Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Biegung einer kreisförmigen Platte.

Von A. Föppl.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Vor 50 Jahren hat Clebsch in seinem Buche „Theorie der Elastizität fester Körper“ (Leipzig, bei Teubner, 1862) die Biegung untersucht, die eine am Rande unterstützte kreisförmige Platte durch Lasten erfährt, die senkrecht zur Plattenebene gerichtet sind. Für eine am Rande eingespannte Platte wurde von ihm eine strenge Lösung der Differentialgleichung der gebogenen Platte abgeleitet. Diese Lösung liefert die Ordinaten der elastischen Fläche, zu der die Mittelebene der Platte verbogen wird. Die Lasten können beliebig über die Fläche verteilt sein; vollständig ausgerechnet sind aber die Formeln von Clebsch nur für den Fall, daß die Platte eine Einzellast trägt, die an beliebiger Stelle angreifen kann.

Dieser Belastungsfall ist in der Tat besonders wichtig; nicht nur weil er bei den praktischen Anwendungen, die man von der Theorie zu machen wünscht, häufig vorkommt, sondern auch weil sich die Lösung für jeden anderen Belastungsfall aus ihm auf Grund des Superpositionsgesetzes ohne weiteres ableiten läßt. Aus diesem Grunde werde ich mich hier ebenfalls auf die Behandlung der durch eine Einzellast von beliebiger Angriffsstelle hervorgerufenen Biegung beschränken.

In den Formeln von Clebsch steckt ein an sich zwar unerheblicher Rechenfehler, der bei der Ausrechnung unterlaufen sein muß, der aber natürlich genügt, die zahlenmäßigen Ergebnisse der Formeln zu fälschen. Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein. Auch in die französische Übersetzung, die de Saint-Vénant von dem Buche von Clebsch herausgegeben hat (Paris, bei Dunod, 1881), und die wegen der zahlreichen und wichtigen Zusätze des Übersetzers noch berühmter geworden ist, als das ursprüngliche Werk, ist der Rechenfehler unbemerkt übergegangen.

Zu praktischen Anwendungen sind die Formeln von Clebsch wenigstens in ihrer allgemeineren Gestalt bisher kaum benützt worden. In der Technischen Mechanik, die sich mit solchen Anwendungen berufsmäßig zu beschäftigen hätte, hat man sich bisher stets damit begnügt, nur die beiden symmetrischen Belastungsfälle zu behandeln, bei denen die Platte entweder eine in Kreismittelpunkte angreifende Einzellast oder eine gleichmäßig über die ganze Fläche nach Art eines Flüssigkeitsdrucks verteilte Belastung zu tragen hat. Diese Fälle sind viel einfacher zu behandeln, als die Biegung durch eine exzentrisch angreifende Einzellast. Auf die von Clebsch aufgestellte Theorie brauchte daher in den Darstellungen der Plattenbiegung, die sich in den Lehrbüchern der Technischen Mechanik finden, nicht zurückgegriffen zu werden. Immerhin wird das Ergebnis dieser Betrachtungen mit den Formeln von Clebsch, namentlich in früheren Jahren, als der Gegenstand noch den Reiz der Neuheit hatte, öfters verglichen worden sein. Man hätte daher den bei Clebsch vorgekommenen Rechenfehler jedenfalls schon längst bemerkt, wenn nicht die mit dem Fehler behafteten Glieder für den Fall der zentrischen Belastung herausfielen. In diesem Falle stimmen die Formeln von Clebsch inhaltlich mit den in der Technischen Mechanik abgeleiteten vollständig überein.

Immerhin kann es als auffällig bezeichnet werden, daß der Rechenfehler nicht schon früher bemerkt wurde, da die beiden Formeln, in die er eingetreten ist, infolge davon gar nicht homogen in den Dimensionen ausgefallen sind, so daß sie für eine verschiedene Wahl der Längeneinheit zu ganz von einander abweichenden Schlußergebnissen führen müßten. Bei dem ersten Versuche, den ich vornahm, die Formeln zu einer

Anwendung zu benützen, fiel mir sofort auf, daß sie wegen des Mangels gleicher Benennung aller durch Plus-, Minus- oder Gleichheitszeichen mit einander verbundenen Glieder unmöglich richtig sein können. Jedem anderen, der eine Anwendung versuchen wollte, die sich auf den allgemeineren Fall der exzentrischen Belastung bezog, hätte sich dieselbe Bemerkung auch aufdrängen müssen und man muß daher wohl annehmen, daß die Formeln niemals, weder von Clebsch selbst noch von seinem Übersetzer oder einem Leser seines Buches zu einer zahlenmäßigen Berechnung für einen Fall der exzentrischen Belastung benützt worden sind.

In der Technik hat die Thorie der Plattenbiegung neuerdings eine erhöhte Bedeutung gewonnen. Nach der jetzt überall eingeführten Bauweise in Eisenbeton werden vielfach Decken und Wände hergestellt, die in guter Annäherung den Voraussetzungen entsprechen, von denen man in der Elastizitätstheorie bei der Ableitung der Gleichungen für die Plattenbiegung ausgeht. Allen sich darauf beziehenden theoretischen Entwickelungen steht daher, sofern sie mit der Erfahrung hinreichend übereinstimmen, ein weites und wichtiges Anwendungsgebiet offen.

Zunächst bezieht sich dies zwar auf rechteckige Platten, die in Bauwerken viel häufiger vorkommen, als die kreisförmigen. Mit der Theorie der rechteckigen Platten haben sich daher die Ingenieure in den letzten Jahren eingehender zu beschäftigen begonnen, wie aus verschiedenen Veröffentlichungen hervorgeht, von denen die in Buchform erschienene Abhandlung meines hiesigen Kollegen, Herrn Professor Hager „Berechnung rechteckiger Platten“ (München, bei Oldenbourg, 1911) die umfänglichste und wichtigste ist.

Auf die Biegung der rechteckigen Platte werde ich an dieser Stelle nicht eingehen. Nur den einen Hinweis möchte ich nicht unterdrücken, daß bereits de Saint-Vénant in der schon erwähnten Übersetzung des Buches von Clebsch in einer umfangreichen Anmerkung, die eine Abhandlung für sich bildet, eine sehr ausführliche und nach mancher Richtung hin unübertreffliche Theorie der rechteckigen Platte, die an allen vier Seiten frei aufliegt, gegeben hat. Im Übrigen behalte ich mir vor, später an anderer Stelle auch auf die rechteckige Platte noch näher einzugehen.

Hier beschränke ich mich dagegen auf die Theorie der kreisförmigen Platte, die für den allgemeineren Fall der exzentrischen Belastung schwieriger in der Durchführung ist, als die der rechteckigen Platte und für die aus diesem Grunde unmittelbar gebrauchsfertige Formeln bisher überhaupt nicht zu Gebote standen, da die Lösung von Clebsch aus dem schon erwähnten, an sich zwar geringfügigen Mangel nicht verwendbar war. Nachdem sich das Bedürfniß nach einer genaueren Berechnung der Plattenbiegung in der Technik bei den rechteckigen Platten schon sehr nachdrücklich geltend gemacht hat, darf man erwarten, da kreisförmige Platten immerhin auch nicht selten vorkommen, daß die Formeln, die ich für diese hier mitzuteilen beabsichtige, auch nicht lange auf eine Verwendung zu warten brauchen.

Ich beginne damit, für die am Rande eingespannte Platte die Formeln von Clebsch von neuem abzuleiten und sie richtig zu stellen. Dabei bediene ich mich einer Ableitung, von der ich annehmen zu dürfen glaube, daß man sie für einfacher und leichter verständlich halten wird, als die von Clebsch benützte. Dasselbe Rechnungsverfahren wird dann auch dazu verwendet, um die entsprechenden Formeln für die am Rande frei aufliegende Platte aufzustellen.

Die Formeln für beide Fälle bilden strenge Lösungen der Differentialgleichung der gebogenen Platte, die den gewählten Grenzbedingungen genau angepaßt sind. Aber darum sind sie noch keineswegs als in jeder Hinsicht brauchbare Lösungen der ursprünglichen Aufgabe anzusehen. Denn diese Aufgabe besteht darin, den Formänderungs- und Spannungszustand zu finden, der durch eine vorgeschriebene Belastung in der Platte hervorgebracht wird und sie erschöpft sich keineswegs in der mathematischen Aufgabe, die Differentialgleichung der Platte für gegebene Randbedingungen zu integrieren. Beides ist eben nicht genau dasselbe. Bei der Ableitung der Differentialgleichung für die gebogene Platte geht man nämlich von Annahmen aus, die nicht überall hinreichend erfüllt sind. Wenn auch sonst die Übereinstimmung ohne Zweifel nichts zu wünschen übrig läßt, so tritt doch an der Angriffsstelle der Belastung und in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft augenscheinlich ein Spannungszustand von ganz anderer Art ein, als er bei der Aufstellung der Differentialgleichung als überall bestehend vorausgesetzt wird.

Da die Abweichung nur in einem eng begrenzten Bezirke stattfindet, ist freilich nicht anzunehmen, daß sich ihr Einfluß auf größere Entfernungen von der belasteten Stelle hin bemerklich machen könnte. Aller Voraussicht nach darf man daher eine gute Übereinstimmung der strengen Lösung der Differentialgleichung mit den tatstächlich eintretenden Durchbiegungen erwarten. Die Erfahrung scheint dies auch zu bestätigen. Über Versuche, die ich selbst hierüber angestellt habe und die ich noch viel weiter fortzusetzen beabsichtige, behalte ich mir vor, an anderer Stelle späterhin ausführlich zu berichten. Schon jetzt habe ich aber hinreichenden Grund für die Annahme, daß die aus Lösungen der Differentialgleichung abgeleiteten theoretischen Werte für die Durchbiegung mit den beim Versuche festzustellenden im allgemeinen recht gut übereinstimmen.

