

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1912. Heft II

Mai- bis Julisitzung

---

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Im Laufe meiner Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie bin ich zu der Überzeugung gelangt, daß sowohl in der hyperbolischen wie auch in der elliptisch-sphärischen Geometrie als prinzipiell einfache und zugleich für die verschiedensten Aufgaben verwendbare Grundlage eine gewisse, für beide Geometrien scheinbar völlig verschiedene Zuordnung von rechtwinkligen Dreiecken gewählt werden kann.

Diese Zuordnung wird in der elliptisch-sphärischen Geometrie aus dem „Pentagramma mirificum“ von Gauß abgeleitet<sup>1)</sup>, in der hyperbolischen auf einem ganz anderen Weg<sup>2)</sup>. Beidesmal besteht ihre Tragweite darin, daß mit ihrer Hilfe gewisse Konstruktionsaufgaben sich lösen lassen, z. B. die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln<sup>3)</sup>, daß sie zur Ableitung der Metrik (Trigonometrie) verwendet werden können<sup>4)</sup> und endlich, daß mit ihrer Hilfe auf der einen Seite die Eigenschaften der hyperbolischen (Lobatschefskijschen), auf der anderen die der elliptischen (Cliffordschen) Parallelen ohne

<sup>1)</sup> Gauß' Werke III, S. 481.

<sup>2)</sup> Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1912 (i. F. zitiert mit N. E. G.), S. 37—41.

<sup>3)</sup> N. E. G., S. 42 und S. 156.

<sup>4)</sup> N. E. G., S. 73 und S. 163.

jede trigonometrische oder analytisch-geometrische Entwicklung erkannt werden können<sup>1)</sup>).

Ich möchte nunmehr zeigen, daß diese Zuordnungen in beiden Geometrien im engsten Zusammenhang stehen (§ 1), außerdem aber, daß der grundlegende Satz von Study in seiner Theorie der Abbildung der orientierten Geraden (Speere) des elliptischen Raumes auf die Punktepaare einer Kugel ebenfalls hier eingeordnet werden kann; auch dieser Satz, auf den wir später zurückkommen, ergibt sich durch eine einfache Konstruktion, die durch das Pentagramma mirificum nahegelegt wird (§ 2).

### § 1.

#### Das Pentagramma mirificum und die Zuordnung rechtwinkliger Dreiecke.

Wir gehen, an eine elementare Konstruktion anknüpfend, von der elliptisch-sphärischen Geometrie aus und werden sodann, indem wir die Klein-Cayleysche Maßbestimmung einführen, leicht den Übergang finden zur hyperbolischen Geometrie, wobei es wohl nicht überflüssig ist, für diesen zweiten Fall nochmals auf alle Einzelheiten der Zuordnung einzugehen.

##### 1. Das Pentagramma mirificum.

Wir betrachten auf der Kugel vom Radius Eins ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  mit den Katheten  $BC = a$ ,  $CA = b$  der Hypotenuse  $c$  und den Winkeln

$$\sphericalangle CBA = \mu, \quad \sphericalangle BAC = \lambda.$$

Der Kürze halber bezeichnen wir allgemein mit  $s'$  die zu  $s$  komplementäre Strecke und mit  $\varphi'$  den Komplementwinkel von  $\varphi$ . Verlängert man jetzt  $BA$  um  $e'$  bis  $D$  und  $BC$  um  $a'$  bis  $E$ , so ist im Viereck  $ACED$ :

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACE = \sphericalangle CED = \sphericalangle EDA = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle DAC = \pi - \lambda \\ AC = b, \quad CE = a', \quad ED = \mu, \quad DA = e'. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> N. E. G., S. 40 und S. 164–166.

Dieses Viereck mit drei rechten Winkeln (dreirechtwinkliges Viereck) nennen wir dem rechtwinkligen Dreieck zugeordnet.

Verlängert man jetzt  $CA$  und  $ED$  bis zum Schnittpunkt  $F$ , so entsteht ein zweites, dem ersten zugeordnetes rechtwinkeliges Dreieck mit den Bestimmungsstücken

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sphericalangle FAD = \lambda, & \mu_1 &= \sphericalangle AFD = a' \\ a_1 &= FD = \mu', & b_1 &= AD = c', & c_1 &= AF = b'. \end{aligned}$$

Setzt man diese Konstruktion fort, so ergibt sich eine geschlossene Kette von fünf rechtwinkligen Dreiecken, die ein „Pentagramm“ bilden, d. h. die Figur der Diagonalen eines Fünfecks<sup>1)</sup>. Sie veranschaulicht sämtliche aus dem einen Dreieck ableitbaren Dreiecke und dreirechtwinkligen Vierecke.

