

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Von **Otto Szász.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Juni 1912.

Die Konvergenz- und Divergenztheorie der unendlichen Kettenbrüche ist noch ziemlich lückenhaft; nur dann, wenn wir die Elemente eines Kettenbruches sehr einschränkenden Bedingungen unterwerfen, können wir bestimmte Aussagen über seine Konvergenz bzw. Divergenz machen. Der Grund dieser Tatsache liegt darin, daß der Kettenbruch eine sehr komplizierte Funktion seiner Elemente ist. Zumal über Kettenbrüche, deren Elemente nicht auf das reelle Gebiet beschränkt sind, gibt es erst seit neuerer Zeit einige eingehendere Untersuchungen¹⁾.

Im folgenden wird der Versuch gemacht zur Vervollständigung dieser Theorie einen Beitrag zu liefern. Das Hauptresultat besteht in einigen Konvergenzkriterien, die — meines Wissens — bis jetzt ganz unbekannt geblieben sind. Im Grunde sind dies Kriterien für das Nichtverschwinden gewisser unendlicher Determinanten²⁾. Genauer gesagt, gebe ich für Determinanten, die von einer komplexen Veränderlichen z ab-

¹⁾ Vgl. insbesondere die grundlegenden Arbeiten des Herrn Pringsheim. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28 (1898), 30 (1900), 35 (1905), 40 (1910), 41 (1911); dort finden sich auch weitere Literaturnachweise.

²⁾ Ich hatte schon in meiner Inauguraldissertation (*A végtelen determinánsok elméletéhez*, Budapest 1911, p. 4 [ungarisch]) eine Anwendung der unendlichen Determinanten auf die Theorie der Kettenbrüche versprochen; in dieser Note führe ich dies aus.

hängen, Gebiete der z -Ebene an, in denen keine Nullstelle der Determinante liegt. Dabei treten zwei der Sätze in Beziehung zu zwei Ungleichungen von Herrn J. Schur, die sich auf die charakteristischen Wurzeln linearer Substitutionen beziehen¹⁾.

In § 1 diskutiere ich ein zuerst von Herrn Helge von Koch gegebenes²⁾ und von Herrn Alfred Pringsheim erweitertes³⁾ Konvergenzkriterium. In § 2 leite ich drei Hilfsätze in Form von Ungleichungen ab, die auch an sich von Interesse sind und die uns zu neuen Konvergenzkriterien führen. Zunächst leite ich mit Hilfe dieser Ungleichungen drei Paare von Sätzen über das Nichtverschwinden einer Determinante $A(x)$ ab (Sätze α_1 bis γ_2 in § 3). Diese Sätze kann man auch als Konvergenzkriterien für den Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_r z^2}{1} \right]_1^\infty$ aussprechen (Sätze A_1 bis I_2). Aus Satz A_1 folgt durch eine geeignete Umformung ein allgemeiner Konvergenzsatz für den Kettenbruch $\left[\frac{c_r}{1} \right]_1^\infty$, welcher den von Koch-Pringsheim'schen Satz als speziellen Fall enthält (Satz 1, § 4). Auf analogem Wege gelangt man zu den Sätzen 2_1 und 2_2 (§ 5), welche unendlich viele Parameter enthalten (ähnlich wie ein Pringsheim'scher Satz) und aus welchen durch Spezialisierung nochmals Satz 1 abgeleitet wird. Ebenso gewinnt man aus I_1 und I_2 die Sätze 3_1 und 3_2 (§ 6). Schließlich ergeben die Sätze 1 bis 3_2 , angewandt auf den Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_r z^2}{1} \right]_1^\infty$, Verallgemeinerungen der Sätze A_1 bis I_2 , was teilweise nur angedeutet wird (§ 7). Anwendungen (auf Zylinderfunktionen, die ich als unendliche Kettenbruchdeterminanten darstelle) und Erweiterungen dieser Untersuchung möchte ich in anderen Arbeiten veröffentlichen.

1) Vgl. Fußnote S. 336.

2) Bull. Soc. math. de France, t. 23 (1895), p. 37.

3) Diese Berichte, Bd. 35 (1905), p. 395 ff.

§ 1.

Der von Koch-Pringsheimsche Satz.

Gegeben sei allgemein der Kettenbruch

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots = \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^{\infty}, \quad (1)$$

wo die a_r, b_r beliebige, von Null verschiedene (reelle oder komplexe) Zahlen bedeuten; setzen wir

$$\frac{a_1}{b_1} = c_1, \quad \frac{a_2}{b_1 b_2} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} = c_r, \quad \dots,$$

so ist der Kettenbruch (1) dem folgenden äquivalent:

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{1} + \frac{c_3}{1} + \cdots = \left[\frac{c_r}{1} \right]_1^{\infty}; \quad (2)$$

es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir bloß Kettenbrüche dieser Form betrachten.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausschließlich mit solchen Kettenbrüchen, bei denen die Reihe

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = \sum_1^{\infty} c_r$$

absolut konvergiert.

Sei daher

$$|c_2| + |c_3| + |c_4| + \cdots = \sum_2^{\infty} |c_r| = s;$$

bereits Herr von Koch hat bewiesen, daß der Kettenbruch (2) konvergiert, falls $s < 1$; Herr Pringsheim hat dieses Kriterium auf elementarem Wege abgeleitet und auch auf den Fall $s = 1$ erweitert.

Es liegt nun die Frage nahe, ob der Kettenbruch (2) nicht auch für andere Werte von s notwendig konvergiert. Um dies zu untersuchen, teilen wir alle möglichen Werte von s in drei Klassen ein, je nachdem die zugehörigen Kettenbrüche (wir sagen kurz der Kettenbruch (2) gehöre zur Zahl s) bzw. folgende Eigenschaften besitzen:

1. alle Kettenbrüche, die zur Zahl s gehören, konvergieren;
2. es gibt unter diesen Kettenbrüchen sowohl konvergente wie auch divergente;
3. alle diese Kettenbrüche divergieren.

Eine vierte Klasse gibt es nicht.

Zunächst ist klar, daß in die Klasse 3 keine einzige Zahl gehört; denn wenn alle c_r reelle positive Zahlen sind, so konvergiert der Kettenbruch für jeden Wert von s . Ferner gehören gemäß dem von Herrn Pringsheim erweiterten von Kochschen Satze alle $s \leq 1$ in die Klasse 1. Ich zeige, daß alle übrigen s in die Klasse 2 gehören, d. h. daß es zu jedem $s > 1$ mindestens einen divergenten Kettenbruch gibt. Dessen Divergenz ist dann offenbar außerwesentlich. (Bezüglich dieser Ausdrucksweise vgl. Pringsheim, diese Berichte, Bd. 40, 6. Abh., p. 19–20.)

Aus der bekannten Eulerschen Formel (s. Enz. der Math., Bd. I, p. 134, Formel (104)) ergibt sich für $p_r = 1$ ($r > 1$), $x = 1$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{q_1 q_2 \dots q_r y^r} = \frac{1}{q_1 y} + \frac{q_1 y}{q_2 y - 1} + \dots + \frac{q_{r-1} y}{q_r y - 1} + \dots;$$

dabei besteht zwischen der Reihe und dem Kettenbruch Äquivalenz, so daß beide nur gleichzeitig konvergieren oder divergieren können. Anders geschrieben wird dies:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} y^{-r}}{q_1 q_2 \dots q_r} &= \frac{1}{q_1 y} + \frac{1}{q_2 y - 1} + \frac{q_2 y}{(q_2 y - 1)(q_3 y - 1)} + \dots \\ &\quad + \frac{q_{r-1} y}{(q_{r-1} y - 1)(q_r y - 1)} + \dots \end{aligned}$$

und wenn man $-x$ statt y einsetzt, schließlich:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{-r}}{q_1 q_2 \dots q_r} &= \frac{1}{q_1 x} - \frac{1}{q_2 x + 1} - \frac{q_2 x}{(q_2 x + 1)(q_3 x + 1)} - \dots \\ &\quad - \frac{q_{r-1} x}{(q_{r-1} x + 1)(q_r x + 1)} - \dots \end{aligned}$$

Ist nun $\sum^r q_r$ konvergent, so divergiert die Potenzreihe, also auch der Kettenbruch für jeden Wert von x ; ist dann noch $q_r > 0$ und $x > 0$, so wird

$$s(x) = \frac{1}{q_2 x + 1} + \sum_3^{\infty} \frac{q_{r-1} x}{(q_{r-1} x + 1)(q_r x + 1)}$$

und bei passender Wahl des x und der q_r nimmt $s(x)$ jeden beliebigen, zwischen 1 und $+\infty$ liegenden Wert an. $s(x)$ ist nämlich eine stetige Funktion von x in jedem endlichen, auf der reellen positiven Halbachse liegenden Intervall; ferner ist $s(0) = 1$ und

$$s(1) = \frac{1}{q_2 + 1} + \sum_3^{\infty} \frac{q_{r-1}}{(q_{r-1} + 1)(q_r + 1)};$$

dieser Ausdruck wird aber bei entsprechender Wahl der q_r größer als irgend eine vorgegebene Zahl, da für $q_2 = 1$, $q_3 = 1$, $\dots$, $q_n = 1$

$$s(1) > \frac{n}{4}$$

wird.

Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Man kann auch allgemeinere Betrachtungen anstellen. Wenn wir die unendliche Menge aller Kettenbrüche betrachten, die zu einer Zahl s ($s \leq 1$) gehören, d. h. alle Kettenbrüche $\left[\begin{smallmatrix} a_r \\ 1 \end{smallmatrix} \right]_1^{\infty}$, für die $\sum_2^{\infty} |a_r|$ einen vorgegebenen Wert s hat ($s \leq 1$).

so sind ja alle Kettenbrüche konvergent; es läßt sich aber noch mehr zeigen; ist die gegebene Zahl s kleiner als 1, so besitzt die Menge eine endliche obere und untere Schranke; aber für $s = 1$ ist dies nicht der Fall. Auch auf diesem Wege können wir zu unserem Satze gelangen.

Es ist also ersichtlich, daß durch bloße Betrachtung der Summe s der von Koch-Pringsheimsche Satz nicht verallgemeinert werden kann; in der im § 4 gegebenen Verallgemeinerung dieses Satzes spielen neben der Summe s noch die

Summen $\sum_2^{\infty} R(c_r)$, $\sum_2^{\infty} J(c_r)$ eine Rolle, wobei $R(c_r)$ den reellen Teil der Zahl c_r , $J(c_r)$ ihren von der imaginären Einheit befreiten imaginären Teil bedeutet.

§ 2.

Drei Hilfssätze.

Hilfssatz I. Es gilt für nichtnegative d_r und x_r und für jedes positive ganze n die Ungleichung

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < \left(\sum_1^n d_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_1^{n+1} x_r^2$$

und damit Gleichheit gelte, ist notwendig, daß $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=0$, ..., $x_{n+1}=0$ sei, vorausgesetzt, daß $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ und $\sum_r d_r^2 \neq 0$ ist.

Beweis. Ich beziehe mich auf die Ungleichung

$$\sum_1^n a_r b_r < \left(\sum_1^n a_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^n b_r^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

die leicht aus einer von Lagrange benützten Identität folgt und schon von Cauchy¹⁾ bewiesen wurde. Aus dieser Ungleichung wird für $a_r = d_r$, $b_r = x_r x_{r+1}$:

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < 2 \left(\sum_1^n d_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

und es ist nur noch zu beweisen, daß

$$\left(\sum_1^{n+1} x_r^2 \right)^2 \geq 4 \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2.$$

Dazu beweisen wir, daß

$$\left(\sum_1^{n+1} x_r^2 \right)^2 - 4 \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2 \geq (x_1^2 - x_2^2 + \dots + (-1)^n x_{n+1}^2)^2;$$

¹⁾ Cours d'analyse de l'école royale polytechnique (Paris 1821), Note II. 16^e théorème, p. 455—456.

dies heißt nämlich:

$$\begin{aligned} \sum_1^{n+1} x_r^4 - 2 \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2 + 2 \sum_{\mu-r \geq 2} x_r^2 x_\mu^2 &\geq \sum_1^{n+1} x_r^4 - 2 \sum_{r, \mu} x_{2r-1}^2 x_{2\mu}^2 \\ &+ 2 \sum_{\mu > r} x_{2r}^2 x_{2\mu}^2 + 2 \sum_{\mu > r} x_{2r-1}^2 x_{2\mu-1}^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_{\mu-r \geq 2} x_r^2 x_\mu^2 + \sum_{r, \mu} x_{2r-1}^2 x_{2\mu}^2 &\geq \sum_{\mu > r} x_{2r}^2 x_{2\mu}^2 + \sum_{\mu > r} x_{2r-1}^2 x_{2\mu-1}^2 \\ &+ \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2, \end{aligned}$$

eine Relation, deren Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist. Dieselbe zeigt auch, daß für das Bestehen der Gleichheit die Beziehungen

$$x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad \dots, \quad x_{n+1} = 0$$

notwendig sind, da auf der linken Seite die Glieder vorkommen:

$$x_1^2(x_4^2 + x_6^2 + \dots) + x_2^2(x_5^2 + x_7^2 + \dots),$$

die auf der rechten Seite überhaupt nicht auftreten, und laut Voraussetzung $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ sind, woraus unsere Behauptung erhellt.

Man kann den Hilfssatz I auch durch Bestimmung eines relativen Extremums leicht ableiten.

Hilfssatz II. Liegen die $\delta_r (r \geq 1)$ im Intervalle 0 bis 1 (die Grenzen inbegriffen), so gilt die Ungleichung

$$\sum_1^{n+1} x_r^2 \geq 2 \sum_1^n (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1}$$

für jedes positive ganze n und für beliebige nicht-negative x_r ; es gilt sicher die Ungleichheit, wenn entweder

1. $\delta_1 x_1 \neq 0$ ist, oder wenn
2. wenigstens für einen Wert von r , $r = \alpha$, $\delta_\alpha = 1$ und $\delta_{\alpha+1} x_{\alpha+1} \neq 0$ ist.

Beweis. Offenbar ist

$$[(1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} x_r - \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_{r+1}]^2 \geq 0 \quad (r \geq 1)$$

oder durch Auswertung des Quadrates

$$(1 - \delta_r) x_r^2 + \delta_{r+1} x_{r+1}^2 - 2 (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} > 0$$

und es gilt hier sicher die Ungleichheit für

$$\delta_r = 1, \quad \delta_{r+1} x_{r+1} \neq 0.$$

Durch Summierung über $r = 1, 2, \dots, n$ wird jetzt:

$$(1 - \delta_1) x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \delta_{n+1} x_{n+1}^2 - 2 \sum_1^n (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} > 0,$$

woraus unser Satz unmittelbar folgt.

Es wäre interessant zu entscheiden, ob folgende Umkehrung dieses Satzes gilt:

Ist für beliebige nichtnegative x_r

$$\sum_1^{n+1} x_r^2 \geq 2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1},$$

so kann man die δ_r so bestimmen, daß

$$d_r^2 \leq (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Hilfsatz III. Es gilt für nichtnegative d_r und x_r und für jedes positive ganze n die Ungleichung

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < d_1 x_1^2 + \sum_1^n (d_r + d_{r+1}) x_{r+1}^2.$$

Beweis. Es ist

$$2 d_r x_r x_{r+1} < d_r (x_r^2 + x_{r+1}^2) \quad (r \geq 1)$$

durch Summierung über $r = 1, 2, \dots, n$

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < \sum_1^n d_r x_r^2 + \sum_1^n d_r x_{r+1}^2$$

oder

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < d_1 x_1^2 + \sum_1^n d_{r+1} x_{r+1}^2 + \sum_1^n d_r x_{r+1}^2,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Bei entsprechenden Konvergenzbedingungen bleiben diese Sätze natürlich auch für $n = \infty$ gültig.

§ 3.

Über die Nullstellen gewisser Kettenbruchdeterminanten.

Wir setzen stets voraus, daß $\sum_1^\infty c_r$ konvergiert; es ist dann

$$\left[\begin{array}{c} c_r \\ 1 \end{array} \right]_1^\infty = c_1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \dots \\ -c_3 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -c_4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \dots \\ -c_2 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -c_3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right|$$

oder kurz

$$\left[\begin{array}{c} c_r \\ 1 \end{array} \right]_1^\infty = \frac{c_1 D_2}{D_1}$$

und die unendlichen Determinanten D_1, D_2 sind absolut konvergent¹⁾. Die beiden Determinanten können nicht gleichzeitig verschwinden. Um dies zu beweisen, setzen wir allgemein:

$$D_n = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \dots \\ -c_{n+1} & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -c_{n+2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Durch Entwicklung dieser Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne wird

$$D_n = D_{n+1} + c_{n+1} D_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

¹⁾ Helge von Koch, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1895, t. 120, p. 144—147.

wäre also $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$, so müßte auch D_n für jeden Wert von n verschwinden; dies führt aber zu einem Widerspruch, denn es ist bekanntlich¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1.$$

Also ist für $D_1 \neq 0$ der Kettenbruch (2) konvergent, für $D_1 = 0$ außerwesentlich divergent.

Wir suchen nun Bedingungen dafür, daß D_1 von Null verschieden sei. Zu diesem Ende wollen wir eine allgemeinere Untersuchung für gewisse Kettenbruchdeterminanten, die von einer komplexen Veränderlichen z abhängen, durchführen.

Gegeben sei die Kettenbruchdeterminante:

$$A(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & 0 & \dots \\ -a_2 z & 1 & z & \dots \\ 0 & -a_3 z & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$A(z) = \begin{vmatrix} 1 & u_1 z & 0 & \dots \\ -\frac{a_2 z}{u_1} & 1 & u_2 z & \dots \\ 0 & -\frac{a_3 z}{u_2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

da die beiden Determinanten einander äquivalent, d. h. ihre n^{ten} Näherungswerte für jedes n einander gleich sind. Die u_r seien sämtlich von Null verschieden, sonst aber beliebige Zahlen.