Ganz anders ist es aber mit den in der Platte auftretenden Biegungsspannungen. Nach diesen wird bei den Anwendungen, die man von der Theorie in der Technik zu machen wünscht, sogar in erster Linie gefragt und eine Theorie, die über sie keinen ausreichenden Aufschluß zu geben vermag, ist daher als unbrauchbar oder mindestens als unvollständig zu bezeichnen. Gerade hierin läßt es aber die auf die Lösung der Differentialgleichung gestützte Theorie fehlen; wenigstens für den hier zu behandelnden und praktisch besonders wichtigen Fall der Belastung mit einer Einzellast führt sie zu offenbar unrichtigen Ergebnissen. Das zeigt sich schon bei dem einfachen Falle der in der Mitte belasteten Platte; wie schon längst allgemein bekannt ist, liefert hierfür die auf die Lösung der Differentialgleichung gestützte Theorie unendlich große Biegungsspannungen in der nächsten Umgebung der belasteten Stelle. Dieses Ergebnis steht nicht nur mit der Erfahrung im Widerspruch, sondern es lehrt auch, daß die Differentialgleichung keinen brauchbaren Ausgangspunkt für eine Theorie bildet, die zur Berechnung der Biegungsspannungen führen soll.

Für den Zweck der Festigkeitsberechnung muß man sich daher nach einer anderen Grundlage umsehen. Diese muß jedenfalls so gewählt werden, daß sie den soeben hervorgehobenen Fehler vermeidet, an der belasteten Stelle eine unendlich scharfe Krümmung der elastischen Fläche vorauszusagen, die mit unendlich großen Spannungen verbunden wäre. Da sich aber die auf die Differentialgleichung gestützte Theorie im übrigen, d. h. für die Berechnung der Durchbiegungen gut bewährt hat, wird man daran sonst so wenig als möglich zu ändern suchen.

Für die Lösung der hiermit gestellten Aufgabe bleibt der Willkür noch viel Spielraum übrig und erst die Prüfung, die von einer weiteren Ausdehnung der Beobachtungen zu erwarten ist, wird endgültig erkennen lassen, welcher der verschiedenen sich darbietenden Möglichkeiten der Vorzug einzuräumen ist. Der erste Schritt zu diesem Ziele kann aber nur darin bestehen, daß unter den zunächst möglich erscheinenden Ansätzen irgend einer ausgewählt wird, der einleuchtend genug erscheint und der auch zu verhältnismäßig einfachen Rechnungen führt. Für diesen Ansatz wird man die Theorie vollständig durchzuführen haben, um einen Vergleich ihrer Ergebnisse mit der Erfahrung zu ermöglichen. Erst wenn sich bei diesem Vergleiche erhebliche Widersprüche ergeben sollten, würde man zu einer Änderung des zuerst gewählten einfacheren Ansatzes zu schreiten haben. Die Art der Widersprüche würde dann voraussichtlich auch einen Fingerzeig dafür liefern, nach welcher Richtung hin eine Änderung notwendig erscheint.

Den ersten Schritt auf diesem Wege habe ich hier getan und, soweit mir dies zu beurteilen jetzt möglich erscheint, mit ganz befriedigendem Erfolge; obschon man eine weitere Bewährung der erzielten Ergebnisse natürlich erst noch abzuwarten haben wird. Ehe ich mit den Rechnungen beginne, möchte ich das Verfahren, das ich dabei einschlage, im allgemeinen beschreiben.

Ich beginne damit, einen möglichst einfach gestalteten Ausdruck für die Durchbiegung der Platte aufzustellen, der nur den wichtigsten Anforderungen an die voraussichtlich ungefähr zu erwartende Gestalt der elastischen Fläche entspricht, der aber von vorneherein keinerlei Anspruch darauf erhebt, eine mehr oder weniger genaue oder angenäherte Lösung der Differentialgleichung zu bilden. Nachdem dieser im übrigen nur dem Gebot möglichster Einfachheit gehorchende analytische Ausdruck den vorgeschriebenen Grenzbedingungen angepaßt ist, kommen in ihm noch drei Konstanten vor, über die frei verfügt werden kann. Erst dann werden diese Konstanten der Forderung gemäß gewählt, daß sich die durch den analytischen Ausdruck beschriebene Gestalt der elastischen Fläche so wenig als es innerhalb des begrenzten Rahmens überhaupt noch möglich ist, von der wahren Gestalt der elastischen Fläche unterscheiden soll.

Den Entscheidungsgrund hierfür gibt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ab. Nach diesem Satze muß bei der wahren Gestalt der elastischen Fläche für jede virtuelle Formänderung, die wir mit ihr vornehmen mögen, die virtuelle Arbeit der Last gleich sein der virtuellen Änderung der in der Platte aufgespeicherten Formänderungsarbeit. Umgekehrt kann auch diese Bedingung nur bei der wahren Gleichgewichtsgestalt der gebogenen Platte und nicht bei einer Fläche erfüllt sein, die diese nur näherungsweise darstellt. Aber wir können unseren analytischen Ausdruck immerhin so wählen, daß die Gleichheit zwischen virtueller Arbeit der Last und virtueller Änderung der potentiellen Energie wenigstens bei allen virtuellen Verschiebungen erfüllt wird, die durch Änderungen der drei vorher willkürlich gebliebenen Konstanten hervorgebracht werden können. Diese Bedingung führt zur

Ermittelung der Werte der drei Konstanten. Hiermit erhalten wir aber den dreikonstantigen Ausdruck von der willkürlich gewählten, möglichst einfachen Bauart, der sich unter allen ihm sonst gleichen den Forderungen am meisten nähert, die an die wahre Gestalt der elastischen Fläche gestellt werden müssen.

Der hier beschriebene Gedankengang steht in ziemlich engem Zusammenhange mit einem von W. Ritz angegebenen Verfahren zur näherungsweisen Integration von Differentialgleichungen, das in einer Abhandlung über die Transversalschwingungen von Platten in den Annalen der Physik, 4, Bd. 28, S. 737, 1909 auseinandergesetzt ist. Die Absicht, die hier damit verfolgt wird, ist freilich eine ganz andere, als bei Ritz. Während Ritz eine sich der strengen Lösung der Differentialgleichung der Platte so genau als möglich anschließende Näherungslösung sucht, ist hier die strenge Lösung der Differentialgleichung vorher schon gefunden, aber als unzulänglich für die Berechnung der Spannungen erkannt. Wenn man will, kann man ja wohl auch den hier aufzustellenden analytischen Ausdruck als eine Näherungslösung der Differentialgleichung ansehen; aber er ist doch viel mehr als eine bloße Näherung, da er zugleich eine Verbesserung der „strengen Lösung“ zu sein beansprucht und sich jedenfalls mehr als diese für die Festigkeitsberechnung eignet. In der Tat lehrt ein zahlenmäßiger Vergleich, daß die „Näherungsformel“ ungefähr ebensogroße Durchbiegungen liefert, wie die „strenge“ Formel. Nur in der Nähe der belasteten Stelle führen beide zu erheblich verschiedenen Ergebnissen, insofern die durch die „Näherungsformel“ dargestellte Fläche im Gegensatze zur andern auch an dieser Stelle eine endliche Krümmung behält. Das war es aber gerade, worin eine Verbesserung nötig erschien. Es ist nun zum mindesten möglich und wohl auch wahrscheinlich, daß die Näherungsformel einen hinreichend genau mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Wert für die größte vorkommende Biegungsspannung liefert, während die aus der strengen Lösung der Differentialgleichung abgeleitete Formel hierbei vollständig versagt.

Meiner Rechnung habe ich einen analytischen Ausdruck für die Ordinate der elastischen Fläche zu Grunde gelegt, der nach Erfüllung der Grenzbedingungen noch drei verfügbare Konstanten enthält. Das ist die Mindestzahl, die notwendig erscheint, um allzu große Verzerrungen gegenüber der wahren Gestalt der elastischen Fläche zu vermeiden. Natürlich könnte man aber auch den Ansatz so erweitern, daß vier oder auch noch mehr Konstanten für die Ermittelung nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, also für die Anpassung an die wahre Gestalt der elastischen Fläche verfügbar blieben. Es läßt sich von vornherein erwarten und ich habe mich auch noch durch eine besondere Rechnung, die ich hier nicht wiedergeben will, davon überzeugt, daß sich ein vierkonstantiger Ausdruck noch viel genauer als der dreikonstantige an diewahre Gestalt der elastischen Fläche anschmiegt, so zwar, daß sonst kaum noch merkliche Unterschiede bestehen bleiben, während an der belasteten Stelle auch der vierkonstantige Ausdruck zu endlichen Krümmungen und hiermit zu endlichen Spannungen führt.

Ein Ausdruck mit mehr als drei Konstanten verursacht natürlich eine viel größere Rechenarbeit. Aber der Hauptgrund, der mich dazu bewogen hat, zum mindesten vorläufig bei dem einfachen dreigliedrigen Ausdruck stehen zu bleiben, war ein anderer. Ich habe es nämlich als recht zweifelhaft betrachtet, ob ein vierkonstantiger Ausdruck nach der Richtung hin, auf die es dabei allein ankommt, nämlich für die Berechnung der Biegungsspannungen, zu besser mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Ergebnissen führen würde, als der einfache dreikonstantige Ausdruck. Eine allzugroße Annäherung an die strenge Lösung der Differentialgleichung darf nämlich hierbei keineswegs angestrebt werden. Denn wir wissen ja bereits, daß die strenge Lösung, die uns von vornherein zu Gebote steht, für die Spannungsberechnung unbrauchbar ist. Eine endgültige Entscheidung dieser Frage wird sich, wie schon bemerkt, erst herbeiführen lassen, wenn zahlreichere Versuchsergebnisse vorliegen, die sich zum Vergleiche mit den aus verschiedenen Annahmen abgeleiteten Folgerungen eignen.