Wie schon bemerkt worden ist, kann hier auf die Theorie der Cliffordschen Parallelen begründet werden (N. E. G. §30, 1), aus der wir hier nur die für den folgenden Paragraphen notwendigen Sätze anführen wollen, die a. a. O. bewiesen sind:

Man erhält im elliptischen Raum die beiden Cliffordschen Parallelen zu  $g$  durch  $P$ , indem man von  $P$  das Lot  $PF$  auf  $g$  fällt und durch  $P$  die Ebene  $E'$  senkrecht zu  $PF$  legt und mit der Ebene  $E$  (Ebene durch  $P$  und  $g$ ) zum Schnitt bringt ( $g_1$ ). Die beiden Geraden durch  $P$  in  $E'$ , welche mit  $g_1$  den Winkel  $l$  einschließen, der der Strecke  $PF$  gleich ist, sind die gesuchten Parallelen.

Orientiert man mit Study  $g$  in bestimmtem Sinn, so wird man die beiden Parallelen, jenachdem sie durch Linksschraubung oder Rechtsschraubung längs der Achse  $FP$  aus  $g$  hervorgehen, als orientierte Links- und Rechts-Parallele zum Speer  $g$  bezeichnen.

Ferner führen wir noch den Satz an<sup>2)</sup>:

Sind zwei Speere einem und demselben dritten rechtsparell (linksparell), so sind sie zueinander rechtsparell (linksparell).

<sup>1)</sup> Gauß' Werke III, S. 481. — Hessenberg, Trigonometrie (Sammlung Götschen), S. 115.

<sup>2)</sup> N. E. G., S. 188. — Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen, Leipzig 1909, S. 13.



Es genügt aber eine einzige Hilfslinie, um wieder ein reelles Viereck zu erhalten: Wir verbinden  $B$  mit dem unendlich fernen Punkt  $S$  von  $BA$ , d. h. mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von  $BA$  mit dem Fundamentalkegelschnitt, und schneiden  $ES$  mit  $BF(Q)$  und  $CF(P)$ .

Dieses Viereck  $BCPQ$  nennen wir „dem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  zugeordnet“.

In Fig. 1 ist zum Fundamentalkegelschnitt ein Kreis gewählt und  $B$  als Mittelpunkt des Kreises angenommen, wodurch die Konstruktion sehr vereinfacht wird.

Man erkennt aus der Figur auch sofort, daß  $(QP)$  im hyperbolischen Maß gemessen gleich  $(AB)$  ist, denn das Doppelverhältnis  $(S_1 QPS)$  ist gleich dem Doppelverhältnis  $(S_2 BAS)$ ; und hieraus folgt die bekannte Konstruktion der hyperbolischen Parallelen  $BS$  zu  $QS'$ .

### 3. Berechnung aller Bestimmungsstücke der zugeordneten Figuren.

Ist die Gleichung des reellen Fundamentalkegelschnitts in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten gegeben durch

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

so wird die hyperbolische Entfernung

$$s = (P_1 P_2)$$

zweier Punkte  $P_1(x_1 y_1)$  und  $P_2(x_2 y_2)$  gegeben durch

$$1) \quad \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} s = \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}},$$

wobei  $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} s$  den hyperbolischen Cosinus bedeutet:

$$\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}.$$

Die Formel ergibt sich leicht aus der bekannten Definition des hyperbolischen Entfernungsmaßes  $(P_1 P_2)$  als halber Lo-

1) F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1906, S. 101.

garithmus des Doppelverhältnisses, das  $P_1$  und  $P_2$  mit den Punkten bilden, in denen ihre Verbindungslinie den Fundamentalkegelschnitt trifft.

Der (hyperbolische) Winkel ( $S$ ) zweier orientierten<sup>1)</sup> Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , die in cartesischen Koordinaten gegeben sind, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 &= 0 \\x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 &= 0\end{aligned}$$

ist dann bestimmt durch

$$\cos \varphi = \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - p_1 p_2}{\sqrt{1 - p_1^2} \sqrt{1 - p_2^2}}.$$

Diese Formel folgt aus der Definition des hyperbolischen Winkelmaßes als der durch  $2i$  dividierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die beiden orientierten Geraden mit den durch ihren Schnittpunkt an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten bilden.