Ist dann $\sum_2^{\infty} |a_r|$ konvergent, so stellt $A(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z dar¹⁾. Für das Folgende wird es sich am zweckmäßigsten erweisen die u_r so zu bestimmen, daß die Ausdrücke

¹⁾ Helge von Koch, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1895, t. 120, p. 144–147.

$$A_r = \left| \bar{u}_r - \frac{a_{r+1}}{u_r} \right|^2 \quad (r > 1)$$

ihre kleinstmöglichen Werte annehmen¹⁾. Wir wollen die u_r schon jetzt dieser Forderung gemäß bestimmen und in $A(z)$ einsetzen. Es ist

$$A_r = u_r \bar{u}_r + \frac{a_{r+1} \bar{a}_{r+1}}{u_r \bar{u}_r} - a_{r+1} - \bar{a}_{r+1},$$

wobei $a_{r+1} + \bar{a}_{r+1}$ von u_r unabhängig ist; setzen wir kurz

$$u_r \bar{u}_r = x_r,$$

so ist die positive Zahl x_r so zu bestimmen, daß

$$x_r + \frac{a_{r+1} \bar{a}_{r+1}}{x_r}$$

möglichst klein wird. Dies wird offenbar erreicht für

$$x_r^2 = a_{r+1} \bar{a}_{r+1}$$

oder

$$u_r \bar{u}_r = |a_{r+1}| \quad (r > 1), \quad (3)$$

und es wird dann

$$A_r = 2 |a_{r+1}| - 2 R(a_{r+1}).$$

Sei

$$u_r = r_r e^{i\theta_r}$$

und setzen wir, im Einklang mit Gleichung (3):

$$u_r = r_{r+1}^{\frac{1}{2}} \quad (r > 1),$$

so wird

$$A(z) = \begin{vmatrix} 1 & r_2^{\frac{1}{2}} z & 0 & \dots \\ -r_2^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_2} z & 1 & r_3^{\frac{1}{2}} z & \dots \\ 0 & -r_3^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_3} z & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

¹⁾ $\bar{u}_r$ bedeutet die zu der Zahl u_r konjugiert komplexe. Zu bemerken ist, daß dann auch die Ausdrücke $B_r = \left| \bar{u}_r + \frac{a_{r+1}}{u_r} \right|^2$ ihre kleinstmöglichen Werte annehmen.

Da $\sum_2^{\infty} r_r$ konvergiert, so wird $z = z_1$ dann und nur dann eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$A(z) = 0$$

sein, wenn das unendliche homogene lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} x_1 + r_2^{\frac{1}{2}} z_1 x_2 &= 0 \\ -r_2^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_2} z_1 x_1 + x_2 + r_3^{\frac{1}{2}} z_1 x_3 &= 0 \\ -r_3^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_3} z_1 x_2 + x_3 + r_4^{\frac{1}{2}} z_1 x_4 &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} (4)$$

außer der trivialen Auflösung

$$x_r = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Auflösung besitzt, die noch der Bedingung genügt, daß $\sum_1^{\infty} r |x_r|^2$ konvergiert¹⁾. Aus diesem Gleichungssystem folgt leicht die Gleichung

$$\sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r + \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} z_1 \bar{x}_r x_{r+1} - \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_{r+1}} z_1 x_r \bar{x}_{r+1} = 0; \quad (5)$$

nun ist $A(0) = 1$, also z_1 , wenn es eine Nullstelle von $A(z)$ sein soll, sicher von Null verschieden; aus (5) folgt daher

$$\frac{z_1}{z_1 z_1} \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r + \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} \bar{x}_r x_{r+1} - \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_{r+1}} x_r \bar{x}_{r+1} = 0.$$

Ersetzen wir hier alle Glieder durch ihre komplex konjugierten, so erhalten wir noch die Gleichung:

$$\frac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r + \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} \bar{x}_r x_{r+1} - \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r \bar{x}_{r+1} e^{-i\theta_{r+1}} = 0.$$

Sei ferner

$$z_1 = \zeta_1 + i\zeta_2,$$

¹⁾ Vgl. Helge von Koch, Rendic. del circ. matem. di Palermo, t. XXVIII (1909), p. 261–263 und meine Dissertation (Fußnote 2), §§ 10, 13 und 14.

so folgen aus den letzten beiden Gleichungen durch Addition bzw. Subtraktion die Gleichungen:

$$\frac{2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \zeta_1 \sum_1^{\infty} x_r \bar{x}_r + \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-i\vartheta_{r+1}}) x_r \bar{x}_{r+1} \\ + \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + e^{i\vartheta_{r+1}}) \bar{x}_r x_{r+1} = 0$$

$$\frac{2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \zeta_2 i \sum_1^{\infty} x_r \bar{x}_r - \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + e^{i\vartheta_{r+1}}) x_r \bar{x}_{r+1} \\ + \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-i\vartheta_{r+1}}) \bar{x}_r x_{r+1} = 0,$$

aus denen man sofort die Ungleichungen gewinnt:

$$\frac{2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \zeta_1 \left| \sum_1^{\infty} x_r \bar{x}_r \right| \leq \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \{1 - e^{-i\vartheta_{r+1}} + 1 - e^{i\vartheta_{r+1}}\}$$

$$\frac{2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \zeta_2 \left| \sum_1^{\infty} x_r \bar{x}_r \right| \leq \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \{1 + e^{i\vartheta_{r+1}} + 1 + e^{-i\vartheta_{r+1}}\}.$$

Offenbar ist

$$|1 - e^{-i\vartheta_{r+1}}| = |1 - e^{i\vartheta_{r+1}}| = 2^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}}$$

$$|1 + e^{i\vartheta_{r+1}}| = |1 + e^{-i\vartheta_{r+1}}| = 2^{\frac{1}{2}} (1 + \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}}$$

und daher können wir unsere Ungleichungen in die Form setzen:

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} x_r \bar{x}_r < 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \quad (6_1)$$

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} x_r \bar{x}_r < 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}|. \quad (6_2)$$

Nun ziehen wir die in § 2 gegebenen Hilfssätze heran. Die Anwendung eines jeden dieser Hilfssätze liefert zwei Ungleichungen für die Nullstellen von $A(z)$. Wenden wir zunächst Hilfssatz I an. Wir bemerken vorerst, daß $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ sein muß und daß die x_r nicht von einem gewissen r an alle verschwinden können, denn in diesem Falle müßten, in Anbetracht des Gleichungssystems (4), alle x_r verschwinden,

was aber gegen unsere Voraussetzung ist. Jetzt folgt durch Anwendung der Ungleichung I auf (6₁) und (6₂):

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} r_r x_r \bar{x}_r < \left[\sum_1^{\infty} r_{r+1} (1 - \cos \vartheta_{r+1}) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_r x_r \bar{x}_r$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}|\zeta_2|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} r_r x_r \bar{x}_r < \left[\sum_1^{\infty} r_{r+1} (1 + \cos \vartheta_{r+1}) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_r x_r \bar{x}_r$$

oder

$$\frac{2\zeta_1^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} < \sum_1^{\infty} r_{r+1} (1 - \cos \vartheta_{r+1}) \quad (7_1)$$

$$\frac{2\zeta_2^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} < \sum_1^{\infty} r_{r+1} (1 + \cos \vartheta_{r+1}) \quad (7_2)$$

In Worten: ist $z_1 = \zeta_1 + i\zeta_2$ eine Wurzel der Gleichung $A(z) = 0$, so gelten für diese die Ungleichungen (7₁) und (7₂)¹⁾. Nur wenn eine der Summen verschwindet, wird auch jetzt Gleichheit gelten und es muß dann ζ_1 bzw. ζ_2 auch verschwinden.

¹⁾ Es sei hier an einen allgemeinen Satz von J. Schur erinnert (Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. Mathem. Annalen, Bd. 66, 1909, p. 488—510): sei

$$A = (a_{\lambda\lambda}) \quad (\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

eine Matrix mit beliebigen Koeffizienten. Die charakteristischen Wurzeln von A , d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$|A - xE| = 0$$

seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; sei $\omega_r = \varrho_r + i\sigma_r$, dann gelten die Ungleichungen [l. c., p. 495]

$$4 \sum_r \varrho_r^2 \leq \sum_{\lambda, \lambda} |a_{\lambda\lambda} + \bar{a}_{\lambda\lambda}|^2$$

$$4 \sum_r \sigma_r^2 \leq \sum_{\lambda, \lambda} |a_{\lambda\lambda} - \bar{a}_{\lambda\lambda}|^2;$$

und es gilt dies a fortiori für jedes einzelne der ϱ_r und σ_r . Wenn es sich nur um dies letztere handelt, d. h. wenn ich bloß für die einzelnen Wurzeln Ungleichungen suche, so lassen sich, wie ich in einer anderen Arbeit zeigen will, die diesbezüglichen Resultate noch verschärfen und unmittelbar auf Integralgleichungen übertragen. Die Überlegung wird der obigen ähnlich sein.

Wir können unser Resultat in folgende zwei Sätze zusammenfassen:

Satz a_1 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$, $a_r = r_r e^{i\vartheta_r}$; ist dann

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^\infty r_r (1 - \cos \vartheta_r), \quad (7_1)$$

so ist $A(x) \neq 0$.

Satz a_2 . Ist $\eta \neq 0$ und

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^\infty r_r (1 + \cos \vartheta_r), \quad (7_2)$$

so ist $A(x) \neq 0$.