Nunmehr wende ich mich zur Durchführung der angekündigten Berechnungen. Dabei setze ich sowohl die Differentialgleichung der Plattenbiegung, als auch einige andere Gleichungen, die mit ihr in engem Zusammenhange stehen, als bereits bekannt voraus. Den Leser, bei dem diese Voraussetzung nicht zutrifft, erlaube ich mir auf Band V meiner „Vorlesungen über Technische Mechanik“ (Leipzig, bei Teubner, 1907) zu verweisen. Man kann dort in § 17 eine Ableitung der Differentialgleichung und der damit zusammenhängenden Gleichungen finden, in der auch die Voraussetzungen ausführlich besprochen sind, von denen man bei der Aufstellung dieser Gleichungen ausgehen muß.

Für rechtwinklige Koordinaten lautet die Differentialgleichung:

$$K\left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}\right) = q \tag{1}$$

Die Koordinaten-Ebene der x und y fällt dabei mit der Mittelebene der Platte zusammen. Unter ζ ist die Ordinate der elastischen Fläche zu verstehen, also die Verschiebung, die ein Punkt der Mittelebene der Platte mit den Koordinaten x und y in der Richtung der z-Achse bei der elastischen Formänderung erfährt. Mit q ist hier die auf die Flächeneinheit der Platte bezogene Belastung bezeichnet, von der angenommen wird, daß sie mit der positiven z-Achse gleich gerichtet ist. Mit K ist zur Abkürzung der Ausdruck

$$K = \frac{m^2 E h^3}{12\,(m^2 - 1)} \tag{2}$$

bezeichnet, in dem m die Poissonsche Verhältniszahl bedeutet, die gewöhnlich ungefähr gleich 4 gesetzt werden kann, während unter E der Elastizitätsmodul und unter h die Dicke der Platte zu verstehen ist. Da h konstant vorausgesetzt wird, ist auch K eine Konstante, die als ein Maß für die Biegungssteifigkeit der Platte anzusehen ist.

Für den hier zu behandelnden Fall, daß die Platte nur eine Einzellast trägt, nimmt übrigens q überall den Wert Null an, mit Ausnahme der belasteten Stelle. An dieser selbst wäre q unendlich groß zu setzen, wenn man sich die Last buchstäblich genau in einem Punkt vereinigt denken wollte. Aber schon dann, wenn q nur von gleicher Größenordnung mit den in der Platte auftretenden Biegungsspannungen wird, sind an dieser Stelle die bei der Ableitung der Differentialgleichung (1) zu Grunde gelegten Voraussetzungen nicht mehr erfüllt. Jedenfalls darf daher Gl. (1) auf die Angriffsstelle der Last und ihre nächste Umgebung nicht unmittelbar angewendet werden.

Außer Gl. (1) muß ich mich in der Folge auch noch auf einige weitere Gleichungen stützen, die bei der Ableitung von Gl. (1) auftreten und die man ebenfalls an der genannten Stelle nachsehen kann. In einem Schnitt, der im Punkte $x\,y$ parallel zur YZ-Ebene durch die Platte gelegt wird, treten nämlich Normalspannungen σ_x auf, die sich nach dem Elastizitätsgesetze in der Formänderung, also in der Funktion ζ ausdrücken lassen, nämlich

$$\sigma_x = -\frac{m E}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

worin z den Abstand der betrachteten Stelle von der Mittelebene der Platte bedeutet. Es versteht sich von selbst, daß die Gleichung auch gültig bleibt, wenn man die Zeiger x und y mit einander vertauscht. Für die parallel zur Mittelebene gehenden Schubspannungen $\tau_{y\,x}$ erhält man (vgl. S. 103 a. a. O.)

$$\tau_{y\,x} = -2\,G\,z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} \tag{4}$$

wenn mit G der Schubelastizitätsmodul bezeichnet wird.

Endlich kann man noch einen Ausdruck für die Resultierende der Schubspannungen $\tau_{y\,z}$ angeben, die parallel zur Z-Achse in dem vorher schon durch die Platte geführten Schnitt übertragen werden. Bezeichnet man der Einfachheit halber die auf die Längeneinheit des Schnitts bezogene Resultierende dieser Spannungen mit $V_{y\,z}$, so hat man (S. 104 a. a. O.)

$$V_{y\,z} = -K \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2\, \partial y} \right) \tag{5}$$

Für die Untersuchung der kreisförmigen Platte setzt man in allen diesen Formeln an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten besser Polarkoordinaten r, φ ein. Die Abstände r sollen dabei vom Mittelpunkt der Platte aus gerechnet werden und der Winkel φ soll von jenem Radius aus zählen, der durch den Angriffspunkt der Last geführt werden kann. Die Koordinatentransformation kann leicht ausgeführt werden, wie ebenfalls auf S. 110 des genannten Buches nachgelesen werden kann. Damit geht die Differentialgleichung (1) über in

$$K\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 \zeta = q \tag{6}$$

Für die Spannungen σ_r und σ_t in radialer und tangentialer Richtung erhält man aus Gl. (3)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{m E}{m^2-1} z\left(m\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}\right)\\ \sigma_t &= -\frac{m E}{m^2-1} z\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}+m\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}+m\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und ebenso aus Gl. (4)

$$\tau_{rt} = -2 G z \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right) \tag{8}$$

sowie aus Gl. (5) für die resultierende Schubkraft in einem zum Radius senkrecht stehenden Schnitt

$$V_r = -K\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}\right) \tag{9}$$

Auf Grund der zuletzt angeschriebenen Formeln kennt man auch den Spannungszustand der Platte, sobald der durch die Funktion ζ beschriebene Formänderungszustand ermittelt ist. Von ζ wissen wir zunächst, daß es eine in φ periodische Funktion sein muß, da man an dieselbe Stelle der Platte zurückkommt, wenn man φ um 2π oder ein Vielfaches davon wachsen läßt. Ferner muß ζ auch eine gerade Funktion von φ sein, da die zu einer Einzellast gehörige elastische Fläche eine Symmetrieebene besitzt, die durch den zum Angriffspunkt gezogenen Radius hindurchgeht, so daß sich ζ nicht ändern darf, wenn man $+\varphi$ durch $-\varphi$ ersetzt. Man kann daher ζ durch eine Fouriersche Reihe darstellen, in der nur Cosinus-Glieder in φ vorkommen. Wir setzen also

$$\zeta = R_0 + R_1 \cos \varphi + \dots + R_n \cos n\varphi + \dots \tag{10}$$

In dieser Entwickelung bedeuten die Koeffizienten R Funktionen von r, die erst noch näher zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke setzen wir den Ausdruck (10) in die Differentialgleichung der Platte ein. Mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft der belasteten Stelle lautet diese Gleichung hier

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 \zeta = 0 \tag{11}$$

und durch Einsetzen des für ζ aufgestellten Ausdrucks geht sie über in

$$\left(\frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r}\right)^2 R_0 + \cos\varphi \left(\frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r} - \frac{1}{r^2}\right)^2 R_1 + \dots$$
$$+ \cos n\varphi \left(\frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 R_n + \dots = 0$$

Die Gleichung muß bei gegebenem r für jeden Wert von φ erfüllt sein. Wir setzen daher jedes Glied für sich gleich Null, womit wir für jede der unbekannten Funktionen R eine gewöhnliche Differentialgleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 R_n = 0 \tag{12}$$

erhalten. Diese Gleichungen lassen sich leicht integrieren. Man muß dabei die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ für sich behandeln, da sie zu Lösungen führen, die von der allgemeinen Form abweichen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= c_1 r^2 \lg r + c_2 r^2 + c_3 \lg r + c_4 \\ R_1 &= k_1 r + \frac{k_2}{r} + k_3 r^3 + k_4 r \lg r \\ R_n &= b_{1n} r^n + b_{2n} r^{-n} + b_{3n} r^{n+2} + b_{4n} r^{-n+2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Von der Richtigkeit dieser Lösungen kann man sich durch Ausführung der Probe nachträglich leicht überzeugen. Dabei ist zu beachten, daß R_n nur für $n > 2$ verwendet werden darf. In jeder Funktion kommen vier willkürliche Integrationskonstanten vor, die mit c, k und b und angefügten Zeigern bezeichnet sind und durch deren Wahl die Lösung den vorgeschriebenen Grenzbedingungen angepaßt werden kann.

Durch passende Wahl der Integrationskonstanten läßt sich erreichen, daß die Gleichungen (10) und (13) den Formänderungszustand innerhalb irgend eines Stücks der Plattenfläche, das den Angriffspunkt der Last nicht mit umschließt, richtig beschreiben. Dagegen ist es nicht möglich, den Konstanten solche Werte zu erteilen, daß dieselbe Lösung für die ganze Platte gilt. Denn für jede Wahl, die man treffen könnte, wäre Gl. (11) über die ganze Platte ohne Ausnahme erfüllt und nach Gl. (6) müßte daher q überall gleich Null, also die Platte ganz frei von Lasten sein.

Wir sehen uns daher genötigt, die Platte in zwei Gebiete oder in zwei Schalen zu zerlegen und zwar so, daß der Angriffspunkt der Last auf der Grenzlinie zwischen beiden Gebieten liegt. Dadurch erreichen wir, daß jedes Gebiet für sich im Innern ganz frei von Kräften ist, so daß sich die vorher gefundene Lösung unmittelbar darauf anwenden läßt. Die Lösungen werden für beide Schalen freilich verschieden ausfallen müssen und wir haben dann darauf zu achten, daß sie sich in der Grenzlinie passend aneinanderschließen. Für die Durchführung der Rechnung ist es am bequemsten, als Grenzlinie zwischen beiden Schalen den Kreis zu wählen, der durch den Angriffspunkt der Last vom Plattenmittelpunkt als Kreismittelpunkt aus beschrieben werden kann.