Für den Koordinatenanfang fällt euklidische und hyperbolische Winkelbestimmung zusammen, ferner stehen zwei Gerade, von denen die eine durch den Koordinatenanfang geht und zur anderen im Sinne der euklidischen Maßbestimmung senkrecht steht, auch im Sinn der hyperbolischen Maßbestimmung aufeinander senkrecht. Man erkennt dies sofort, wenn man einmal  $p_1 - p_2 = 0$  setzt, und dann  $p_1 = 0$ ,  $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Wir nehmen jetzt zur  $x$ -Achse die Gerade  $BE$ , zur  $y$ -Achse die Gerade  $BD$ , ferner sei

$$BC = u, \quad CA = v,$$

dann bekommen wir für die cartesischen Koordinaten die Tabelle

<sup>1)</sup> W. Blaschke. Über einige unendliche Gruppen von orientierten Berührungstransformationen der Ebene. Math. Annalen 69 (1910), S. 205.

	$x$	$y$
$A$	$u$	$v$
$B$	$o$	$o$
$C$	$u$	$o$
$P$	$u$	$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$
$Q$	$o$	$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

Für die hyperbolischen Entfernungen

$$(BC) = a, \quad (CA) = b, \quad (BA) = c, \quad (QP) \text{ und } (BQ)$$

finden wir hiernach:

$$\mathfrak{C} o \int a = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \text{ also } u = \mathfrak{T} \text{ang } a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

$$\mathfrak{C} o \int b = \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \text{ also } v = \frac{\mathfrak{T} \text{ang } b}{\mathfrak{C} o \int a},$$

$$\mathfrak{C} o \int c = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \mathfrak{C} o \int a \mathfrak{C} o \int b;$$

die Grundformel für das rechtwinklige Dreieck.

Endlich folgt noch

$$\mathfrak{C} o \int (CP) = \frac{\sqrt{1-u^2} \sqrt{u^2+v^2}}{u \sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\mathfrak{C} o \int (BQ) = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} = \frac{1}{\cos \mu} = \frac{1}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \mu \right)}$$

und

$$\mathfrak{C} o \int (QP) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \mathfrak{C} o \int c.$$

Die letzte Formel zeigt wieder, daß  $(QP) = (BA)$  ist, wie schon oben (S. 277) gezeigt wurde, die vorletzte gibt die Beziehung zwischen einer Strecke  $(BQ)$  und dem zu ihr als



Lot gehörigen Parallelwinkel  $\frac{\pi}{2} - \mu$  an, d. h. dem Winkel  $\sphericalangle QBS$ , den die Parallele  $BS$  zu der auf  $BQ$  in  $Q$  errichteten Senkrechten  $QS$  mit  $BQ$  einschließt.

Bezeichnen wir eine Strecke und den zugehörigen Parallelwinkel immer durch die entsprechenden lateinischen und griechischen Buchstaben, ferner die zu einer Strecke  $a, b, m \dots$  komplementäre, d. h. diejenige, zu der als Parallelwinkel das Komplement von  $a, \beta, \mu \dots$  gehört, und  $a', b', m' \dots$ , so ist in unserer Figur

$$(BQ) = m'$$

und wir haben die allgemeine Beziehung zwischen Lot ( $a$ ) und Parallelwinkel ( $a$ ):

$$3) \quad \cos a = \frac{1}{\sin a'}.$$

Um jetzt noch die fehlenden Winkel

$$\lambda = \sphericalangle BAC \text{ und } \sphericalangle QPC$$

zu berechnen, brauchen wir die Gleichungen der drei orientierten Geraden  $BA, CP$  und  $QP$ ; die jedesmal angegebenen Punkte geben den Sinn der Orientierung an, und man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} x \sin \mu - y \cos \mu &= 0 \\ x - u &= 0 \\ -y + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Die Formel 2) ergibt dann

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle QPC &= \frac{v}{\sqrt{1 - u^2}}, \text{ also} \\ \sin \sphericalangle QPC &= \sqrt{\frac{1 - u^2 - v^2}{1 - u^2}} = \frac{1}{\cos \sphericalangle QPB}. \end{aligned}$$

d. h. nach 3)

$$\sphericalangle QPC = \beta.$$

Schließlich wird noch

$$\cos \lambda = \cos \sphericalangle BAC = \frac{\sin \mu}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1-u^2}},$$

also

$$\sin \lambda = \frac{u \sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\cos \sphericalangle (CP)},$$

d. h.  $(CP) = l.$

Damit sind alle Stücke des Dreiecks  $ABC$  und des Vierecks  $BCPQ$  wirklich berechnet.

