bezeichnet $\mathfrak{M}_u$ die Menge aller Punkte $P \in \mathfrak{M}$, in welchem das Kontingent $\mathfrak{C}\,(P;\ \mathfrak{M})$ von (bezüglich) $\mathfrak{M}$ unvollständig ist (d. h. nicht mit dem ganzen E_n zusammenfällt) so gilt*: (**a**) *Es ist $\mathfrak{M}_u$ enthalten in einer Summe $\mathfrak{S}$ von abzählbar vielen $(n-1)$-dimensionalen, dehnungsbeschränkten Flächenstücken*[3] *und* (**b**) *für L_{n-1}-fast alle $P \in \mathfrak{M}_u$ ist* $\mathfrak{C}\,(P;\ \mathfrak{M})$ entweder *ein abgeschlossener Halbraum* oder *eine Hyperebene (im E_n); die Redeweise: „L_{n-1}-fast alle" bedeutet dabei: Für alle $P \in (\mathfrak{M}_u - \mathfrak{N})$, wobei $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$ eine Menge vom $(n-1)$-dimensionalen Maße Null bezeichnet.*[3]

---

[1] A. Denjoy, Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues, Journ. de math. pures et appl. (7) 1 (1915), 105 ff.

[2] F. Roger, Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points, Acta math. 69 (1937), 99 ff.

[3] Unter einem $(n-1)$-dimensionalen *dehnungsbeschränkten* (auch *Lipschitz-*) *Flächenstück* $\mathfrak{F}$ verstehen wir das kartesische Bild einer, in einer Punktmenge des E_{n-1} der Punkte $X = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ endlichen Funktion $x_n = f\,(x_1, \ldots, x_{n-1})$, welche dehnungsbeschränkt ist, d. h. einer Lipschitzbedingung $|f(X') - f(X'')| \leqq k.\ ||X',\ X''||$ (mit konstantem k) genügt. k heißt eine Dehnungsschranke von $f\,(X)$ oder $\mathfrak{F}$. Für solche dehnungsbeschränkte Funktionen gilt der *Differenzierbarkeitssatz*: $f\,(X)$ ist differenzierbar überall bis auf eine Nullmenge im E_{n-1} (kurz: L_{n-1}-fast überall). Auf einem $(n-1)$ – dimensionalen dehnungsbeschränkten Flächenstück ist durch das (Lebesguesche) Integral

$$m\,(\mathfrak{M}) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \Big(1 + \sum_{\nu=1}^{n-1}{}' \,(f_{x_\nu})^{2\prime}\Big)^{1/2}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

ein Maß erklärt, welches als $(n-1)$-*dimensionales Maß* (auf $\mathfrak{F}$) bezeichnet werde. Vgl. auch Ziff. 3. des Textes.

2. Der Beweis von Herrn *Roger* verwendet im wesentlichen nur den (Maß-)Dichtesatz.[4] Ein zweiter Beweis von Herrn *Saks*[5] zieht daneben auch den (aus dem Dichtesatz folgenden[6]) Differenzierbarkeitssatz für dehnungsbeschränkte Funktionen heran. Herr *Saks* operiert dabei mit gewissen Ungleichungen. Im nachstehend mitgeteilten Beweise tritt an Stelle dieses Operierens mit Ungleichungen das Operieren mit „möglichst hoch gelegenen" dehnungsbeschränkten Flächenstücken[7], wodurch, wie uns scheint, der Beweis wesentlich an Anschaulichkeit gewinnt.

Der in Rede stehende Beweis wurde (ohne Kenntnis des Beweises von Herrn *Saks*) ursprünglich (vom einen von uns (H.)) konstruktiv (mittels transfiniter Induktion) geführt. Die nachstehende, existenziale und viel kürzere Wendung rührt vom anderen von uns (P.) her, welcher auch darauf aufmerksam machte, daß ein wesentlicher Beweisgedanke (nämlich die Darstellung von $\mathfrak{S}$ als Summe „genügend" bzw. „möglichst hoch" gelegener Flächenstücke[7]) in etwas anderem Zusammenhange schon von Herrn *Roger* gesprächsweise geäußert wurde.