Die Last sei in der Folge mit P und ihr Abstand von der Plattenmitte mit p bezeichnet. Der Halbmesser des Plattenumfangs sei a. Für das von $r = p$ bis $r = a$ reichende äußere Gebiet der Platte mögen die Konstanten c, k, b in der Gl. (13) so bezeichnet sein, wie es dort bereits geschehen ist. Im inneren Gebiet, von $r = 0$ bis $r = p$ gilt dann eine Lösung von derselben Form, aber mit anderen Konstanten, die von den vorigen durch Beifügen eines oben angebrachten Striches unterschieden werden sollen. An die Seite der Gleichungen (13) treten daher die für die innere Schale gültigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} R'_0 &= c'_1\, r^2 \lg r + c'_2\, r^2 + c'_3 \lg r + c'_4 \\ R'_1 &= k'_1\, r + \frac{k'_2}{r} + k'_3\, r^3 + k'_4\, r \lg r \\ R'_n &= b'_{1\,n}\, r^n + b'_{2\,n}\, r^{-n} + b'_{3\,n}\, r^{n+2} + b'_{4\,n}\, r^{-n+2} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Wir sehen uns jetzt nach den Grenzbedingungen um, die sich für die innere Schale aufstellen lassen. In der Plattenmitte, also für $r = 0$ darf ζ nicht unendlich groß werden und außerdem muß man auch immer zu demselben Werte von ζ an dieser Stelle geführt werden, wie man auch φ wählen mag; für $r = 0$ müssen daher R'_1 und alle R'_n verschwinden. Daraus folgt zunächst, daß die Konstanten $c'_3\ k'_2\ b'_{2\,n}\ b'_{4\,n}$ gleich Null zu setzen sind. Dann muß noch k'_4 gleich Null sein, damit in der Plattenmitte $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ nicht unendlich groß wird und das Gleiche gilt aus einem ähnlichen Grunde auch für c'_1. Wäre nämlich c'_1 von Null verschieden, so würde in der Plattenmitte der Differentialquotient $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}$ und mit ihm die Krümmung der Platte unendlich groß und außerdem würde auch die nach Gl. (9) berechnete Schubkraft V_r unendlich groß, was aber, da die Platte in der Mitte unbelastet sein soll, offenbar nicht möglich ist. Auf Grund der Bedingungen in der Plattenmitte gehen daher die Gleichungen (14) über in

$$\left.\begin{aligned} R'_0 &= c'_2\, r^2 + c'_4 \\ R'_1 &= k'_1\, r + k'_3\, r^3 \\ R'_n &= b'_{1\,n}\, r^n + b'_{3n}\, r^{n+2} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Nun kommen die Bedingungen an der Grenze zwischen beiden Schalen. Zunächst muß man für jeden Punkt des Grenzkreises, also bei beliebig gewähltem φ, zu denselben Werten von ζ und von $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ gelangen, gleichgültig ob man den Punkt zur äußeren oder zur inneren Schale rechnet. Aber auch der zweite Differentialquotient von ζ kann bei $r = p$ keinen Sprung beim Übergang von der einen zur anderen Schale machen. Wäre er nämlich zu beiden Seiten der Grenzlinie verschieden groß, so erhielte man nach der ersten der Gleichungen (7) verschiedene Werte von σ_r. In dem Schnitte, der die Grenze zwischen beiden Gebieten bildet, muß man aber zu beiden Seiten nach dem Satze von Aktion und Reaktion gleiche Werte von σ_r erhalten.

Für die Stelle $r = p$ bei beliebigem φ bestehen daher die Grenzbedingungen zwischen beiden Schalen, wenn man zunächst nur auf die von φ freien Glieder achtet,

$$R_0 = R_0'\,; \quad \frac{d\,R_0}{d\,r} = \frac{d\,R_0'}{d\,r}\,; \quad \frac{d^2\,R_0}{d\,r^2} = \frac{d^2\,R_0'}{d\,r^2} \tag{16}$$

wofür man beim Einsetzen der Werte aus den Gleichungen (13) und (15) erhält

$$\left.\begin{aligned} c_2' p^2 + c_4' &= c_1 p^2 \lg p + c_2 p^2 + c_3 \lg p + c_4 \\ 2\,c_2' p &= 2\,c_1 p \lg p + (c_1 + 2\,c_2)\,p + \frac{c_3}{p} \\ 2\,c_2' &= 2\,c_1 \lg p + (3\,c_1 + 2\,c_2) - \frac{c_3}{p^2} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

und entsprechende Gleichungen lassen sich ebenso für die in $R_1\ R_1'\ R_n\ R_n'$ vorkommenden Konstanten aufstellen.

Die Gleichungen (17) können zunächst dazu verwendet werden, die Konstanten c_2' und c_4' der inneren Schale zu berechnen, wenn die Konstanten c_1 bis c_4 der äußeren Schale als gegeben betrachtet werden. Überdies wird aber, da es sich um drei Gleichungen handelt, damit auch noch eine Bedingung zwischen den Konstanten der äußeren Schale ausgesprochen. Aus den beiden letzten Gleichungen findet man nämlich nach Elimination von c_2'

$$c_3 = c_1 p^2$$

Hiermit geht R_0 über in

$$R_0 = c_1 (r^2 + p^2) \lg r + c_2 r^2 + c_4 \tag{18}$$

Für die weitere Ermittelung von R_0 stehen noch die Grenzbedingungen am Rande der Platte zur Verfügung. Wenn die Platte, wie zunächst vorausgesetzt werden soll, am Rande eingespannt ist, bestehen bei $r = a$ und für jedes φ die Bedingungen

$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$$

so daß dort insbesondere auch

$$R_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d R_0}{d r} = 0$$

werden muß. Durch Einsetzen des Wertes von R_0 aus Gl. (18) erhält man daraus

$$0 = c_1 (a^2 + p^2) \lg a + c_2 a^2 + c_4$$
$$0 = c_1 \left(2 a \lg a + a + \frac{p^2}{a}\right) + 2 c_2 a$$

Hiermit lassen sich alle Konstanten c und c' in einer, etwa in c_1 ausdrücken und man erhält durch Einsetzen der Werte in die Gleichungen (14) und (18)

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= c_1 \left((r^2 + p^2) \lg \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + p^2)(a^2 - r^2)}{2 a^2}\right) \\ R_0' &= c_1 \left((r^2 + p^2) \lg \frac{p}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - p^2)}{2 a^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die gleiche Rechnung, wie sie für R_0 ausführlich angeschrieben wurde, läßt sich ebenso auch für R_1 und R_n wiederholen. Man findet dann für R_1

$$R_1 = k_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{2 a^2 - 2 p^2}{a^2 p^2} r + \frac{p^2 - 2 a^2}{a^4 p^2} r^3 - \frac{4 r}{p^2} \lg \frac{a}{r}\right)$$
$$R_1' = k_2 \left(\frac{2 a^2 - 2 p^2}{a^2 p^2} r + \frac{(a^2 - p^2)^2}{a^4 p^4} r^3 - \frac{4 r}{p^2} \lg \frac{a}{p}\right)$$

indem es hier bequemer erschien, alle Konstanten k und k' in k_2 auszudrücken und ebenso

$$R_n = b_{4n}\left\{\frac{r^n}{a^{2n}}\left((n-1)p^2 - n a^2 + (n-1)r^2 - \frac{n(n-1)}{n+1}\frac{p^2 r^2}{a^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^n}\left(r^2 - \frac{n-1}{n+1}p^2\right)\right\}$$

$$R_n' = b_{4n}\left\{r^n\left((n-1)p^2 a^{-2n} - n a^{2-2n} + p^{2-2n}\right)\right.$$
$$\left. + (n-1)r^{n+2}\left(a^{-2n} - \frac{n}{n+1}p^2 a^{-2n-2} - \frac{1}{n+1}p^{-2n}\right)\right\}$$

Es bleibt jetzt zur vollständigen Lösung nur noch die Ermittelung der Konstanten c_1 k_2 und b_{4n} übrig. Hierzu verhilft uns eine weitere Bedingung am Grenzkreise zwischen der inneren und äußeren Schale, die sich auf die dort übertragene Schubkraft V_r bezieht.

Setzt man in Gl. (9) ζ aus Gl. (10) ein, so erhält man, wenn der Wert von V_r bei $r = p$ für die äußere Schale mit V_p und für die innere mit V_p' bezeichnet wird,

$$V_p = -K\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2R_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_0}{dr}\right) + \cos\varphi\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2R_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr} - \frac{1}{r^2}R_1\right) + \dots\right.$$
$$\left. + \cos n\varphi\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2R_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2}R_n\right) + \dots\right]_{r=p}$$

und für V_p' einen entsprechenden Ausdruck, bei dem nur jedem R oben ein Strich beizufügen ist. Bildet man die Differenz zwischen beiden und beachtet die in den Gleichungen (16) ausgesprochenen Beziehungen, so erhält man

$$V_p' - V_p = K\left[\frac{d^3R_0}{dr^3} - \frac{d^3R_0'}{dr^3} + \cos\varphi\left(\frac{d^3R_1}{dr^3} - \frac{d^3R_1'}{dr^3}\right) + \dots\right.$$
$$\left. + \cos n\varphi\left(\frac{d^3R_n}{dr^3} - \frac{d^3R_n'}{dr^3}\right) + \dots\right]$$

Nach dem Satze von der Gleichheit zwischen Aktion und Reaktion muß die Differenz für alle Stellen des Grenzkreises gleich Null sein, die unbelastet sind, also überall mit Ausnahme der Nachbarschaft des Angriffspunktes der Last P. Da unbestimmt bleibt, wie weit sich diese Nachbarschaft erstreckt, wollen wir zunächst einmal annehmen, die Last P verteile sich nach irgendeinem unbekannten Gesetze über den ganzen Grenzkreis hin und die davon an der durch den Winkel φ bezeichneten Stelle auf die Längeneinheit treffende Belastung sei Π. Dabei ist aber jedenfalls Π symmetrisch zu Ebene $\varphi = 0$ verteilt anzunehmen und wenn man über den Halbkreis von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integriert, hat man nach der Bedeutung von Π die Gleichung

$$\int_0^\pi \Pi p \, d\varphi = \frac{P}{2}$$

Diese Gleichung gilt für jedes Verteilungsgesetz von Π. Je mehr sich aber Π in der Nähe der Stelle $\varphi = 0$ anhäuft, also je mehr wir uns dem Falle einer an dieser Stelle zusammengedrängten Einzellast nähern, um so genauer gilt auch noch für jedes n die Gleichung

$$\int_0^\pi \Pi p \cos n \varphi \, d\varphi = \frac{P}{2}$$

da ja in der Tat der jetzt beigefügte Faktor $\cos n\varphi$ bei $\varphi = 0$ zu Eins wird und daher an dem vorigen Ergebnisse nichts ändert.