#### 4. Zusammenstellung.

Durch Übertragung des Gerüsts, das zum Pentagramma mirificum führt, nämlich eines Polardreiecks des Fundamentalschnitts haben wir somit gefunden:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck der hyperbolischen Geometrie mit den Katheten  $a$ ,  $b$ , der Hypotenuse  $c$  und den Winkeln  $\lambda$  und  $\mu$  gehört ein Viereck mit drei rechten Winkeln, mit den Seiten

$$(BC) = a, (CP) = l, (PQ) = c, (CB) = m'$$

und dem spitzen Winkel

$$\sphericalangle CPQ = \beta.$$

(Die Beziehung zwischen  $l$  und  $\lambda$ ,  $b$  und  $\beta$ ,  $m'$  und  $m$  ist oben angegeben.)

Aus diesem Viereck ist dann ein zweites rechtwinkliges Dreieck abzuleiten usw., sodaß wir gewissermaßen ein hyperbolisches „Pentagramma mirificum“ erhalten, als Gegenstück zu dem von Gauß.

Es sei hier noch eine beiläufige Bemerkung gestattet: Wir haben mit den Formeln der Cayley-Kleinschen Maßbestimmung gerechnet und nur die eine Beziehung

$$(QP) = (BA)$$

ohne Rechnung gefunden, freilich doch mit metrischen Hilfsmitteln und durch spezielle Wahl der Lage.

Daneben müßte aber die Zuordnung von rechtwinkligem Dreieck und dreieckigem Viereck in diesem Zusammenhang ohne jede Rechnung verfolgt werden (wie N. E. G. S. 37—41). Die Hilfsmittel dazu liegen vor, denn die Gleichheit zweier Strecken  $(AB)$  und  $(A'B')$  ist ja auch ohne Formel definierbar:  $(AB)$  ist gleich  $(A'B')$ , wenn es eine hyperbolische Bewegung, d. h. eine projektive Transformation der Ebene gibt, bei der der Fundamentalk Kegelschnitt in sich übergeht und zugleich das Punktepaar  $A, B$  in  $A', B'$ . Ebenso ist  $\sphericalangle(g_1, g_2)$  gleich dem Winkel  $\sphericalangle(g'_1, g'_2)$ , wenn es eine hyperbolische Bewegung gibt, bei der  $g_1$  und  $g_2$  in  $g'_1$  und  $g'_2$  übergehen. Endlich ist die Beziehung zwischen komplementären Strecken auch durch Konstruktionen aus der Geometrie der Lage definierbar.

Es handelt sich darum, die hierbei zu verwendenden Sätze festzustellen, worauf aber an dieser Stelle wegen des so einfachen in der N. E. G. wiedergegebenen elementargeometrischen Beweises wohl verzichtet werden kann.

## § 2.

### Study's Abbildung der Speere des elliptischen Raumes.

In Nr. 1 des ersten Paragraphen haben wir die Bedeutung des Pentagramma mirificum und der damit verknüpften Zuordnung des rechtwinkligen Dreiecks zum Viereck mit drei rechten Winkeln für die elliptisch-sphärische Geometrie gezeigt, wir wollen diese Zuordnung jetzt noch weiter in der Liniengeometrie des elliptischen Raumes anwenden.

#### I. Der Study'sche Satz.

Study hat den folgenden Satz bewiesen, aus dem für die darin erwähnte Abbildung der Speere des elliptischen Raumes sich eine Reihe weiterer, zu inhaltreichen und eleganten geometrischen Untersuchungen führender Sätze ergeben<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> E. Study, Beiträge zur nichteuclidischen Liniengeometrie. Am. J. of Math. XXIX. 2 (1907). S. 130.

Bildet man die Speere ( $g$ ) des elliptischen Raumes in der Weise auf die Punktepaare  $R, L$  einer Kugel ab, daß man durch den Mittelpunkt  $O$  der Kugel die orientierte Rechtsparallele ( $r$ ) und Linksparallele ( $l$ ) zu  $g$  zieht und mit der Kugel zum Schnitt bringt ( $R, L$ ), so gelten für die sphärischen Abstände

$$(R_1 R_2) = \sphericalangle R_1 O R_2$$

$$\text{und } (L_1 L_2) = \sphericalangle L_1 O L_2$$

der Bilder zweier Speere  $g_1$  und  $g_2$  die Beziehungen

$$(R_1 R_2) = \psi - \varphi$$

$$(L_1 L_2) = \psi + \varphi.$$

Dabei ist  $\varphi$  das eine gemeinsame Lot der beiden Speere,  $\psi$  der Winkel  $g_1 g_2$ .