Die Anwendung des Hilfssatzes II wird ebenfalls zwei Sätze liefern. Zunächst ergibt sich folgendes: gäbe es Werte $\delta_r (r > 1)$, die den Ungleichungen

$$\frac{2|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{2}} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} \quad (r > 1) \quad (8)$$

genügen, so wäre auch

$$\frac{|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^\infty r_r x_r \bar{x}_r > 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^\infty r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \quad (9)$$

und es würde hier Ungleichheit in jedem der folgenden Fälle gelten:

1. $\delta_1 x_1 \neq 0$,
2. mindestens für einen Wert von r ist:

$$\frac{2|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| > 2^{\frac{1}{2}} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}|,$$

3. für einen Wert von r ist:

$$\delta_r = 1 \quad \text{und} \quad \delta_{r+1} x_{r+1} \neq 0.$$

Nur wenn $\zeta_1 = 0$ und für jedes r $1 - \cos \vartheta_{r+1} = 0$ ist, wird in (9) jedenfalls Gleichheit bestehen.

Bemerken wir nun, daß x_1 nicht verschwinden kann und auch von drei aufeinanderfolgenden x_r nie zwei verschwinden

können; denn würde einer dieser beiden Fälle eintreten, so müßten, mit Rücksicht auf das Gleichungssystem (4), alle x_r verschwinden; dies ist aber gegen unsere Voraussetzung. Hieraus folgt noch, daß $x_r x_{r+1}$ und $x_{r+1} x_{r+2}$ nicht beide, und von acht aufeinanderfolgenden $x_r x_{r+1}$ höchstens drei verschwinden können. Wir dürfen daher die Bedingungen 1, 2, und 3 durch folgende ersetzen:

$$1'. \delta_1 \neq 0,$$

2'. in (8) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

2''. es gibt mindestens einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ Ungleichheit gilt,

$$3'. \delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0 \text{ für einen Wert von } r.$$

Würde nun aber in (9) Ungleichheit gelten, so wäre dies im Widerspruch zu (6₁), also sind für eine Wurzel z_1 die eben formulierten Bedingungen nicht erfüllbar, d. h. eine Zahl x , die diesen Bedingungen genügt, kann nicht Wurzel von $A(z) = 0$ sein; wir haben somit den

Satz β_1 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$; gibt es dann solche δ_r ($r \geq 1$), daß

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq r_{r+1} (1 - \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r \geq 1) \quad (10_1)$$

ist und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

$$a) \delta_1 \neq 0,$$

b₁) in (10₁) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₁) Ungleichheit gilt,

c) es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r , so ist $A(x) \neq 0$.

Durch Anwendung des Hilfssatzes II auf (6₂) folgt der analoge Satz:

Satz β_2 . Gibt es solche δ_r , daß $\eta \neq 0$ und

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq r_{r+1} (1 + \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r > 1) \quad (10_2)$$

und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a') $\delta_1 \neq 0$,

b₁') in (10₂) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂') es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₂) Ungleichheit gilt,

c') es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r , so ist $\Delta(x) \neq 0$.

Natürlich ist für alle diese Sätze die Vorbedingung, daß $\sum_r r_r$ konvergiert.

Aus Hilfssatz III folgt die Ungleichung:

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| &< \frac{r_2^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} |x_1|^2 \\ &+ \sum_2^{\infty} r \left[\frac{r_r^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_r)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \right] |x_r|^2; \end{aligned}$$

wäre also

$$\frac{r_r^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_r)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} < \frac{|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \quad (r \geq 2) \quad (11)$$

und zwar so, daß wenigstens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r die Ungleichheit gilt, so wäre auch

$$2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| < \frac{|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} x_r \overline{x_r};$$

dies ist aber ein Widerspruch zu (6₁). Nur wenn $\zeta_1 = 0$ ist und alle a_r positiv und reell sind, findet überall Gleichheit statt. Ist aber $\zeta_1 \neq 0$, so gilt in (11) sicher für genügend große r Ungleichheit (wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_r r_r$). Dies gibt den Satz:

Satz γ_1 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$; gelten dann die Ungleichungen:

$$r_r^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \vartheta_r)^{\frac{1}{2}} + r_{r+1}^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} |\xi|}{\xi^2 + \eta^2} \quad (r \geq 2), \quad (11_1)$$

so ist $A(x) \neq 0$.

Ebenso gewinnt man den analogen Satz:

Satz γ_2 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\eta \neq 0$; gelten dann die Ungleichungen:

$$r_r^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \vartheta_r)^{\frac{1}{2}} + r_{r+1}^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}} |\eta|}{\xi^2 + \eta^2} \quad (r \geq 2), \quad (11_2)$$

so ist $A(x) \neq 0$.

§ 4.

Verallgemeinerung des von Koch-Pringsheimschen Satzes.

Sei $\sum_r |a_r|$ konvergent; betrachten wir dann den Kettenbruch

$$\frac{a_1 z^2}{1} + \frac{a_2 z^2}{1} + \frac{a_3 z^2}{1} + \dots = \left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1, \quad (12)$$

so ist offenbar

$$\frac{1}{a_1 z^2} \left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1 = \begin{vmatrix} 1 & z & 0 & \dots & 1 & z & 0 & \dots \\ -a_3 z & 1 & z & \dots & -a_2 z & 1 & z & \dots \\ 0 & -a_4 z & 1 & \dots & 0 & -a_3 z & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

und der Nenner ist die eben betrachtete Funktion $A(z)$. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze ergeben also unmittelbar Konvergenzkriterien für den Kettenbruch (12). Aus Satz α_1 folgt das Konvergenzkriterium:

Satz A_1 . Sei $z = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$, $a_r = r_r e^{i\vartheta_r}$, $\sum_r r_r$ konvergent; ist dann

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^\infty r_r (1 - \cos \vartheta_r), \quad (7_1)$$

so konvergiert der Kettenbruch (12).

Ebenso folgt aus α_2 das Konvergenzkriterium:

Satz A_2 . Sei $\eta \neq 0$, $\sum_r r_r$ konvergent; ist dann

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^{\infty} r_r (1 + \cos \vartheta_r), \quad (7_2)$$

so konvergiert der Kettenbruch (12).

Man sieht ohne weiteres, daß bei den gegebenen Bedingungen nicht bloß der Kettenbruch (12), sondern auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_n^{\infty}$ für jedes positive ganze n konvergiert; also ist die Konvergenz eine unbedingte.

Setze ich für z spezielle Werte ein, so erhalte ich aus diesen Sätzen spezielle Konvergenzkriterien.

Für $z = 1$ folgt aus Satz A_1 der Satz:

Der Kettenbruch

$$\left[\frac{a_r}{1} \right]_1^{\infty} = \left[\frac{r_r e^{i\vartheta_r}}{1} \right]_1^{\infty} \quad (13)$$

konvergiert unbedingt, wenn $\sum_r r_r$ konvergiert und die Ungleichung erfüllt ist:

$$\sum_2^{\infty} r_r (1 - \cos \vartheta_r) < 2.$$

Dasselbe Resultat erhalte ich aus Satz A_2 für $z = i$.

In diesem Satze ist offenbar der von Herrn Pringsheim erweiterte von Kochsche Satz enthalten und dieses spezielle Konvergenzkriterium kann daher vermittelt unserer Methode leicht abgeleitet werden, da es im vorhergegangenen nicht benutzt wurde.

Im Laufe dieser Untersuchung wird sich eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes ergeben.

Seien jetzt alle a_r reell und positiv, also $\vartheta_r = 0$ ($r > 2$), ferner $z = e^{\frac{1}{2}i\psi}$ und $\psi \neq \pi$ (wegen $\xi \neq 0$), so folgt aus Satz A_1 das (übrigens nicht neue) Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch

$$\left[\frac{r_r e^{i\psi}}{1} \right]_1^{\infty}$$

konvergiert unbedingt, wenn $\sum_r r_r$ konvergiert, und $\psi \neq \pi$ ist. Die Teilzähler liegen jetzt auf einem beliebigen, vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahl, die reelle negative Halbachse ausgeschlossen. Daß der Satz für $\psi = \pi$ nicht gilt, ist klar, denn laut unserem in § 1 gegebenen Beispiel, gibt es dann zu jedem Wert von $\sum_r r_r$, der größer als 1 ist, divergente Kettenbrüche.

Dasselbe Resultat läßt sich auf ähnliche Weise aus Satz A_2 ableiten.