Eine längs des Grenzkreises verteilte Last Π bewirkt an allen Stellen, an denen Π von Null verschieden ist, einen Sprung in der Schubkraft V_p und zwar ist, wie aus der Betrachtung eines Plattenelements zu entnehmen ist, das längs des Grenzkreises von der ersten, senkrecht dazu von der zweiten Ordnung klein ist,

$$\Pi = V_p' - V_p$$

zu setzen. Die Differenz der V_p hatten wir vorher schon gebildet. Es kam dabei auf die Unterschiede zwischen den dritten Differentialquotienten der R und R' an. Differentiiert man die in den Gleichungen (19) und den folgenden festgestellten Werte der R und R' je dreimal nach r, bildet die Differenzen und setzt sie in die Differenz der V_p ein, so erhält man

$$II = K\left\{c_1 \frac{4}{p} - k_2 \frac{16}{p^4} \cos\varphi + \ldots + \frac{8\,n\,(n-1)}{p^{n+1}} b_{4\,n} \cos n\,\varphi + \ldots\right\}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $p \cos n\,\varphi$ und integriert sie zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, so erhält man $b_{4\,n}$ und ähnlich die übrigen Konstanten, nämlich

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{P}{8\,K\pi} \\ k_2 &= -\frac{P\,p^3}{16\,K\pi} \\ b_{4\,n} &= \frac{P\,p^n}{8\,n\,(n-1)\,K\pi} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Hiermit ist die Aufgabe vollständig gelöst, ζ als Funktion von r und φ darzustellen. Ich bemerke noch, daß die für R_0 R_0' R_n und R_n' gefundenen Werte dem Inhalte nach vollständig mit den schon von Clebsch angegebenen übereinstimmen, während R_1 und R_1' von den in dem Buche von Clebsch angegebenen Ausdrücken, die nicht homogen in den Dimensionen sind, abweichen.

Wir wollen die Formeln dazu benützen, den sogenannten Biegungspfeil, den wir wie üblich mit dem Buchstaben f bezeichnen, auszurechnen. Man versteht darunter die Einsenkung ζ an der Lastangriffsstelle selbst. Dazu müssen wir in den vorhergehenden Formeln $\varphi = 0$ und $r = p$ setzen. Aus Gl. (10) wird dann

$$f = R_{0\,p} + R_{1\,p} + \ldots + R_{n\,p} + \ldots$$

wenn durch Anhängen des Zeigers p angedeutet wird, daß $r = p$ gesetzt werden soll. Für die R findet man nach den Gleichungen (19) und den ihnen folgenden:

$$R_{0p} = \frac{P}{8\,K\pi}\left(2\,p^2 \lg\frac{p}{a} + \frac{a^4 - p^4}{2\,a^2}\right)$$

$$R_{1p} = \frac{P}{16\,K\pi} p^2 \left(4 \lg \frac{a}{p} + \frac{4\,a^2 p^2 - 3\,a^4 - p^4}{a^4}\right)$$

$$R_{np} = \frac{P}{8n(n-1)K\pi} p^2 \left(2(n-1)\left(\frac{p}{a}\right)^{2n} - \frac{n(n-1)}{n+1}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n+2} - n\left(\frac{p}{a}\right)^{2n-2} + \frac{2}{n+1}\right)$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man nach einer einfachen Umformung

$$f = \frac{P}{16\,K\pi} p^2 \left\{\frac{(a^2-p^2)^3}{a^4 p^2}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{n=\infty} \left(\frac{4}{n}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n} - \frac{2}{n+1}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n+2} - \frac{2}{n-1}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n-2} + \frac{4}{n(n^2-1)}\right)\right\}$$

Zur Bildung der Summe fassen wir zunächst alle Glieder zusammen, die dieselbe Potenz von $\frac{p}{a}$ enthalten, sagen wir die $2m^{\text{te}}$ Potenz, wobei m irgend eine ganze Zahl sein kann, die größer als 2 ist. Setzen wir $n = m$, so erhalten wir den Beitrag

$$\frac{4}{m}\left(\frac{p}{a}\right)^{2m}$$

Für $n = m - 1$ erhalten wir das Glied

$$-\frac{2}{m}\left(\frac{p}{a}\right)^{2m}$$

von der verlangten Potenz und ebenso für $n = m + 1$ das Glied

$$-\frac{2}{m}\left(\frac{p}{a}\right)^{2m}$$

so daß sich alle Glieder von der Potenz $2m$ gegen einander fortheben. Da m hierbei mindestens gleich 3 sein muß, so bleiben noch Glieder von der 2. und 4. Potenz übrig, die sich nicht fortheben. Damit vereinfacht sich der Ausdruck für f zu

$$f = \frac{P}{16\,K\pi} p^2 \left\{\frac{(a^2-p^2)^3}{a^4 p^2} + \left(\frac{p}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 4\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}\right\}$$

$$= \frac{P}{16\,K\pi} p^2 \left\{\frac{a^4 - 3a^2p^2 + p^4}{a^2 p^2} + 4\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}\right\}$$

Die noch stehen gebliebene Summe konvergiert ziemlich schnell, so daß sie sich leicht annähernd berechnen läßt. Eine einfache Überlegung läßt aber auch den Grenzwert, dem sich die Reihe nähert, leicht angeben, nämlich

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{4}$$

Dies folgt sofort daraus, daß die vorhergehende Formel für f den Wert Null liefern muß, wenn man $p = a$ setzt. Damit erhält man schließlich die einfache Formel für den Biegungspfeil

$$f = \frac{P}{16 K \pi} \frac{(a^2 - p^2)^2}{a^2} \tag{21}$$

Setzt man den Wert für K aus Gl. (2) ein und nimmt endlich für die Konstante m den Wert 4 an, so geht die Formel über in

$$f = \frac{3(m^2-1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{P}{Eh^3} \cdot \frac{(a^2-p^2)^2}{a^2} = 0{,}246 \frac{P}{Eh^3} \frac{(a^2-p^2)^2}{a^2} \tag{22}$$

Für $p = 0$ geht dies in den längst bekannten Wert des Biegungspfeils für die zentrisch belastete Platte über, was zur Kontrolle der Rechnung dient.

Mehr als die Werte für den Biegungspfeil und für die Durchsenkungen ζ überhaupt kann man von der hier vorgetragenen Theorie nicht verlangen. Wollte man versuchen, aus ζ mit Hülfe der Gleichungen (7) und (8) die Spannungen zu berechnen, so würde man finden, daß sie an der belasteten Stelle unendlich groß ausfallen, wie dies schon in der Einleitung besprochen wurde.

Ich wende mich jetzt zur frei aufliegenden Platte, für die sich die vorige Rechnung mit geringen Änderungen wiederholen läßt. Bis zu Gl. (18) gilt die vorhergehende Entwicklung ohne Änderungen auch für die frei aufliegende Platte. Dagegen ist die sich daran schließende Randbedingung $\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$ jetzt durch die andere zu ersetzen, daß bei $r = a$ und für jedes beliebige φ die Spannung σ_r zu Null werden muß. Für jede der Funktionen R muß daher jetzt mit Rücksicht auf Gl. (7) die Bedingung erfüllt sein

$$\left(m\frac{d^2 R_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}R_n\right)_{r=a}=0$$

Die Ausrechnung der in den R vorkommenden Konstanten wird etwas, aber nicht viel umständlicher als im vorhergehenden Falle. Ich begnüge mich damit, hier die Schlußergebnisse der Rechnung mitzuteilen. Man erhält

$$R_0=\frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{3m+1-(m-1)\frac{p^2}{a^2}}{2(m+1)}\cdot\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{r^2+p^2}{a^2}\lg\frac{a}{r}\right\}$$

$$R_0'=\frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{3m+1-(m-1)\frac{r^2}{a^2}}{2(m+1)}\cdot\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)-\frac{r^2+p^2}{a^2}\lg\frac{a}{p}\right\}$$

$$R_1=\frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{m+1}{3m+1}\cdot\frac{rp}{a^2}\cdot\frac{r^2+p^2-a^2}{a^2}+\frac{m-1}{2(3m+1)}\cdot\frac{r^3p^3}{a^6}-\frac{p^3}{2a^2r}+\frac{2rp}{a^2}\lg\frac{a}{r}\right\}$$

$$R_1'=\frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{m+1}{3m+1}\cdot\frac{rp}{a^2}\cdot\frac{r^2+p^2-a^2}{a^2}+\frac{m-1}{2(3m+1)}\cdot\frac{r^3p^3}{a^6}-\frac{r^3}{2a^2p}+\frac{2rp}{a^2}\lg\frac{a}{p}\right\}$$

$$R_n=\frac{Pa^2}{8K\pi}\cdot\frac{1}{n(n-1)}\left\{\left(\frac{p}{r}\right)^n\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{n-1}{n+1}\frac{p^2}{a^2}\right)+\left(\frac{r}{a}\cdot\frac{p}{a}\right)^n\cdot\frac{(m+1)(n-1)\frac{p^2}{a^2}-(3m+1)n+(m+1)(n-1)\frac{r^2}{a^2}+(m-1)\frac{n(n-1)}{n+1}\frac{p^2r^2}{a^4}}{m(2n+1)+1}\right\}$$

$$R_n'=\frac{Pa^2}{8K\pi}\cdot\frac{1}{n(n-1)}\left\{\left(\frac{r}{p}\right)^n\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{n-1}{n+1}\frac{r^2}{a^2}\right)+\left(\frac{r}{a}\cdot\frac{p}{a}\right)^n\cdot\frac{(m+1)(n-1)\frac{p^2}{a^2}-(3m+1)n+(m+1)(n-1)\frac{r^2}{a^2}+(m-1)\frac{n(n-1)}{n+1}\frac{p^2r^2}{a^4}}{m(2n+1)+1}\right\}$$

