Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen, die zugleich partikuläre Integrale sind.

Von **Paul Stäckel.**

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

W. v. Dyck hat in seiner Abhandlung: Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln, insbesondere über diejenigen, welche zugleich partikuläre Integrale sind[1]), zum ersten Male der funktionentheoretischen Behandlung der singulären Lösungen eine geometrische Behandlung an die Seite gestellt. Er hat sich dabei von dem Gesichtspunkt leiten lassen, die auftretenden Möglichkeiten an einer größeren Zahl charakteristischer Beispiele anschaulich zu machen, diese Beispiele aber nicht beliebig herauszugreifen, sondern sie systematisch und jeweils so einfach wie möglich auszuwählen. Bei dem Fall, daß eine partikuläre Integralkurve von einer Gruppe von Zweigen weiterer partikulärer Integralkurven berührt wird, also zugleich eine eigentliche singuläre Lösung ist, hat v. Dyck das „klassische Beispiel" untersucht und graphisch dargestellt, das Cauchy in seinen Leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral (Paris 1844) angegeben hatte, nämlich die Differentialgleichung dritten Grades

$$y'^3 - 4\,xy \cdot y' + 8\,y^2 = 0$$

mit dem allgemeinen Integral

$$y = C(x - C)^2,$$

das für $C = 0$ die zugleich singuläre und partikuläre Lösung

[1]) Abhandlungen der K. B. Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, XXV. Bd., 4. Abh. München 1910.

$y = 0$ ergibt. Gewiß läßt dieses Beispiel an Einfachheit nichts zu wünschen übrig, allein es entsteht doch die systematische Frage, ob es nicht bereits unter den Differentialgleichungen zweiten Grades solche gibt, bei denen eine partikulär-singuläre Lösung der beschriebenen Art vorhanden ist. Im folgenden soll gezeigt werden, daß diese Frage zu verneinen ist.

An Stelle der Differentialgleichung zweiten Grades betrachte man die zugeordnete Schar der Integralkurven, die ein gewisses Gebiet der xy-Ebene zweifach überdecken und durch eine Gleichung

$$f(x, y)\, C^2 + g(x, y)\, C + h(x, y) = 0$$

dargestellt werden. Dann darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Kurve K, die eine partikulär-singuläre Lösung liefert, dem Werte $C = 0$ entspricht. Diese Kurve muß also der Gleichung

$$h(x, y) = 0$$

genügen, das heißt, das reelle geometrische Gebilde, das durch diese Gleichung erklärt wird, und das mit H bezeichnet werden möge, muß die Kurve K als Bestandteil enthalten. Damit andererseits die Kurve K von einer Gruppe von Zweigen weiterer partikulärer Integralkurven berührt wird, muß in ihr die Diskriminante

$$4\, f(x, y) \cdot h(x, y) - g^2(x, y) = 0$$

sein, also, weil $h(x, y)$ bereits verschwindet, die Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

bestehen, das heißt, das reelle geometrische Gebilde, das durch diese Gleichung erklärt wird und das mit G bezeichnet werden möge, muß ebenfalls die Kurve K als Bestandteil enthalten. Dagegen darf jetzt das reelle geometrische Gebilde F, das durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ erklärt wird, nicht den Bestandteil K enthalten, weil K sonst eine „parasitische“ Kurve wäre, die mit der betrachteten Differentialgleichung gar nichts zu tun hat.

Die soeben abgeleitete Bedingung, daß die Gebilde G

und H die Kurve K gemeinsam haben müssen, ist notwendig. Untersuchen wir jetzt, ob sie hinreichend ist, betrachten wir also eine Kurvenschar

$$f(x, y)\,C^2 + g(x, y)\,C + h(x, y) = 0,$$

bei der den geometrischen Gebilden G und H, die durch die Gleichungen $g(x, y) = 0$ und $h(x, y) = 0$ dargestellt werden, ein Bestandteil K gemeinsam ist, während diese Kurve K dem durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ dargestellten Gebilde nicht angehört. Es sei C' irgend ein von Null verschiedener Wert der willkürlichen Konstanten C. Auf der zugehörigen Integralkurve K' besteht die Gleichung