Auf die feineren Verteilungssätze von Herrn *Roger*[2], durch welche auch die Punkte X der Nullmenge $\mathfrak{N}$ hinsichtlich der Struktur des Kontingents $\mathfrak{C}\,(X;\,\mathfrak{M})$ klassifiziert werden, gehen wir hier nicht ein.

---

[4] D. h. den Satz, daß die (Lebesgue'sche Maß-)Dichte einer beliebigen Menge des E_{n-1} fast überall gleich 1 ist.

[5] S. Saks, Sur quelques propriétés métriques d'ensembles, Fund. math. 26 (1936), 234–240, sowie S. Saks, Theory of the integral, Warschau 1937, S. 264 ff. und 304 ff.

[6] Vgl. z. B. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung, Berlin 1938, 3. Bd., S. 133 ff. – In der Arbeit von Roger (a. a. O.[2]) ist ein neuer Beweis dieses Differenzierbarkeitssatzes enthalten.

[7] Anders gesagt: mit der maximalen schrankengleichen Erweiterung $\tilde{\mathfrak{F}}$ bzw. $\tilde{f}\,(X)$ eines solchen Flächenstückes bzw. der zugehörigen Funktion $f\,(X)$ auf den ganzen E_{n-1} als Definitionsbereich. Es besitzt also $\tilde{f}\,(X)$ die gleiche Dehnungsschranke k wie $f\,(X)$ und für jede schrankengleiche Erweiterung $\Phi\,(X)$ von $f\,(X)$ gilt $\Phi\,(X) \leq \tilde{f}\,(X)$. Die Existenz der maximalen schrankengleichen Erweiterung ist bewiesen in Pauc und Haupt, Zum Beweis des Erweiterungssatzes für dehnungsbeschränkte Abbildungen eines metrischen Raumes in den euklidischen (erscheint später). Vgl. auch Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung (2. Aufl., Berlin 1947), 1. Bd. Nr. 5, 2, 5.

Beweis des Verteilungssatzes.

3. Bezeichnungen. Es sei $\mathfrak{M} \subset E_n$, ferner $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ das Kontingent von $\mathfrak{M}$ in P und $\mathfrak{M}_u$ die Menge aller $X \in \mathfrak{M}$ mit unvollständigem Kontingent. Wir bezeichnen ferner als offenen (Halb-)Kegel $K(P; \mathfrak{a}; \varphi)$ mit dem Scheitel P, der Achsenrichtung $\mathfrak{a}$ und der halben Öffnung (Öffnungswinkel) φ die Menge der Punkte aller von P ausgehenden offenen (d. h. P nicht enthaltenden) Halbgeraden, welche mit der von P ausgehenden Halbgeraden der Richtung $\mathfrak{a}$ einen Winkel kleiner als φ bilden $(0 < \varphi < \pi/2)$. Ein Kegel heißt *rational*, wenn die Richtungskosinus von $\mathfrak{a}$ rationales Verhältnis haben und wenn φ rational ist. Eine offene *Kugel* $\mathfrak{U}$ heißt *rational*, wenn der Radius und die Koordinaten des Mittelpunktes von $\mathfrak{U}$ rational sind (bezüglich eines festen Koordinatensystems). Schließlich seien $H_\tau = (\mathfrak{a}_\tau, \varphi_\tau, \mathfrak{U}_\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots$, die sämtlichen (abzählbar vielen, numerierten) Tripel rationaler $\mathfrak{a}$, φ, $\mathfrak{U}$. Bezeichnet dann $\mathfrak{M}_\tau$ die Menge aller $P \in \mathfrak{M}_u \mathfrak{U}_\tau$, für welche $\mathfrak{M}\mathfrak{U}_\tau K(P; \mathfrak{a}_\tau; \varphi_\tau)$ leer ist, so gilt $\mathfrak{M}_u = \mathfrak{M}_\tau \sum\limits_{\tau=1}^{\infty}$.