Die wichtigste Anwendung, die man von diesen Formeln machen kann, besteht auch in diesem Falle in der Berechnung des Biegungspfeils f. Man hat dafür wieder

$$f = R_{0p} + R_{1p} + \ldots + R_{np} + \ldots$$

Ein geschlossener Ausdruck für den Biegungspfeil, wie bei der eingespannten Platte, läßt sich hier nicht aufstellen. Der Einfachheit wegen setze ich sofort $m = 4$ ein und erhalte

$$R_{0p} = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\left(1{,}3-0{,}3\frac{p^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)-2\frac{p^2}{a^2}\lg\frac{a}{p}\right\}$$

$$R_{1p} = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{10}{13}\left(\frac{p}{a}\right)^4-\frac{23}{26}\frac{p^2}{a^2}+\frac{3}{26}\left(\frac{p}{a}\right)^6+2\frac{p^2}{a^2}\lg\frac{a}{p}\right\}$$

$$R_{np} = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{2}{n(n^2-1)}\frac{p^2}{a^2}+\frac{3}{(n+1)(8n+5)}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n+4}+\right.$$
$$\left.+\frac{10}{n(8n+5)}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n+2}-\frac{13}{(n-1)(8n+5)}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n}\right\}$$

Damit wird, unter Benützung eines vorher schon gefundenen Ergebnisses,

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{1{,}3-1{,}985\left(\frac{p}{a}\right)^2+1{,}069\left(\frac{p}{a}\right)^4+0{,}115\left(\frac{p}{a}\right)^6+\right.$$
$$\left.+\Sigma\frac{1}{8n+5}\left[\frac{3}{n+1}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n+4}+\frac{10}{n}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n+2}-\frac{13}{n-1}\left(\frac{p}{a}\right)^{2n}\right]\right\}$$

Wenn p einen nicht zu großen Bruchteil von a ausmacht, konvergiert die Reihe schnell. Begnügt man sich damit, die Glieder bis zur sechsten Potenz auszurechnen, so erhält man

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{1{,}3-1{,}985\left(\frac{p}{a}\right)^2+0{,}450\left(\frac{p}{a}\right)^4+0{,}129\left(\frac{p}{a}\right)^6\right\} \quad (23)$$

womit man in praktisch vorliegenden Fällen wohl stets ausreichen wird. Für den Fall der zentrischen Belastung wird, wie der Vergleich von (23) mit (21) lehrt, der Biegungspfeil bei der frei aufliegenden Platte 2,6 mal so groß wie bei der eingespannten, was übrigens schon lange bekannt war.

Hiermit bin ich am Schlusse des ersten Teils meiner Abhandlung angelangt und ich komme zum zweiten Teil meiner Aufgabe, eine Formel aufzufinden, die für die Festigkeitsberechnung der kreisförmigen Platte geeignet erscheint. Wie ich dabei vorgehen werde, habe ich schon in der Einleitung dargelegt. Ich beginne damit, für ζ den Ausdruck

$$\zeta = R_0 + R_1 \cos\varphi + R_2 \cos 2\varphi \tag{24}$$

aufzustellen, der im Gegensatze zu Gl. (10) mit 3 Gliedern abschließt. Die drei Funktionen R wähle ich als algebraische Funktionen von möglichst niederem Grade, die mit denselben Koeffizienten für die ganze Platte Gültigkeit haben sollen. Die Koeffizienten werden zunächst nur den Grenzbedingungen am Rande und in der Plattenmitte angepaßt. Dabei setze ich voraus, daß die Platte am Rande frei aufliegt, weil man bei der Festigkeitsberechnung auf eine etwaige Einspannung der Sicherheit wegen in der Regel ohnehin keine Rücksicht nehmen wird. Die diesen Bedingungen genügenden Funktionen möglichst einfacher Zusammensetzung lauten

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= k_0 (r^3 - b_0 a r^2 + c_0 a^3) \\ R_1 &= k_1 (r^4 - b_1 a r^3 + c_1 a^3 r) \\ R_2 &= k_2 (r^4 - b_2 a r^3 + c_2 a^2 r^2) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

mit dem Vorbehalte, daß den mit b und c bezeichneten Koeffizienten erst noch die ihnen zukommenden Werte zu erteilen sind.

Für R_0 hat man zunächst die Grenzbedingung, daß in der Plattenmitte $\frac{d R_0}{d r}$ verschwinden muß. Dies ist nötig, damit sich ein Radius von der Richtung φ an den in die Verlängerung fallenden Radius von der Richtung $\varphi + \pi$ in der Mitte ohne Knick anschließen kann, wozu gehört, daß $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ für φ und für $\varphi + \pi$ gleich groß und von entgegengesetztem Vorzeichen ist. Hiernach darf R_0 kein Glied ersten Grads in r enthalten, was bei dem Ansatze schon berücksichtigt ist. Dann muß R_0 am Rande zu Null werden, woraus die Bestimmungsgleichung für die Konstanten

$$1 - b_0 + c_0 = 0$$

folgt. Endlich muß am Rande σ_r verschwinden. Nach den Gleichungen (7) führt dies zur Bedingung

$$\left(m \frac{d^2 R_0}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d R_0}{d r}\right)_{r=a} = 0$$

oder, wenn man R_0 einsetzt, auf die Gleichung

$$m(6a - 2ab_0) + (3a - 2ab_0) = 0$$

Hiernach hat man zu setzen

$$b_0 = \frac{3(2m+1)}{2(m+1)}; \qquad c_0 = \frac{4m+1}{2(m+1)} \tag{26}$$

während die Konstante k_0 von den Grenzbedingungen unabhängig ist und zur anderweitigen Bestimmung verfügbar bleibt.

Für R_1 und R_2 hat man in der Plattenmitte die Grenzbedingung, daß dort beide verschwinden müssen, damit ζ einen eindeutigen, von der Richtung φ unabhängigen Wert annimmt. Daher darf in beiden Ausdrücken kein von r unabhängiges Glied vorkommen, was bei dem gewählten Ansatze bereits berücksichtigt ist. Dann muß

$$\left(\frac{d R_2}{d r}\right)_{r=0} = 0$$

sein, wieder wie bei R_0 wegen des stetigen Anschlusses jedes Radius an den in die Verlängerung fallenden; R_2 darf daher kein Glied ersten Grads enthalten. Bei R_1 ist dies nicht nötig, weil sich in $R_1 \cos\varphi$ das Vorzeichen von selbst umkehrt, wenn man φ durch $\varphi + \pi$ ersetzt. Dagegen muß R_1 in der Mitte der Bedingung

$$\left(\frac{d^2 R_1}{d r^2}\right)_{r=0} = 0$$

genügen, damit sich die Krümmung am Anfang des einen Radius stetig an die des in die Verlängerung fallenden anschließen kann. In der Mitte muß also

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\right)_{\varphi,\, r=0} = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\right)_{\varphi+\pi,\, r=0}$$

sein und dies hat zur Folge, daß das mit $\cos\varphi$ behaftete Glied wegfallen muß, während das von φ freie Glied und das mit $\cos 2\varphi$ behaftete der Bedingung von selbst genügen. Hieraus folgt, daß in R_1 kein Glied zweiten Grads in r vorkommen darf, was auch schon durch den Ansatz erfüllt ist.

Am Rande müssen sowohl R_1 als R_2 verschwinden; ebenso auch die Anteile, die beide zu σ_r liefern. Man hat also für die b und c die Bestimmungsgleichungen

$$1 - b_1 + c_1 = 0$$
$$1 - b_2 + c_2 = 0$$
$$\left(m \frac{d^2 R_1}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d R_1}{d r} - \frac{1}{r^2} R_1\right)_{r=a} = 0$$
$$\left(m \frac{d^2 R_2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d R_2}{d r} - \frac{4}{r^2} R_2\right)_{r=a} = 0$$

Hieraus erhält man für die Konstanten

$$\left.\begin{array}{ll} b_1 = \dfrac{3(4m+1)}{2(3m+1)}; & c_1 = \dfrac{6m+1}{2(3m+1)} \\[2ex] b_2 = \dfrac{2(5m+1)}{4m+1}; & c_2 = \dfrac{6m+1}{4m+1} \end{array}\right| \qquad (27)$$

während k_1 und k_2 von den Grenzbedingungen, ebenso wie vorher k_0, unberührt bleiben.

Nun bilde ich den Ausdruck für die Formänderungsarbeit, die in der Platte aufgespeichert ist, wenn sie die durch ζ in Gl. (24) beschriebene Verbiegung erfahren hat. Die auf die Volumen-Einheit bezogene Formänderungsarbeit beim zweiachsigen Spannungszustand kann bekanntlich

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \frac{2}{m}\sigma_r\sigma_t + \frac{2(m+1)}{m}\tau_{rt}^2\right)$$

gesetzt werden, in der die σ_r u. s. f. die frühere Bedeutung haben. Setzt man ihre Werte aus den Gleichungen (7) und (8) ein, integriert hierauf über die Höhe, also von $z = -\frac{h}{2}$

bis $z = \frac{h}{2}$ und dann über die Fläche der Platte, so erhält man für die ganze in der Platte aufgespeicherte Arbeit

$$A = \frac{1}{2} K \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{m}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)\right)^2\right\}\right] \tag{28}$$

Nun kommt eine ziemlich umfangreiche Ausrechnung von A, die zwar an sich ganz einfach ist und bei der man nur darauf bedacht sein muß, gewöhnliche Rechenfehler zu vermeiden. Der besseren Kontrolle wegen schreibe ich die Ergebnisse so an, wie man sie stufenweise erhält. Zuerst hat man nach Einsetzen von ζ aus (24) und der R aus (25)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\right)^2 = k_0^2 (6r - 2b_0 a)^2 \cdot 2\pi + k_1^2 (12 r^2 - 6 b_1 a r)^2 \pi +$$
$$+ k_2^2 (12 r^2 - 6 b_2 a r + 2 c_2 a^2)^2 \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)^2 = k_0^2 (3r - 2b_0 a)^2 \cdot 2\pi + k_1^2 (3r^2 - 2b_1 a r)^2 \pi +$$
$$+ k_2^2 (b_2 a r - 2 c_2 a^2)^2 \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)\right)^2 = k_1^2 (3r^2 - 2b_1 a r)^2 \pi + 4 k_2^2 (3r^2 - 2b_2 a r + c_2 a^2)^2 \pi$$