Wir leiten nun einen allgemeinen Satz ab, der alle Sätze enthalten wird, die man überhaupt durch Spezialisierung von z aus Satz A_1 bzw. A_2 gewinnen kann. Zu diesem Ende wollen wir folgende Frage beantworten: gegeben sei der Kettenbruch (2); welchen Bedingungen müssen die c_r genügen, damit eine Zerlegung

$$c_r = a_r z^2 \quad (r \geq 2) \quad (14)$$

möglich sei, für welche die in Satz A_1 geforderten Konvergenzbedingungen erfüllt sind? Sei

$$c_r = \gamma_r e^{i q_r}, \quad z = \zeta e^{\frac{1}{2} i \psi} \quad (\zeta \neq 0),$$

also, gemäß (14):

$$a_r = \gamma_r \zeta^{-2} e^{i(q_r - \psi)}.$$

Die Konvergenzbedingung lautet: $\cos \frac{\psi}{2} \neq 0$ und

$$\frac{2 \zeta^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}}{\zeta^4} > \sum_r \gamma_r \zeta^{-2} [1 - \cos(q_r - \psi)]. \quad (15)$$

Statt Ungleichung (15) kann ich auch setzen:

$$2 \cos^2 \frac{\psi}{2} > \sum_r \gamma_r [1 - \cos(q_r - \psi)]. \quad (15_1)$$

Die γ_r und q_r sind gegeben; die Frage ist: kann ich ψ so bestimmen, daß diese Relation erfüllt ist? Ich kann die letzte Ungleichung auch in folgender Form schreiben:

$$1 + \cos \varphi > \sum_2^{\infty} \gamma_r - \sum_2^{\infty} \gamma_r \cos \varphi_r \cos \varphi - \sum_2^{\infty} \gamma_r \sin \varphi_r \sin \varphi;$$

setzt man dann zur Abkürzung

$$\sum_2^{\infty} \gamma_r = s_1, \quad \sum_2^{\infty} \gamma_r \cos \varphi_r = s_2, \quad \sum_2^{\infty} \gamma_r \sin \varphi_r = s_3,$$

so erhält unsere Ungleichung die Form:

$$s_1 - (1 + s_2) \cos \varphi - s_3 \sin \varphi \leq 1 \quad (15')$$

oder kurz

$$F(\varphi) \leq 1.$$

s_1, s_2, s_3 sind von φ unabhängig; um zu entscheiden, ob es ein φ gibt, welches diese Relation erfüllt, bestimmen wir den kleinstmöglichen Wert, den $F(\varphi)$ annehmen kann. Dieser wird jedenfalls ein Minimum der Funktion $F(\varphi)$ sein, da diese eine periodische Funktion von φ ist.

Der gesuchte Wert von φ ist also durch die Gleichung bestimmt:

$$(1 + s_2) \sin \varphi = s_3 \cos \varphi;$$

woraus, wenn wir beiderseits quadrieren,

$$(1 + s_2)^2 \sin^2 \varphi = s_3^2 (1 - \sin^2 \varphi)$$

oder auch

$$\{(1 + s_2)^2 + s_3^2\} \sin^2 \varphi = s_3^2 \quad (16)$$

folgt.

Erster Fall: sei $(1 + s_2)^2 + s_3^2 = 0$, also $s_3 = 0$, $-s_2 = 1$; dann wird $F(\varphi) \equiv s_1$, φ kann beliebig gewählt werden, also ist die Konvergenzbedingung: $s_1 < 1$.

Zweiter Fall: sei $(1 + s_2)^2 + s_3^2 \neq 0$; jetzt resultiert aus (16):

$$\sin^2 \varphi = \frac{s_3^2}{(1 + s_2)^2 + s_3^2}$$

und demnach

$$\cos^2 \varphi = \frac{(1 + s_2)^2}{(1 + s_2)^2 + s_3^2};$$

$F(\varphi)$ nimmt offenbar seinen kleinstmöglichen Wert für

$$\sin \psi = \frac{s_3}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \psi = \frac{1+s_2}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

an und es wird

$$\begin{aligned} R_{\min.} &= s_1 - \frac{(1+s_2)^2}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{s_3^2}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= s_1 - \{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wir haben noch den Ausnahmefall zu untersuchen, in dem die Ungleichung (15₁) erfüllt ist, nicht aber die Bedingung $\cos \frac{\psi}{2} \neq 0$; dies tritt ein, wenn die Gleichungen $\varphi_r - \psi = 0$ für alle r und $\psi = \pi$ bestehen.

Für

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \pi$$

wird aber $s_3 = 0$, $s_2 = -s_1$ und die Ungleichung (15₁) reduziert sich auf

$$1 + \cos \psi > s_1(1 + \cos \psi),$$

woraus für $\psi \neq \pi$ das Konvergenzkriterium

$$s_1 < 1$$

folgt.

Wenn wir nun unsere Resultate zusammenfassen, erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 1. Der Kettenbruch

$$\left[\begin{matrix} c_r \\ 1 \end{matrix} \right]_1^{\infty} = \left[\frac{\gamma_r e^{i\varphi_r}}{1} \right]_1^{\infty} \quad (2)$$

konvergiert unbedingt, wenn die Ungleichung besteht:

$$s_1 - 1 < \{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}; \quad (17)$$

nur wenn alle c_r reell und negativ sind, ist an Stelle der Ungleichung (17) die folgende zu setzen:

$$s_1 < 1.$$

(In diesem Ausnahmefalle kann der Kettenbruch — wie wir zeigten — für irgend ein $s_1 > 1$ schon divergieren.)

Dabei ist leicht nachzuweisen, daß stets die folgende Relation besteht:

$$s_1^2 > s_2^2 + s_3^2,$$

und die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn alle c_r auf einem vom 0-Punkt ausgehenden Halbstrahl liegen. Es ist nämlich

$$\left(\sum_2^{\infty} \gamma_r \right)^2 \geq \left| \sum_2^{\infty} \gamma_r \cos \varphi_r + i \sum_2^{\infty} \gamma_r \sin \varphi_r \right|^2,$$

und hieraus folgt unmittelbar die Ungleichung:

$$\left(\sum_2^{\infty} \gamma_r \right)^2 \geq \left(\sum_2^{\infty} \gamma_r \cos \varphi_r \right)^2 + \left(\sum_2^{\infty} \gamma_r \sin \varphi_r \right)^2,$$

und man sieht auch, daß die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn alle φ_r untereinander gleich sind.

An Stelle der Ungleichung (17) kann man setzen

$$(s_1 - 1)^2 < (1 + s_2)^2 + s_3^2. \quad (18)$$

Ich zeige nämlich, daß die Ungleichungen (17) und (18) nur gleichzeitig bestehen können; ist $s_1 - 1 > 0$, so ist dies klar; ist $s_1 - 1 < 0$, so besteht a fortiori die Ungleichung (17), aber auch die Relation (18) ist noch gültig, da man sie ja in die Form setzen kann:

$$s_1^2 - 2s_1 < s_2^2 + 2s_2 + s_3^2 \quad (18')$$

oder auch

$$s_1^2 - s_2^2 - 2(s_1 + s_2) < s_3^2$$

oder schließlich

$$(s_1 + s_2)(s_1 - s_2 - 2) < s_3^2; \quad (19)$$

da nun offenbar $s_1 + s_2 \geq 0$ und $s_1 - s_2 \leq 2$ ist, so ist damit die Gültigkeit der obigen Ungleichungen erwiesen.

Von Satz A_2 kommt man mittelst derselben Methode zunächst zu der Konvergenzbedingung:

Der Kettenbruch (2) konvergiert unbedingt, wenn es ein $\varphi \neq 0$ gibt, für das die Ungleichung erfüllt ist:

$$2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} > \sum_2^{\infty} \gamma_r [1 + \cos(\varphi_r - \varphi)]. \quad (15_2)$$

Hieraus würde die günstigste Bestimmung von ψ wieder zu Satz 1 führen. Dies erklärt sich auch daraus, daß man Satz A_2 aus A_1 mit Hilfe der Substitution $z = it$ ableiten kann.

Aus Satz 1, wie auch aus den Ungleichungen (15₁) und (15₂) können Sätze einfacherer Form abgeleitet werden.

So folgt zunächst mit Rücksicht auf Ungleichung (17) der Satz:

Satz 1₁. Bezeichnet m die größere der Zahlen $|1 + s_2|$ und $|s_3|$, so ist der Kettenbruch (2) unbedingt konvergent, wenn die Ungleichung gilt:

$$s_1 < 1 + m.$$

Nur wenn alle c_r reell und negativ sind, lautet die Bedingung: $s_1 < 1$.

In diesem Satze ist das am Anfange dieses Paragraphen abgeleitete erste Kriterium enthalten.

Ist $s_2 > 0$, so ist sicherlich $m > 1$; in diesem Falle ist also die Bedingung

$$s_1 < 2$$

a fortiori für die Konvergenz hinreichend.

Ferner sollen jetzt die c_r in einem vom Nullpunkt ausgehenden Sektor liegen, dessen Zentriwinkel $\omega < \pi$ sei und $e^{i\psi}$ soll nicht außerhalb des Sektors liegen; dann ist

$$\cos(q_r - \psi) \geq \cos \omega \quad (r \geq 2),$$

also folgt aus der Ungleichung (15₁) der Satz:

Satz 1₂. Der Kettenbruch (2) konvergiert unbedingt, wenn die Bedingung besteht:

$$s_1 < \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \omega}.$$

Es ist vorteilhaft ψ so zu wählen, daß $\cos \psi$ möglichst groß sei, also $|\psi|$ möglichst klein zu nehmen.

In diesem Satze ist das am Anfange dieses Paragraphen gegebene zweite Konvergenzkriterium enthalten.