$$f(x, y)\,C'^2 + g(x, y)\,C' + h(x, y) = 0.$$

Mithin müssen die Punkte, die den Kurven K und K' gemeinsam sind, der Gleichung

$$f(x, y)\,C'^2 = 0$$

genügen, oder da C' von Null verschieden ist, der Gleichung

$$f(x, y) = 0.$$

Allein das durch diese Gleichung dargestellte reelle geometrische Gebilde F sollte die Kurve K nicht enthalten. Mithin liefern nur diejenigen Werte C' eine Kurve K', die mit der Kurve K einen Punkt gemeinsam hat, bei welchen die Kurve K, durch einen Schnittpunkt der Kurve K mit dem Gebilde F hindurchgeht. Diese Schnittpunkte können aber, der Voraussetzung nach, keinen stetigen Teil von K erfüllen, und daher ist K keine Integralkurve der verlangten Art.

Damit ist der verlangte Beweis geliefert. Man wird jedoch, um das Verhalten der Differentialgleichungen zweiten Grades ganz zu verstehen, wissen wollen, welche Rolle der Integralkurve K in der Schar der Integralkurven zukommt. Die Untersuchungen W. v. Dycks geben hierüber willkommene Aufklärung. Nach der von ihm eingeführten Bezeichnungsweise ist die Kurve K eine Grenzkurve, das heißt eine Kurve, der sich eine Schar von Zweigen der partikulären Integralkurven von einer oder von zwei Seiten annähert, ohne sie (singuläre

Stellen ausgenommen) zu berühren oder zu durchsetzen; es ist dies der „Typus II" der singulären Lösungen. Als einfachstes Beispiel für das Auftreten einer solchen Grenzkurve gibt v. Dyck (a. a. O., S. 32) die Differentialgleichung

$$m x^2 \cdot y'^2 + y(2mx - n^2 y) \cdot y' + m y^2 = 0.$$

Legt man in ihr den Konstanten m und n die Werte bei:

$$m = -1, \quad n = +1,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$x^2 \cdot y'^2 + y(2x + y) \cdot y' + y^2 = 0,$$

der die Kurvenschar

$$C^2 - yC - xy = 0$$

genügt. An dieser Differentialgleichung lassen sich die vorhergehenden Betrachtungen in lehrreicher Weise erläutern. Die Gebilde G und H haben hier die Gerade $y = 0$, also die x-Achse, gemeinsam, und diese ist hier die Kurve K, die dem Werte $C = 0$ entspricht. Ist C von 0 verschieden, so erhält man lauter gleichseitige Hyperbeln, die zur gemeinsamen Asymptote die x-Achse haben, also die Kurve K nicht berühren. Vielmehr ist die x-Achse eine Grenzkurve, der sich die gleichseitigen Hyperbeln mit abnehmendem C unbeschränkt nähern[1]).

---

[1]) Herr v. Dyck teilt mir hiezu die folgende geometrische Bemerkung mit:

Deutet man in bekannter Weise die Gleichung $F(x, y, C) = 0$ der Integralkurven als Fläche im Raum $x, y, z = C$, so ist Bedingung für eine zugleich partikuläre und eigentlich singuläre Lösung, daß die Projektion eines Zweiges der Umrißlinie der Fläche $F = 0$ auf die xy-Ebene mit der Projektion eines Zweiges einer Integralkurve $z = C_0$ zusammenfällt. Dann aber wird diese Fläche von den Erzeugenden des projizierenden Umrißzylinders nicht nur in jenen Umrißpunkten berührt, sondern auch noch in den Punkten jenes Zweiges von $z = C_0$ geschnitten, sie muß also mindestens vom dritten Grade in z sein.

Im Falle der „Grenzkurve" (singuläre Lösung vom Typus II) fällt dagegen ein Zweig der Umrißlinie selbst mit einem Zweig der Kurve $z = C_0$ zusammen und damit ist die Möglichkeit gegeben, daß die Fläche $F = 0$ in z nur vom zweiten Grade ist, wie in dem oben herangezogenen Beispiel des Kegels $z^2 - zy - xy = 0$.