Nun bilde ich den ersten, von m freien Teil des in A vorkommenden Integrals und bezeichne ihn mit J_1, nämlich

$$J_1 = \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)\right)^2 \right]$$

Durch Einsetzen der vorher schon festgestellten Werte geht dies über in

$$J_1 = k_0^2 \pi a^4 \left(\frac{45}{2} - 24\, b_0 + 8\, b_0^2\right) + k_1^2 \pi a^6 \left(\frac{57}{2} - 36\, b_1 + 12\, b_1^2\right) +$$
$$+ k_2^2 \pi a^6 \left(36 - 48\, b_2 + \frac{69}{4}\, b_2^2 + 24\, c_2 - 20\, b_2 c_2 + 8\, c_2^2\right)$$

In derselben Weise wird der zweite Bestandteil von A berechnet. Man hat zuerst

$$\int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2}\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\, \frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) =$$
$$= k_0^2 2\pi (6r - 2b_0 a)(3r - 2b_0 a) + k_1^2 \pi (12 r^2 - 6 b_1 a r)(3 r^2 - 2 b_1 a r) +$$
$$+ k_2^2 \pi (12 r^2 - 6 b_2 a r + 2 c_2 a^2)(b_2 a r - 2 c_2 a^2)$$

Bezeichnet man mit J_2 den Ausdruck

$$J_2 = \int\limits_0^a r\, d\,r \int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi \left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2}\, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\, \frac{\partial \zeta}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\, \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}\right)\right)^2\right\}$$

so erhält man jetzt nach Einsetzen der vorher schon festgestellten Integrale nach φ und durch Ausführung der Integration nach r

$$J_2 = k_0^2 \pi a^4 (9 - 12\, b_0 + 4\, b_0^2) + k_1^2 \pi a^6 \left(\frac{9}{2} - 6\, b_1 + 2\, b_1^2\right) +$$
$$+ k_2^2 \pi a^6 \left(- 6 + 12\, b_2 - \frac{11}{2}\, b_2^2 + 10\, b_2 c_2 - 12\, c_2 - 4\, c_2^2\right)$$

Im ganzen wird

$$A = \frac{1}{2} K \left(J_1 + \frac{2}{m} J_2\right)$$

Führt man darin die vorher ermittelten Werte von J_1 und J_2 ein, setzt auch aus den Gleichungen (26) und (27) die Werte der b und c ein, zieht zusammen und vereinfacht den Ausdruck, so erhält man schließlich

$$A = \frac{1}{2} K \left(k_0^2 \pi a^4\, \frac{9\,(5\,m + 1)}{2\,(m + 1)} + k_1^2 \pi a^6\, \frac{3\,(9\,m + 1)}{2\,(3\,m + 1)} +\right.$$
$$\left. + k_2^2 \pi a^6\, \frac{(9\,m + 1)(5\,m + 1)}{(4\,m + 1)^2}\right) \qquad (29)$$

Nachdem A berechnet ist, können wir die Koeffizienten k auf Grund des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten bestimmen. Denken wir uns nämlich mit der gebogenen Platte irgendeine unendlich kleine virtuelle Formänderung vorgenommen, bei der sich auch der Biegungspfeil f um einen kleinen Betrag δf ändern kann, so muß die auf diesem Wege von der Kraft P geleistete Arbeit gleich der durch die virtuelle Formänderung bedingten Änderung im Betrage der potentiellen Energie A sein, also

$$P\,\delta f = \delta A \tag{30}$$

Diese Gleichung muß für jede virtuelle Verschiebung gelten, die wir aus der Anfangslage heraus vornehmen können, wenn diese Anfangslage die zur Belastung P gehörige Gleichgewichtsfigur bilden soll. Jetzt haben wir freilich von der elastischen Fläche willkürlich vorausgesetzt, *daß sie mit hinreichender Genauigkeit* durch die Gleichungen (24) und (25) wiedergegeben werden könne. Dann müssen wir aber verlangen, daß Gl. (30) wenigstens für alle virtuellen Verschiebungen erfüllt bleibt, die mit den Gleichungen (24) und (25) noch verträglich sind und die dadurch hervorgebracht werden, daß man mit den Konstanten k kleine Änderungen vornimmt.

Nach Gl. (24) ist der Biegungspfeil f

$$f = R_{0\,p} + R_{1\,p} + R_{2\,p}$$

zu setzen, wofür man mit Rücksicht auf die Gleichungen (25) auch

$$\begin{aligned} f = k_0\,(p^3 - b_0\,a\,p^2 + c_0\,a^3) + k_1\,(p^4 - b_1\,a\,p^3 + c_1\,a^3\,p) + \\ + k_2\,(p^4 - b_2\,a\,p^3 + c_2\,a^2\,p^2) \end{aligned} \tag{31}$$

schreiben kann. Hierdurch und durch Gl. (29) sind f und A als Funktionen der bisher als Konstanten betrachteten Größen k dargestellt, so daß neben ihnen in diesen Gleichungen nur noch gegebene konstante Koeffizienten vorkommen. Eine Veränderungsmöglichkeit von f und A ist nur durch die Variation der k gegeben, so lange wir an der hier zu Grunde gelegten Voraussetzung festhalten, daß es jedenfalls genügt, die elastische Fläche durch die Gleichungen (24) und (25) mit dem Vorbehalte einer passenden Wahl der k darzustellen. Für die Variationen von f und A in Gl. (30) hat man daher

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial k_0}\delta k_0 + \frac{\partial f}{\partial k_1}\delta k_1 + \frac{\partial f}{\partial k_2}\delta k_2$$

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial k_0}\delta k_0 + \frac{\partial A}{\partial k_1}\delta k_1 + \frac{\partial A}{\partial k_2}\delta k_2$$

zu setzen, in denen die δk willkürlich gewählt werden können. Gl. (30) zerfällt daher in die folgenden drei Gleichungen

$$P\frac{\partial f}{\partial k_0} = \frac{\partial A}{\partial k_0}; \quad P\frac{\partial f}{\partial k_1} = \frac{\partial A}{\partial k_1}; \quad P\frac{\partial f}{\partial k_2} = \frac{\partial A}{\partial k_2}$$

die nun ohne weiteres zur Ermittelung der k führen. Setzt man die Werte aus den Gleichungen (29) und (31) ein, so lauten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
P(p^3 - b_0\, a\, p^2 + c_0\, a^3) &= k_0 \cdot K\pi a^4 \frac{9(5m+1)}{2(m+1)} \\
P(p^4 - b_1\, a\, p^3 + c_1\, a^3\, p) &= k_1 \cdot K\pi a^6 \frac{3(9m+1)}{2(3m+1)} \\
P(p^4 - b_2\, a\, p^3 + c_2\, a^2\, p^2) &= k_2 \cdot K\pi a^6 \frac{(9m+1)(5m+1)}{(4m+1)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Hiermit haben wir die gewünschte Näherungslösung für die elastische Fläche gefunden und es bleibt nur noch übrig, die Folgerungen abzuleiten, die man daraus gewinnen kann. Zu diesem Zwecke soll zunächst die in Gl. (31) bereits aufgestellte Formel für den Biegungspfeil weiter ausgerechnet werden, obschon dafür bereits ein besser begründeter und voraussichtlich mit der Wirklichkeit genauer übereinstimmender Ausdruck aus der strengen Lösung für die Differentialgleichung der Platte in Gl. (23) aufgestellt worden ist. Die nochmalige Berechnung hat nur den Zweck, einen Vergleich zu ermöglichen, wie weit sich die Näherungslösung von der genauen Lösung entfernt, wenn es sich um die Berechnung der Durchbiegungen handelt. Durch Einsetzen der Werte der k aus den Gleichungen (32) in Gleichung (31) erhält man nach einfacher Umformung

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{\frac{16(m+1)}{9(5m+1)}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^3 - b_0\left(\frac{p}{a}\right)^2 + c_0\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{16(3m+1)}{3(9m+1)}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^4 - b_1\left(\frac{p}{a}\right)^3 + c_1\frac{p}{a}\right)^2 + \frac{8(4m+1)^2}{(9m+1)(5m+1)}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^4 - b_2\left(\frac{p}{a}\right)^3 + c_2\left(\frac{p}{a}\right)^2\right)^2\right\}$$

Zur weiteren Ausrechnung setzen wir $m = 4$, lösen die Klammern auf und ordnen nach Potenzen von p; dann erhalten wir

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi}\left\{1{,}22 - 2{,}15\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1{,}44\left(\frac{p}{a}\right)^3 + 2{,}45\left(\frac{p}{a}\right)^4 - 20{,}30\left(\frac{p}{a}\right)^5 + \right.$$

$$\left. + 34{,}74\left(\frac{p}{a}\right)^6 - 22{,}05\left(\frac{p}{a}\right)^7 + 4{,}85\left(\frac{p}{a}\right)^8\right\} \qquad (33)$$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung kann hierbei die Bedingung dienen, daß f für $p = a$ zu Null werden muß; die Summe der positiven Koeffizienten in der Klammer sollte daher gleich der Summe der negativen sein. Ungefähr stimmt dies auch, so daß wenigstens ein gröberer Fehler bei der Ausrechnung kaum vorgekommen sein kann.

Für Lasten, die nicht zu nahe beim Umfang der Platte angreifen, wird f nach der genaueren Theorie durch Gl. (23) angegeben. Der Vergleich lehrt, daß Gl. (33) für kleine Werte von p den Biegungspfeil etwas zu klein liefert. Für $p = 0$ macht der Fehler nahezu 7 Prozent des Wertes aus. Für größere Werte von p ist die Übereinstimmung besser. Jedenfalls sieht man aber, daß der für ζ gewählte dreikonstantige Ausdruck die Durchbiegung der ungefähren Größe nach richtig angibt; durch Wahl eines vierkonstantigen Ausdrucks ließe sich eine viel bessere Übereinstimmung erzielen, auf die es aber jetzt nicht ankommt. Die eigentliche Bedeutung der „Näherungslösung" erblicke ich nur in der Aufstellung einer Formel für die größte vorkommende Spannung.