Sei jetzt 2ε der Zentriwinkel eines Sektors, in dem keines der c_r liegt; α sei der Winkel, den die Mittellinie des Sektors

mit der x -Achse bildet. Setzen wir $\varphi = \alpha - \pi$, so ist $\varphi_r - \varphi = \varphi_r - \alpha + \pi$, und in einem Sektor, dessen Zentriwinkel 2ε ist und der symmetrisch zur reellen negativen Halbachse liegt, befindet sich keines der $e^{i(\varphi_r - \varphi)}$; daher ist jetzt

$$\cos(\varphi_r - \varphi) > \cos(\pi - \varepsilon)$$

oder auch

$$1 - \cos(\varphi_r - \varphi) < 1 + \cos \varepsilon,$$

und aus der Ungleichung (15₁) folgt jetzt:

Satz 1₃. Der Kettenbruch (2) konvergiert unbedingt, wenn die Ungleichung gilt:

$$s_1 < \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \varepsilon}.$$

Aus Ungleichung (17) folgt leicht der Satz:

Satz 1₄. Seien alle c_r reell; konvergiert dann $\sum_r \gamma_r$ und ist die Summe der negativen Teilzähler ihrem absoluten Werte nach nicht größer als 1, so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Seien nun alle c_r rein imaginär; sei σ_1 die Summe der Teilzähler, die auf der oberen Halbachse liegen, absolut genommen; σ_2 sei die Summe der Teilzähler, die auf der unteren Halbachse liegen, absolut genommen. Dann ist

$$s_1 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \sigma_1 - \sigma_2,$$

und aus Ungleichung (19) wird jetzt die folgende:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2) \leq (\sigma_1 - \sigma_2)^2;$$

nach Ausführung der Multiplikation folgt hieraus:

$$2\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2, \quad (20)$$

wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 1₅. Sind alle c_r rein imaginär und ist die Bedingung (20) erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Die Bedingung (20) ist offenbar sicher erfüllt, wenn $\sigma_1\sigma_2 < 1$ ist.

Im folgenden Paragraphen gewinne ich nochmals den Satz 1 durch Spezialisierung eines allgemeineren Satzes.

Bemerkung. Ich möchte auf den besonderen Charakter des Satzes 1 hinweisen. Man kann ja den Begriff der absoluten Konvergenz einer unendlichen Reihe auch so formulieren: eine unendliche Reihe heißt absolut konvergent, wenn sie selbst und eine jede Reihe, die aus ihr durch Abänderung der Charakteristiken¹⁾ ihrer Glieder entsteht, konvergiert. Wir können nun diese Formulierung auf Kettenbrüche übertragen, indem wir sagen: der Kettenbruch (2) soll absolut konvergent heißen, wenn er selbst und jeder Kettenbruch, der aus (2) durch Abänderung der Charakteristiken der c_r entsteht, konvergiert. Der von Herrn Pringsheim erweiterte Helge von Kochsche Satz bezieht sich dann auf absolut konvergente Kettenbrüche, während die meinem Kriterium genügenden Kettenbrüche im allgemeinen nicht absolut konvergieren. Der von Herrn Pringsheim eingeführte Begriff der unbedingten Konvergenz eines Kettenbruches ist natürlich von diesem der absoluten Konvergenz durchaus verschieden.

§ 5.

Weitere Konvergenzkriterien.

Aus den Sätzen β_1 und β_2 (§ 3) folgen unmittelbar die Konvergenzkriterien:

Satz B_1 . Sei $\sum r_r$ konvergent, $z = \xi + i\eta$ und $\xi \neq 0$; gibt es dann solche δ_r , daß

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq r_{r+1} (1 - \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r > 1) \quad (10_1)$$

und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a) $\delta_1 \neq 0$,

b₁) in (10₁) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₁) Ungleichheit gilt,

¹⁾ Nach Herrn Pringsheim ist $\frac{a}{|a|}$ die Charakteristik von a .

c) es ist $\delta_r = 1$, $\delta_{r+1} = 1$, $\delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r : so konvergiert der Kettenbruch (12).

Satz B_2 . Sei $\sum r_r$ konvergent und $\eta \neq 0$; gibt es dann solche δ_r , daß

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq r_{r+1} (1 + \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r \geq 1) \quad (10_2)$$

und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a') $\delta_1 \neq 0$,

b₁) in (10₂) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₂) Ungleichheit gilt,

c') es ist $\delta_r = 1$, $\delta_{r+1} = 1$, $\delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r : so konvergiert der Kettenbruch (12).

Aus der Form der Bedingungen (10₁) und (10₂) ist ersichtlich, daß auch die Ungleichungen

$$0 < \delta_r < 1 \quad (r \geq 1)$$

bestehen müssen.

Ob der Kettenbruch (12) unter diesen Bedingungen auch immer unbedingt konvergiert, bleibt unentschieden. Ebenso bleibt die Frage offen, wie sich der Kettenbruch in dem Falle verhält, daß keine der Nebenbedingungen a bis c bzw. a' bis c' erfüllt ist. Ich bemerke nur, daß man leicht noch andere hinreichende Nebenbedingungen finden kann.

Für spezielle Werte von z erhalten wir aus den obigen Sätzen spezielle Konvergenzkriterien.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen bietet sich hier die Fragestellung: gegeben ist der Kettenbruch (2); gibt es dann eine Zerlegung (14), für welche die in Satz B_1 geforderten Bedingungen erfüllt sind? Diese Betrachtung führt sofort zu folgendem Konvergenzkriterium:

Satz 2₁. Gibt es ein $\psi \neq \pi$ und solche δ_r , daß die Ungleichungen bestehen:

$$(1 + \cos \psi)(1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq \gamma_{r+1} \{1 - \cos(\psi_{r+1} - \psi)\} \quad (r > 1) \quad (21_1)$$

und gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a) $\delta_1 \neq 0$,

b₁) in (21₁) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (21₁) Ungleichheit gilt,

c) es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r : so konvergiert der Kettenbruch (2).

Ebenso erhalten wir aus B_2 den

Satz 2₂. Gibt es ein $\psi \neq 0$ und solche δ_r , daß die Ungleichungen gelten:

$$(1 - \cos \psi)(1 - \delta_r) \delta_{r+1} > \gamma_{r+1} \{1 + \cos(\psi_{r+1} - \psi)\} \quad (r > 1) \quad (21_2)$$

und gleichzeitig mindestens eine der Bedingungen erfüllt ist:

a') $\delta_1 \neq 0$,

b₁) in (21₂) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r die Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (21₂) Ungleichheit gilt,

c') es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r : so konvergiert der Kettenbruch (2).

Hiebei ist $c_r = \gamma_r e^{i\psi_r}$. Freilich ist auch hier, wie überall, die Konvergenz von $\sum^r |c_r|$ vorausgesetzt.

Durch Einsetzen spezieller Werte für ψ erhält man wieder spezielle Konvergenzkriterien.

Wenn wir $1 - \frac{1}{p_r}$ an Stelle von δ_r einführen, so erinnern unsere beiden Sätze an einen Satz des Herrn Pringsheim¹⁾, es ist aber in unserem Falle für die p_r auch der Wert $+\infty$ zulässig. Zu beachten ist, daß der Satz des Herrn Pringsheim keineswegs in unseren Sätzen enthalten ist, da Herr

¹⁾ Diese Berichte, Bd. 35 (1905), p. 369.

Pringsheim über die Konvergenz der Reihe $\sum_r \gamma_r$ keine Voraussetzung macht.

Wir können die δ_r , ebenso wie es Herr Pringsheim für die p_r tut, spezialisieren, um einfachere Kriterien zu gewinnen. Wir führen dies für Satz 2₁ aus.

I. Setzt man

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_{2r} = \frac{1}{2} \quad (r \geq 1),$$

so wird aus den Ungleichungen (21₁):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) &> \gamma_2 \{1 - \cos (q_2 - \varphi)\} \\ \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \delta_{2r-1} &> \gamma_{2r-1} \{1 - \cos (q_{2r-1} - \varphi)\} \\ \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) (1 - \delta_{2r-1}) &> \gamma_{2r} \{1 - \cos (q_{2r} - \varphi)\} \end{aligned} \right\} \quad (r > 2),$$

oder

$$\begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos (q_2 - \varphi)\} &\leq \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \\ \gamma_{2r-1} \{1 - \cos (q_{2r-1} - \varphi)\} \\ + \gamma_{2r} \{1 - \cos (q_{2r} - \varphi)\} &\leq \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \quad (r > 2). \end{aligned}$$

Wir müssen uns noch überzeugen, ob mindestens eine der Nebenbedingungen erfüllt ist. Da $\sum_r \gamma_r$ konvergiert und $\varphi \neq \pi$ ist, so ist von einem genügend großen r an die Ungleichheit entweder für ein ungerades oder für das darauffolgende gerade r immer erfüllt; dann ist aber auch die Nebenbedingung b_2 erfüllt.

Es ist klar, daß bei diesen Bedingungen auch die Kettenbrüche

$$\left[\begin{array}{c} e_r \\ 1 \end{array} \right]_{2n+1}^r$$

sämtlich konvergieren, denn für diese braucht nur ein Teil der obigen Bedingungen erfüllt zu sein (nämlich für $r > 2n + 2$); ob aber der Kettenbruch (2) unbedingt konvergiert, bleibt hier unentschieden.

II. Setzt man

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_r = \frac{\delta}{1 + \delta} \quad (r \geq 2),$$

so nehmen die Bedingungen (21₁) die Form an:

$$\gamma_2 \{1 - \cos(q_2 - \psi)\} \leq \frac{\delta}{1 + \delta} (1 + \cos \psi)$$

$$\gamma_r \{1 - \cos(q_r - \psi)\} \leq \frac{\delta}{(1 + \delta)^2} (1 + \cos \psi) \quad (r \geq 3);$$

die Bedingung b_2 ist wiederum für genügend große r erfüllt; die Konvergenz ist jetzt offenbar eine unbedingte.