Zur Erläuterung fügen wir hinzu, daß zwei Speere, wenn sie nicht parallel sind (also lauter gemeinsame Lote haben), zwei gemeinsame Lote besitzen: Ist  $F'_1 F'_2 = \varphi$  das eine gemeinsame Lot,  $\psi$  der Winkel, durch den man  $g_1$  um  $F'_1 F'_2$  als Achse drehen muß, damit es mit  $g_2$  in einer Ebene liegt, so sind die Fußpunkte  $F''_1 F''_2$  des zweiten gemeinsamen Lots dadurch bestimmt, daß

$$F'_1 F''_1 = F'_2 F''_2 = \frac{\pi}{2}$$

ist. Ferner ist dann  $F''_1 F''_2 = \psi$  und der Winkel der Drehung bzw. Schraubung um die Achse  $F''_1 F''_2$ , welche  $g_1$  in  $g_2$  überführt, ist gleich  $\varphi$ <sup>1)</sup>.

## 2. Beweis des Studyschen Satzes.

Nach dem Satz in § 1, 1 sind zwei einem dritten rechts- oder linksparallele Speere zueinander rechts- oder linksparallel. Demnach ist der Bildpunkt  $L$  für alle zueinander linksparallelen Speere derselbe.

<sup>1)</sup> N. E. G., S. 187. — W. Vogt, a. a. O., S. 5.

Hiervon wollen wir bei der Studyschen Abbildung Gebrauch machen. Wir fällen zunächst vom Mittelpunkt  $O$  der Bildkugel das Lot  $OF$  auf das gemeinsame Lot  $F_1F_2$  der beiden Speere  $g_1$  und  $g_2$ , die abgebildet werden sollen, und führen die Bezeichnungen ein:

$$OF = u, \quad FF_1 = \varphi_1, \quad FF_2 = \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi.$$

Sodann legen wir durch  $F$  die zu  $g_1$  und  $g_2$  linksparallelen Speere  $h_1$  und  $h_2$ ; sie stehen auf dem Lot  $F_1F_2$  in  $F$  senkrecht und schließen mit der Verlängerung von  $OF$  die Winkel ein

$$\psi_1 + \varphi_1 \quad \text{und} \quad \psi_2 + \varphi_2,$$

wobei  $\psi_1$  und  $\psi_2$  die Winkel der Speere  $g_1$  und  $g_2$  mit ihren senkrechten Projektionen auf die Ebene  $OFF_1F_2$  sind, und

$$\psi_1 - \psi_2 = \varphi$$

der Winkel von  $g_1$  und  $g_2$  ist.

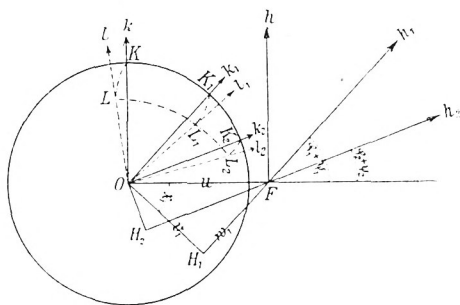


Fig. 2.

Wir betrachten jetzt zuerst den Speer  $h_1$  und führen als Hilfslinie den Speer  $h$  ein (s. Fig. 2), der von  $F$  ausgeht und mit  $OF$  und  $h$  die Winkel  $\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1$  einschließt, er liegt mit  $OF$ ,  $h_1$  und  $h_2$  in einer Ebene. Es sei ferner  $OH_1 = v$ , das Lot von  $O$  auf  $h_1$ , außerdem seien  $k$  und  $k_1$  die zu  $OF$  und  $H_1O$  senkrechten, in der Ebene  $OFH_1$  gelegenen von  $O$

ausgehende Speere,  $K$  und  $K_1$  die Punkte, in denen sie die Bildkugel treffen,  $L$  und  $L_1$  die Schnittpunkte der orientierten Linksp parallelen durch  $O$  zu  $h$  und  $h_1$  (also auch  $h$  und  $g_1$ ) mit der Bildkugel.