Hierbei darf von vornherein angenommen werden, daß die größte Beanspruchung der Platte an der belasteten Stelle eintritt. Ferner folgt aus den Symmetrieeigenschaften, daß an dieser Stelle die Spannungen σ_r und σ_t Hauptspannungen sind;

es genügt daher, diese beiden zu berechnen. Um anzudeuten, daß es sich um die Spannungen an der belasteten Stelle handelt, füge ich den Zeiger p unten bei; dabei wird $z = \pm \frac{h}{2}$ angenommen, um die größte vorkommende Spannung zu erhalten.

Nach den Gleichungen (7) hat man

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rp} &= \mp \frac{mEh}{2(m^2-1)}\left(m\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi_2}\right)_{r=p,\,\varphi=0} \\ \sigma_{tp} &= \mp \frac{mEh}{2(m^2-1)}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{m}{p}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{m}{p^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right)_{r=p,\,\varphi=0} \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Setzt man in diesen Gleichungen ζ aus Gl. (24), hierauf die R aus den Gleichungen (25) und die mit b und c bezeichneten Konstanten aus den Gleichungen (26) und (27) ein, so erhält man für σ_{rp} zunächst

$$\sigma_{rp} = \mp \frac{mEh}{2(m^2-1)}\Big\{k_0\, 3\,(2m+1)\,(p-a) + k_1\, 3\,(4m+1)\,p\,(p-a) + \\ + k_2\left(12mp^2 - \frac{2(6m-1)(5m+1)}{4m+1}ap + \frac{2(m-1)(6m+1)}{4m+1}a^2\right)\Big\}$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich auch in dem mit k_2 behafteten Gliede der Faktor $(p-a)$ herausheben läßt; dadurch erhält man

$$\sigma_{rp} = \pm (a-p)\frac{mEh}{2(m^2-1)}\Big\{3\,(2\,m+1)\,k_0 + 3\,(4\,m+1)\,k_1\,p + \\ + k_2\left(12\,mp - \frac{2\,(m-1)(6\,m+1)}{4\,m+1}\,a\right)\Big\}$$

Nun sind noch die Koeffizienten k aus den Gleichungen (32) einzuführen. Setzt man darin $m = 4$, so hat man für sie

$$k_0 = \frac{10}{189}\frac{P}{aK\pi}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^3 - b_0\left(\frac{p}{a}\right)^2 + c_0\right)$$

$$k_1 = \frac{26}{111}\frac{P}{a^2K\pi}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^4 - b_1\left(\frac{p}{a}\right)^3 + c_1\frac{p}{a}\right)$$

$$k_2 = \frac{289}{777}\frac{P}{a^2K\pi}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^4 - b_2\left(\frac{p}{a}\right)^3 + c_2\left(\frac{p}{a}\right)^2\right)$$

Für K ist ferner der Wert aus Gl. (2) einzusetzen und außerdem hat man mit $m = 4$ für die Koeffizienten b und c

$$b_0 = \frac{27}{10}; \; c_0 = \frac{17}{10}; \; b_1 = \frac{51}{26}; \; c_1 = \frac{25}{26}; \; b_2 = \frac{42}{17}; \; c_2 = \frac{25}{17}$$

Hiermit geht der Ausdruck für σ_{rp}, wenn man weiterhin das doppelte Vorzeichen wegläßt, über in

$$\sigma_{rp} = \frac{3P}{\pi h^2} \cdot \frac{a-p}{a} \left\{ 1{,}21 + 1{,}40 \left(\frac{p}{a}\right)^2 + 17{,}90 \left(\frac{p}{a}\right)^3 - 35{,}41 \left(\frac{p}{a}\right)^4 + 14{,}90 \left(\frac{p}{a}\right)^5 \right\},$$

wofür man nach Ausmultiplizieren mit dem Faktor $a - p$ vor der Klammer auch

$$\sigma_{rp} = \frac{3P}{\pi h^2} \left\{ 1{,}21 - 1{,}21 \frac{p}{a} + 1{,}40 \left(\frac{p}{a}\right)^2 + 16{,}50 \left(\frac{p}{a}\right)^3 - 53{,}31 \left(\frac{p}{a}\right)^4 + \right.$$
$$\left. + 50{,}31 \left(\frac{p}{a}\right)^5 - 14{,}90 \left(\frac{p}{a}\right)^6 \right\} \tag{35}$$

schreiben kann. Nach einer zuerst von Bach vorgeschlagenen Abschätzung der Spannungen setzt man für die zentrisch belastete Platte gewöhnlich

$$\sigma_{rp} = \frac{3P}{\pi h^2}$$

wobei jedoch auf Grund der Ableitung dieser Formel von vornherein bekannt ist, daß sie jedenfalls etwas zu niedrige Werte liefern muß. Nach Gl. (35) ist diesem ersten Näherungswerte der Faktor 1,21 beizufügen, wenn die Platte in der Mitte belastet ist. Wenn p wächst, wird σ_{rp} kleiner. Führt man die Zahlenrechnung durch für $p = 0{,}3\,a$ und für $p = 0{,}6\,a$, so erhält man, wenn jetzt der Abstand p durch einen Zeiger ausgedrückt wird, für σ_{rp}

$$\sigma_0 = 1{,}21 \frac{3P}{\pi h^2}; \; \sigma_{0,3} = 1{,}10 \frac{3P}{\pi h^2}; \; \sigma_{0,6} = 0{,}86 \frac{3P}{\pi h^2}; \; \sigma_{1,0} = 0.$$

Um gleiche Biegungsspannungen σ_{rp} hervorzubringen, müssen sich daher Lasten in Abständen von $0{,}6\,a$ und $0{,}3\,a$ zu einer in der Mitte angreifenden Last erhalten wie 1,4 : 1,1 : 1,0.

Endlich habe ich in derselben Weise auch noch die Spannungen σ_{tp} auf Grund der zweiten der Gleichungen (34) berechnet. Ich begnüge mich damit, das Schlußergebnis dieser Rechnung mitzuteilen; es lautet:

$$\sigma_{tp} = \frac{3\,P}{\pi\,h^2}\left\{1{,}21 - 0{,}81\frac{p}{a} + 3{,}58\left(\frac{p}{a}\right)^2 - 3{,}40\left(\frac{p}{a}\right)^3 - \right.$$

$$\left. - 10{,}70\left(\frac{p}{a}\right)^4 + 15{,}16\left(\frac{p}{a}\right)^5 - 5{,}04\left(\frac{p}{a}\right)^6\right\} \qquad (36)$$

Der Vergleich mit Gl. (35) zeigt, daß für $p = 0$ die beiden Hauptspannungen σ_{rp} und σ_{tp} einander gleich sind, was von vornherein zu erwarten war. Für einen kleinen Abstand p wird σ_{tp} etwas größer als σ_{rp}. Für die Abstände $p = 0{,}3\,a$ und $p = 0{,}6\,a$ erhält man für σ_{tp}

$$1{,}14\,\frac{3\,P}{\pi\,h^2} \quad \text{und} \quad 0{,}84\cdot\frac{3\,P}{\pi\,h^2}$$

Im größeren Abstande von $0{,}6\,a$ erhält man daher σ_{tp} etwas kleiner als σ_{rp}. Die Unterschiede zwischen beiden Hauptspannungen sind aber in allen Fällen unbedeutend.

Beide Hauptspannungen haben übrigens auch gleiches Spannungsvorzeichen. Wenn man von der Annahme ausgeht, daß die Bruchgefahr von der größten Dehnung abhänge, also durch die sogenannte „reduzierte“ Spannung gemessen werde, findet man diese kleiner als jede der beiden Hauptspannungen, nämlich ungefähr gleich drei Vierteln von einer von ihnen. Nach der von Mohr vertretenen Ansicht, die sich in den meisten Fällen besser mit den Erfahrungsergebnissen deckt, kommt es aber bei einem ebenen Spannungszustande mit zwei Hauptspannungen von gleichem Vorzeichen nur auf die größte der beiden Hauptspannungen an, ohne Rücksicht auf den Wert der anderen. Ich möchte daher empfehlen, den größeren der beiden aus den Gleichungen (35) und (36) erhaltenen Werte unmittelbar als Maß für die Beanspruchung des Materials zu benutzen.

Die hier abgeleiteten Formeln für die Biegungsspannungen sind, wie ich nochmals betonen möchte, die einfachsten, die sich für die exzentrisch belastete Platte aufstellen lassen. Ich nehme an, daß man mit ihnen ausreichen wird, d. h. daß sie genügend genau mit der Wirklichkeit übereinstimmen werden. Sollte jedoch die Erfahrung späterhin lehren, daß sie sich nicht hinreichend bewähren, so würde man daran denken müssen, den hier gewählten dreikonstantigen Ausdruck für ζ durch einen vierkonstantigen zu ersetzen. Das wäre noch in verschiedener Art möglich: man könnte nämlich entweder ein Glied $R_3 \cos 3\varphi$ beifügen oder man könnte auch unter Beibehaltung von Gl. (24) für ζ das Glied R_0 vom vierten anstatt vom dritten Grade annehmen, womit ebenfalls eine weitere, von den Grenzbedingungen unabhängige Konstante gewonnen würde. Das letztere Vorgehen würde ich für das zweckmäßigere halten; ich habe es in der Tat auch selbst schon in Angriff genommen und mich davon überzeugt, daß man hiermit zu einem sehr engen Anschlusse der Näherungslösung an die strenge Lösung der Differentialgleichung gelangt. Aus den schon in der Einleitung besprochenen Gründen sehe ich aber davon ab, jetzt weiter darauf einzugehen.

München, im April 1912.