Für $\delta = 1$ ergeben sich hieraus die Konvergenzbedingungen:

$$\gamma_2 \{1 - \cos(q_2 - \psi)\} \leq \frac{1}{2} (1 + \cos \psi)$$

$$\gamma_r \{1 - \cos(q_r - \psi)\} \leq \frac{1}{4} (1 + \cos \psi) \quad (r \geq 3).$$

III. Setzt man

$$\delta_r = \frac{r-1}{2r-1} \quad (r \geq 1),$$

so liefern die Bedingungen (21₁) die Ungleichungen:

$$\gamma_{r+1} \{1 - \cos(q_{r+1} - \psi)\} < \frac{r^2}{4r^2 - 1} (1 + \cos \psi) \quad (r \geq 1),$$

und die Bedingung b_1 ist für genügend große r auch erfüllt. Der Kettenbruch (2) ist unbedingt konvergent.

IV. Setzt man

$$\delta_{2r-1} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r}, \quad \delta_{2r} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \quad (r > 1),$$

so ergeben sich aus (21₁) die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{2r} \{1 - \cos(q_{2r} - \psi)\} &\leq \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(q_{2r+1} - \psi)\} &\leq \frac{1 + \cos \psi}{\varepsilon_r (\varepsilon_{r+1} + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (r \geq 1);$$

die Bedingung b_2 ist offenbar erfüllt, ebenso wie im Falle I.

Für $\varepsilon_r = +\infty$ gelangen wir — wie sich leicht zeigen läßt — zu dem Fall, wo

$$\sum_1^n (1 - \delta_r) \delta_{r+1}$$

möglichst groß wird; die Bedingungen lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} &< 1 + \cos \psi \\ \varphi_{2r+1} &= \psi \end{aligned} \right\} \quad (r > 1).$$

Setzt man umgekehrt

$$\delta_{2r-1} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_r}, \quad \delta_{2r} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r},$$

so folgen aus (21₁) die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} &\leq \frac{1 + \cos \psi}{\varepsilon_r(\varepsilon_r + 1)} \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} &< \frac{\varepsilon_{r+1} - 1}{\varepsilon_r + 1} (1 + \cos \psi). \end{aligned}$$

V. Setzt man

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_{2r+1} = \frac{1}{2} \quad (r \geq 1),$$

so erhält man aus (21₁) die folgenden Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos(\varphi_2 - \psi)\} &< \delta_2 (1 + \cos \psi) \\ \gamma_3 \{1 - \cos(\varphi_3 - \psi)\} &\leq \frac{1}{2} (1 - \delta_2) (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} &< \frac{1}{2} \delta_{2r} (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} &\leq \frac{1}{2} (1 - \delta_{2r}) (1 + \cos \psi) \end{aligned} \right\} \quad (r \geq 2),$$

oder auch

$$\begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos(\varphi_2 - \psi)\} + 2 \gamma_3 \{1 - \cos(\varphi_3 - \psi)\} &< 1 + \cos \psi \\ \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} &+ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} \leq \frac{1}{2} (1 + \cos \psi) \quad (r > 2). \end{aligned}$$

Die Bedingung b_2 ist auch erfüllt.

In diesem und im vorhergegangenen Falle bleibt die Frage nach der unbedingten Konvergenz unerledigt.

VI. Es möge jetzt unter $\delta_r (r > 1)$ eine Folge mit r nicht-abnehmender Zahlen verstanden werden, wobei außerdem $\delta_1 = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = 1$. Ist

$$(\delta_{r+1} - \delta_r)(1 + \cos \psi) \geq \gamma_{r+1} \{1 - \cos(\varphi_{r+1} - \psi)\} \quad (r \geq 1), \quad (22)$$

so ist die Bedingung (21₁) a fortiori erfüllt, und es gilt auch die Nebenbedingung b_1 , außer im Falle, daß

$$\delta_r = 0 \quad \text{für } r \leq k, \quad \delta_r = 1 \quad \text{für } r > k;$$

dann ist aber die Bedingung c erfüllt.

Nun läßt sich aber jede konvergente Reihe mit der Summe $\sum_1^\infty u_r = 1$ und $u_r \geq 0$ in die Form setzen¹⁾:

$$\sum_1^\infty (\delta_{r+1} - \delta_r) = \lim_{r=\infty} \delta_r = 1;$$

man hat nur

$$\delta_n = \sum_1^{n-1} u_r$$

zu setzen; da sodann

$$\delta_{n+1} = \sum_1^n u_r,$$

so folgt wie behauptet:

$$u_n = \delta_{n+1} - \delta_n.$$

Daher besagt die Bedingung (22) nichts anderes als daß

$$1 \geq \frac{1}{1 + \cos \varphi'} \sum_1^\infty \gamma_{r+1} \{1 - \cos (\varphi_{r+1} - \varphi')\}.$$

Dies ist aber die Bedingung (15₁), aus welcher Satz 1 folgt; also erhalten wir einen neuen Beweis dieses Satzes.

Wir können diesen Satz noch erweitern, wenn wir in (22) statt $\delta_{r+1} - \delta_r$ die höhere Schranke einführen:

$$\delta_{r+1} - \delta_r + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_{r+1}} - 1 \right);$$

auch in den Pringsheimschen Untersuchungen²⁾ können wir statt $\frac{p_{r+1} - p_r}{p_r p_{r+1}}$ die etwas höhere Schranke einführen:

$$\frac{p_{r+1} - p_r}{p_r p_{r+1}} + \frac{p_r - 1}{p_r (p_{r+1} - 1)}.$$

¹⁾ Vgl. Pringsheim, diese Berichte, Bd. 35 (1905), p. 374.

²⁾ Vgl. diese Berichte, Bd. 35, p. 373.

VII. Setzt man

$$\delta_r = 1 - \gamma_{r+1} \quad (r \geq 1),$$

so muß vor allem

$$\gamma_{r+1} < 1 \quad (r \geq 1)$$

sein; aus (21₁) resultiert jetzt die Bedingung:

$$(1 + \cos \psi)(1 - \gamma_{r+1}) > 1 - \cos(\varphi_r - \psi) \quad (r \geq 2),$$

oder auch

$$(1 + \cos \psi) \gamma_{r+1} < \cos \psi + \cos(\varphi_r - \psi) \quad (r \geq 2),$$

und die Bedingung b_2 ist auch erfüllt, wenn nicht alle c_r reell und negativ sind.

Die Grundlage der Sätze 2₁ und 2₂ bildete der Umstand, daß der Ausdruck

$$(1 - \delta_r) x_r^2 - 2 d_r x_r x_{r+1} + \delta_{r+1} x_{r+1}^2$$

semidefinit ist, wenn

$$d_r^2 < (1 - \delta_r) \delta_{r+1}.$$

Der nächste Schritt zur Verallgemeinerung dieser Methode wäre, zu bestimmen, unter welchen Bedingungen für d_r und d_{r+1} der Ausdruck

$$(1 - \delta_r) x_r^2 - 2 d_r x_r x_{r+1} + x_{r+1}^2 - 2 d_{r+1} x_{r+1} x_{r+2} + \delta_{r+1} x_{r+1}^2$$

semidefinit wird; usw. für mehr- und mehrgliedrige Ausdrücke. Die so resultierenden neuen Konvergenzkriterien werden immer komplizierter und können wahrscheinlich auch aus den Sätzen 2₁ und 2₂ durch entsprechende Spezialisierung der δ_r abgeleitet werden. Dazu müßte freilich die erwähnte Umkehrung des Hilfssatzes II bewiesen sein.

§ 6.

Die aus den Sätzen γ_1 und γ_2 folgenden Konvergenzkriterien.

Aus den Sätzen γ_1 und γ_2 (§ 3) erhalten wir unmittelbar die Konvergenzkriterien:

Satz I_1 . Sei $z = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$, $\sum_r r_r$ konvergent; gelten außerdem die Ungleichungen:

$$r_r^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \vartheta_r)^{\frac{1}{2}} + r_{r+1}^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}}|\xi|}{\xi^2 + \eta^2} \quad (r \geq 2), \quad (11_1)$$

so ist der Kettenbruch (12) konvergent.

Satz I_2 . Ist $\eta \neq 0$ und gelten die Ungleichungen

$$r_r^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \vartheta_r)^{\frac{1}{2}} + r_{r+1}^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} < \frac{2^{\frac{1}{2}}|\eta|}{\xi^2 + \eta^2} \quad (r \geq 2), \quad (11_2)$$

so konvergiert der Kettenbruch (12).

Die Konvergenz ist offenbar eine unbedingte, da die Kettenbrüche

$$\left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_n^{\infty} \quad (n \geq 1)$$

sämtlich infolge der obigen Bedingungen konvergieren.