Unter einer Menge vom $(n-1)$-dimensionalen Maß Null (vgl. 1.) kürzer unter einer L^*_{n-1}-*Nullmenge*, verstehen wir jede Summe von (abzählbar vielen) Mengen $\mathfrak{N}_\varrho$, von denen jede eine Teilmenge eines $(n-1)$-dimensionalen dehnungsbeschränkten Flächenstückes $\mathfrak{F}_\varrho$ ist und das Maß Null auf $\mathfrak{F}_\varrho$ besitzt.[3] Die Summe (und der Durchschnitt) abzählbar vieler L^*_{n-1}-Nullmengen ist wieder eine L^*_{n-1}-Nullmenge.

4. Beweis des Verteilungssatzes (vgl. Nr. 1). Wir betrachten zunächst die einzelnen $\mathfrak{M}_\tau$, $\tau = 1, 2, \ldots$, setzen $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}_\tau$ und beziehen uns auf rechtwinklige kartesische Koordinaten $x_1, \ldots, x_{n-1}, z$, für welche die Richtung der positiven z-Achse mit $\mathfrak{a}_\tau$ übereinstimmt. Vermöge senkrechter Projektion von $\mathfrak{T}$ auf die X-Hyperebene, d. h. auf die Hyperebene $(X = (x_1, \ldots, x_{n-1});\ z = 0)$ oder kürzer: auf $z = 0$, wird $\mathfrak{T}$ topologisch abgebildet auf eine Teilmenge $\mathfrak{T}'$ von $z = 0$ derart, daß $(X, z) \in \mathfrak{T}$ gleichbedeutend ist mit $X \in \mathfrak{T}'$, $z = f(X)$, wobei $f(X)$ eine eindeutige, reelle, in $\mathfrak{T}'$ dehnungsbeschränkte Funktion ist mit der Dehnungsschranke $k = ctg\, \varphi_\tau$; die Ein-eindeutigkeit der (Pro-

jektions-)Abbildung folgt daraus, daß für $P \in \mathfrak{T}$ nicht nur $K(P; \mathfrak{a}_\tau; \varphi_\tau)$ sondern auch $K(P; -\mathfrak{a}_\tau; \varphi_\tau)$ fremd ist zu $\mathfrak{T}$.

4. 1. Es sei jetzt $\tilde{f}(X)$ die *maximale* schrankengleiche Erweiterung[7] von $f(X)$ auf die ganze X-Hyperebene und $\tilde{\mathfrak{F}}$ das kartesische Bild von $z = \tilde{f}(X)$ (im E_n der (X, z)). Aus den Definitionen von $\mathfrak{T}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ (bzw. $f(\tilde{X})$) folgt, daß kein Punkt von $\mathfrak{M}\mathfrak{U}_\tau$, insbesondere also kein Punkt von $\mathfrak{T}$ oberhalb $\tilde{\mathfrak{F}}$ liegt.[8] Angenommen nämlich, es liege der Punkt $R \in \mathfrak{M}\mathfrak{U}_\tau$ oberhalb von $\tilde{\mathfrak{F}}$; da $K^- = K(R; -\mathfrak{a}_\tau; \varphi_\tau)$ fremd ist zu $\mathfrak{T}$, so erhält man bei Ersetzung von $\tilde{\mathfrak{F}}K^-$ durch den oberhalb von $\tilde{\mathfrak{F}}$ gelegenen Teil der Begrenzung von K^- wiederum ein $\mathfrak{T}$ enthaltendes, dehnungsbeschränktes Flächenstück mit der Dehnungsschranke k, welches oberhalb $\tilde{\mathfrak{F}}$ gelegene Punkte enthält, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von $\tilde{\mathfrak{F}}$. Zufolge des Dichtesatzes, bezogen auf $z = 0$, ist in jedem Punkt $X \in \mathfrak{T}'$ bis auf eine (in $z = 0$ enthaltene) L^*_{n-1}-Nullmenge $\mathfrak{N}'$ das Kontingent $\mathfrak{C}(X; \mathfrak{T}')$ von $\mathfrak{T}'$ vollständig. Das Bild $\tilde{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{N}'$ in $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist ebenfalls eine L^*_{n-1}-Nullmenge. Daher genügt die Betrachtung von $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} - \tilde{\mathfrak{N}}$. Aus der Definition von $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{T}_1$ folgt: Ist $P \in \mathfrak{T}_1$ und ist $\mathfrak{C}(P; \tilde{\mathfrak{F}})$ in einer Hyperebene $\mathfrak{H}$ enthalten, so gilt $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{T}) = \mathfrak{C}(P; \tilde{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{H}$. Aber nach dem Differenzierbarkeitssatz für dehnungsbeschränkte Funktionen bzw. Flächenstücke[3] ist $\mathfrak{C}(P; \tilde{\mathfrak{F}})$ eine Hyperebene, sobald $P \in \mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{N}_1$, wo $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{T}_1$ eine L^*_{n-1}-Nullmenge bezeichnet. Es genügt daher, von jetzt ab nur Punkte von $\mathfrak{T}^*$ zu betrachten. Aber *für* $Q \in \mathfrak{T}^*$ *liegt* $\mathfrak{C}(Q; \mathfrak{M})$ *ganz in demjenigen abgeschlossenen Halbraum, welcher nicht oberhalb der Hyperebene* $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}(Q; \tilde{\mathfrak{F}})$ *gelegen ist und von* $\mathfrak{H}$ *berandet wird; dabei gehört also* $\mathfrak{H}$ *selbst zu* $\mathfrak{C}(Q; \mathfrak{M})$.