Wir betrachten jetzt das sphärische Viereck  $KK_1LL_1$ , in dem nach der Definition der Linksp parallelen

$$\sphericalangle LKK_1 = \sphericalangle KK_1L_1 = \frac{\pi}{2}$$

ist, und die sphärischen Abstände  $(KL) = \sphericalangle KOL$  und  $K_1L_1 = \sphericalangle K_1OL_1$  die Werte haben<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} (KL) &= OF = u \\ (K_1L_1) &= OH_1 = v_1; \end{aligned}$$

außerdem ist

$$(KK_1) = \sphericalangle (k, k_1) = \sphericalangle FOH_1 = z_1.$$

Jetzt ist das Pentagramma mirificum anzuwenden. Zu dem rechtwinkligen Dreieck  $OH_1F$  mit den Bestimmungsstücken

$$\begin{aligned} a &= H_1F = w_1, \quad b = OH_1 = v_1, \quad c = OF = u \\ \mu &= \sphericalangle OFH_1 = \varphi_1 + \varphi'_1, \quad \lambda = \sphericalangle H_1OF_1 = z_1 \end{aligned}$$

gibt es ein zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck mit den Stücken

$$\begin{aligned} a_1 = c' &= \frac{\pi}{2} - u, \quad b_1 = \mu' = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi'_1, \quad c_1 = b' = \frac{\pi}{2} - v_1 \\ \lambda_1 = a' &= \frac{\pi}{2} - w_1, \quad \mu_1 = \lambda = z_1 \end{aligned}$$

und, diesem zugeordnet, ein Viereck mit drei rechten Winkeln und den Seiten

$$u, z_1, v_1, \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi'_1,$$

von denen die beiden letzten den Winkel  $\frac{\pi}{2} + w_1$  einschließen.

<sup>1)</sup> Wir messen also den sphärischen Abstand zweier Punkte auf der Kugel durch den Winkel, den die vom Mittelpunkt nach den Punkten gezogenen Radien miteinander einschließen.

Dieses Viereck stimmt also mit  $LKK_1L_1$  überein in den drei Stücken

$$(LK) = u, \quad (KK_1) = z_1, \quad (K_1L_1) = v_1,$$

außerdem sind in beiden Vierecken die Winkel zwischen  $u$  und  $z_1$ ,  $z_1$  und  $v_1$  rechte, und hieraus folgt dann die Übereinstimmung in den noch übrigen Stücken, d. h. es ist

$$\sphericalangle LOL_1 = \sphericalangle (l, l_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1, \quad \sphericalangle KLL_1 = \frac{\pi}{2},$$

und endlich

$$\sphericalangle LL_1K_1 = \frac{\pi}{2} + w_1.$$

Man sieht, daß der Winkel  $LOL_1$  von  $u$  unabhängig ist, der Hauptkreis aber, auf dem  $L_1$  liegt, von  $\varphi_1$  und  $\psi_1$  unabhängig.

Bilden wir jetzt in derselben Weise  $h_2$  ab, so liegt der Bildpunkt  $L_2$  auf  $LL_1$ , und zwar ist

$$(LL_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2 - \psi_2,$$

daher ist:

$$\begin{aligned} 4) \quad (L_1L_2) &= \frac{\pi}{2} - \varphi_2 - \psi_2 - \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1 \right) \\ &= \varphi_1 - \varphi_2 + \psi_1 - \psi_2 = \varphi + \psi. \end{aligned}$$

Für die orientierten Rechtsparallelen und ihre Bilder  $R_1$  und  $R_2$  finden wir, wenn wir als Hilfslinien Rechtsparallelen zu  $g_1$  und  $g_2$  durch  $F$  benützen und mit  $R$  den Durchdringungspunkt des zum Speer  $h$  rechtsparellen Speeres durch  $O$  mit der Kugel bezeichnen:

$$(RR_1) = \frac{\pi}{2} - (\psi_1 - \varphi_1)$$

$$(RR_2) = \frac{\pi}{2} - (\psi_2 - \varphi_2)$$

und endlich

$$5) \quad (R_1R_2) = \psi_1 - \psi_2 - (\varphi_1 - \varphi_2) = \psi - \varphi.$$

Mit den Formeln 4) und 5) ist der Satz von Study bewiesen, und die hier gegebene Ableitung, welche ohne trigonometrische<sup>1)</sup> oder analytisch-geometrische Entwicklungen zu verwenden, allein der ganz elementaren, durch das „Pentagramma mirificum“ gegebenen Grundlage bedarf, gewährt durch die dabei gebrauchten Konstruktionen zugleich einen Einblick in die Entstehung der Studyschen Abbildung.

---

<sup>1)</sup> An anderer Stelle (N. E. G., S. 189—191) hatte ich noch trigonometrische Formeln benützt zur Ableitung der Beziehungen (4) und (5).