Ähnlich wie früher ziehen wir die Umformung (14) heran. Die Bedingungen (11₁) nehmen dann die Form an:

$$\gamma_r^{\frac{1}{2}} \zeta^{-1} \{1 - \cos(q_r - \varphi)\}^{\frac{1}{2}} + \gamma_{r+1}^{\frac{1}{2}} \zeta^{-1} \{1 - \cos(q_{r+1} - \varphi)\}^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta}{\zeta^2} \left(\frac{1 + \cos \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (r \geq 2),$$

und wir gewinnen so die folgenden Sätze:

Satz 3₁. Wenn es ein $\varphi \neq \pi$ gibt, für das die Ungleichungen bestehen:

$$\gamma_r^{\frac{1}{2}} \{1 - \cos(q_r - \varphi)\}^{\frac{1}{2}} + \gamma_{r+1}^{\frac{1}{2}} \{1 - \cos(q_{r+1} - \varphi)\}^{\frac{1}{2}} < (1 + \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (r \geq 2), \quad (23_1)$$

so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Satz 3₂. Wenn es ein $\psi \neq 0$ gibt, für das die Bedingungen erfüllt sind:

$$\gamma_r^{\frac{1}{2}} \{1 + \cos (q_r - \psi)\}^{\frac{1}{2}} + \gamma_{r+1}^{\frac{1}{2}} \{1 + \cos (q_{r+1} - \psi)\}^{\frac{1}{2}} \leq (1 - \cos \psi)^{\frac{1}{2}} \quad (r \geq 2), \quad (23_2)$$

so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Natürlich ist die Konvergenz der Reihe $\sum^r \gamma_r$ auch vorausgesetzt.

Durch Spezialisierung erhalten wir wieder einfachere Kriterien.

Hat ω dieselbe Bedeutung wie in Satz 1₂, so folgt aus Satz 3₁ die hinreichende Konvergenzbedingung:

$$(\gamma_r^{\frac{1}{2}} + \gamma_{r+1}^{\frac{1}{2}})^2 \leq \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \omega};$$

ist $\gamma > \gamma_r$ für alle r , so ist auch die folgende Bedingung hinreichend:

$$4\gamma < \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \omega}.$$

Analog zu Satz 1₃ ergibt sich die Konvergenzbedingung:

$$4\gamma < \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \varepsilon}.$$

Setzen wir in Satz 3₁ $\psi = 0$ und ist

$$g \geq \gamma_r (1 - \cos q_r) \quad (r \geq 2),$$

so erhalten wir die hinreichende Konvergenzbedingung:

$$2g \leq 1.$$

§ 7.

Über gewisse Kettenbrüche, die von einer komplexen Veränderlichen abhängen.

Wir betrachten wiederum den Kettenbruch

$$K(z) = \left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1^{\infty} \quad (12)$$

unter der Voraussetzung, daß $\sum_r |a_r|$ konvergiert; es konvergieren dann sowohl die Näherungszähler wie auch die Näherungsnenner für sich gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche der z -Ebene gegen zwei ganze transzendente Funktionen, die wir in Form gleichmäßig und absolut konvergenter unendlicher Determinanten anschreiben können¹⁾; wir setzen daher:

$$K(z) = \frac{D(z)}{A(z)}.$$

Der Nenner ist die in § 3 betrachtete Determinante. In einem Bereiche, in dem $A(z)$ nicht verschwindet (und somit auch $|A(z)|$ eine von Null verschiedene untere Schranke hat), konvergiert demnach der Kettenbruch $K(z)$ gleichmäßig. Solche Bereiche wurden in den Sätzen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \gamma_2$ hergestellt, woraus unmittelbar die Konvergenzsätze $A_1, A_2, \dots, I'_2$ folgten. Diese Sätze kann man jetzt verallgemeinern, indem man die Sätze 1 bis 3_2 auf den Kettenbruch $K(z)$ anwendet. Wir erreichen damit auch eine Verallgemeinerung der Sätze α_1 bis γ_2 .

Die Nullstellen von $A(z)$ und nur diese sind Stellen außerwesentlicher Divergenz für den Kettenbruch (12), sie sind die Pole der Funktion $K(z)$.

Wir wenden zunächst Satz 1 auf den Kettenbruch (12) an. Sei

$$z = x + iy = \rho e^{i\omega};$$

wir setzen zur Abkürzung:

$$\sum_2^{\infty} a_r = \sigma_1, \quad \sum_2^{\infty} R(a_r) = \sigma_2, \quad \sum_2^{\infty} J(a_r) = \sigma_3,$$

¹⁾ Vgl. Helge von Koch, l. c. (Fußnote 1, p. 331).

wobei $R(a_r)$ den reellen Teil, $J(a_r)$ den von der imaginären Einheit befreiten imaginären Teil von a_r bezeichnet. Aus Ungleichung (18') erhalten wir nun nach Auswertung der Quadrate und Zusammenziehen entsprechender Glieder für den Kettenbruch (12) den Konvergenzbereich:

$$(x^2 + y^2)^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) < 2 \{x^2 (\sigma_1 + \sigma_2) - 2xy\sigma_3 + y^2 (\sigma_1 - \sigma_2)\}. \quad (24)$$

Ist $s_3 = 0$, so ist die Begrenzung dieses Bereiches eine „Boothsche elliptische Lemniskate“¹⁾. Im allgemeinen können wir uns leichter über den Bereich (24) orientieren, wenn wir zu Polarkoordinaten übergehen. Aus Ungleichung (24) wird dann nach einer leichten Umformung:

$$\varrho^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) \leq 2 (\sigma_2 \cos 2\omega - \sigma_3 \sin 2\omega + \sigma_1).$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich sofort, daß ϱ^2 seinen kleinsten Wert für

$$\cos 2\omega = -\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin 2\omega = \frac{\sigma_3}{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

annimmt, und zwar ist

$$\varrho_{\min.}^2 = \frac{2}{\sigma_1 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}};$$

ebenso erhält man

$$\varrho_{\max.}^2 = \frac{2}{\sigma_1 - (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist (vgl. p. 345):

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 \geq 0. \quad (25)$$

Der um den Nullpunkt mit dem Radius

$$\left(\frac{2}{\sigma_1 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

gezogene Kreis liegt also im Innern des Bereiches (24) und a fortiori der konzentrische Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\sigma_1^{\frac{1}{2}}}$.

¹⁾ Über diese Kurven vgl. z. B. Heinrich Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, § 3. (Sammlung Schubert, Bd. 56.)

Soll in (25) Gleichheit gelten, so müssen alle a_r auf einem Halbstrahl liegen; der Konvergenzbereich erstreckt sich dann über die ganze Ebene mit Ausnahme derjenigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden, auf welcher $a_r z^2$ reell und negativ wird; jedoch findet auch auf dieser Geraden für die Punkte

$$(x^2 + y^2) \sigma_1 < 1$$

sicherlich Konvergenz statt. Dieser Extremfall ist schon in einem viel allgemeineren Stieltjesschen Satze enthalten¹⁾.

In dem Bereiche (24) sind natürlich die Bereiche (7₁) und (7₂) (vgl. die Sätze A_1 und A_2) auch enthalten.

Wenden wir nun auf den Kettenbruch (12) den Satz 2₁ an, so ergeben sich aus den Ungleichungen (21₁) jetzt die folgenden:

$$q^2 r_{r+1} \{1 - \cos(\vartheta_{r+1} + 2\omega - \psi)\} < (1 + \cos \psi)(1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1),$$

oder

$$q^2 \sin^2 \left(\frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} + \omega \right) < \frac{1 + \cos \psi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1), \quad (26)$$

und dies kann man auch so schreiben:

$$\begin{aligned} q^2 \left(\sin \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} \cos \omega + \cos \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} \sin \omega \right)^2 \\ < \frac{1 + \cos \psi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1); \end{aligned}$$

schließlich in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\left(x \sin \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} + y \cos \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} \right)^2 < \frac{1 + \cos \psi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1).$$

Für ein einzelnes r gibt diese Ungleichung einen durch zwei parallele Geraden begrenzten Ebenenstreifen. Diese Streifen ändern im allgemeinen mit r ihre Breite und ihre Richtung. Bezeichnen wir mit B den gemeinsamen Bereich aller dieser

¹⁾ T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. Annales de la Fac. des sc. de Toulouse pour les sc. math., t. 8, J, p. 1—122 (1894); t. 9, A, p. 1—47 (1895).

Streifen, so ist B ein Konvergenzbereich für den Kettenbruch (12). Im Innern dieses Bereiches ist der Kettenbruch sicher konvergent, denn es gelten in (26) die Ungleichheiten; damit er in einem Punkte der Begrenzung von B konvergiert, muß für diesen Punkt auch eine den Bedingungen a bis c hier entsprechende Nebenbedingung erfüllt sein.

Der Bereich B hängt von φ und den δ_r ab, wobei φ nur von π verschieden, sonst aber beliebig sein kann, und die δ_r beliebig (natürlich nicht außerhalb des Intervalles 0 bis 1) gewählt werden können.

Aus (26) ist ersichtlich, daß für die Begrenzung des r^{ten} Streifens

$$\varrho^2 > \frac{1 + \cos \varphi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1}$$

ist. Bezeichnet also τ^2 eine untere Schranke der Zahlen

$$\frac{1 + \cos \varphi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r = 1, 2, 3, \dots),$$

so ist der um den Nullpunkt mit dem Radius τ gezogene Kreis in dem Konvergenzbereiche B enthalten.

Auf analoge Weise kann man die Sätze 2_2 bis 3_2 auf den Kettenbruch (12) anwenden.

Eine Erweiterung dieser Untersuchungen auf Kettenbrüche, bei denen $\sum r_r$ nicht konvergieren muß, möchte ich in einer anderen Arbeit geben.

Berichtigung.

Auf Seite 331 ist in der ersten Gleichung von § 3 links e^r durch e_r zu ersetzen.

Auf Seite 334 ist in der dritten Gleichung von unten der Faktor $e^{-i\beta r+1}$ durch $e^{i\beta r+1}$ zu ersetzen.