4. 2. Es sei jetzt $\mathfrak{M}^*$ die Summe aller, für alle $\tau = 1, 2, \ldots$, gebildeten $\mathfrak{T}^*$; dabei ist $(\mathfrak{M}_u - \mathfrak{M}^*)$ eine L^*_{n-1}-Nullmenge. Dann besitzt $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ für $P \in \mathfrak{M}^*$ folgende Eigenschaften:

1. Zu *jeder* von P ausgehenden (offenen) Halbgeraden $\mathfrak{h}$ rationaler Richtung, welche fremd ist zu $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$, existiert (mindestens) eine, in $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ enthaltene (zu $\mathfrak{h}$ fremde) Hyperebene $\mathfrak{H}$ derart, daß $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ fremd ist (mindestens) zu demjenigen

---

[8]) Der Punkt $(X, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ liegt oberhalb $\tilde{\mathfrak{F}}$, wenn $x_n > \tilde{f}(x_1 \ldots, x_{n-1})$.

der beiden, von $\mathfrak{H}$ begrenzten offenen Halbräume, in welchem $\mathfrak{h}$ enthalten ist. – **2.** Es gibt (mindestens) eine derartige, zu $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ fremde (von P ausgehende) Halbgerade $\mathfrak{h}$ rationaler Richtung bzw. Hyperebene $\mathfrak{H}$ (z. B. $\mathfrak{C}(P; \bar{\mathfrak{F}})$, vgl. Ziff. 4. 1.).

Daraus folgt: Ist $\mathfrak{H}$ eine (gemäß **2.** vorhandene) in $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ für $P \in \mathfrak{M}^*$ enthaltene Hyperebene, so kann (gemäß **1.**) keine von $\mathfrak{H}$ verschiedene, P enthaltende Hyperebene in $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ enthalten sein. Enthält daher *jeder* der beiden offenen, von $\mathfrak{H}$ begrenzten Halbräume eine von P ausgehende Halbgerade $\mathfrak{h}'$ bzw. $\mathfrak{h}''$, welche fremd ist zu $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$, so ist $\mathfrak{H}$ identisch mit den (gemäß **1.**) zu $\mathfrak{h}'$ bzw. $\mathfrak{h}''$ gehörigen Hyperebenen und beide Halbräume sind fremd zu $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$, sodaß $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M}) = \mathfrak{H}$. Enthält aber einer der Halbräume keine solche Halbgerade $\mathfrak{h}$, so ist dieser Halbraum in $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ enthalten. Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft und der Verteilungssatz ist bewiesen.

Zusatz. Die Überlegungen des letzten Absatzes lassen sich auch durch folgende ersetzen: Gemäß **1.** ist $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ der Durchschnitt der zu allen, zu $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ fremden Halbgeraden $\mathfrak{h}$ gehörigen Halbräume, also konvex. Und weil $\mathfrak{C}(P; \mathfrak{M})$ gemäß **2.** (mindestens) eine Hyperebene enthält, sind nur die im Wortlaut des Verteilungssatzes angeführten Fälle möglich.