

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1911. Heft I

Januar- bis März-sitzung

---

München 1911

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



# Über die Struktur der $\gamma$ -Strahlen.

Von A. Sommerfeld.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Januar 1911.

## § I. Einleitung, die Schweidlerschen Schwankungen.

Kürzlich hat Egon von Schweidler<sup>1)</sup> vorgeschlagen, die von ihm entdeckte bedeutsame Methode der Schwankungsmessungen zu verwenden, um Aufschluß über die Natur der  $\gamma$ -Strahlen des Radiums zu erhalten. Die eigentliche Frage würde lauten: Corpuskularstrahlung (vom Charakter der  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Strahlen) oder Wellenstrahlung (vom Charakter der Röntgenstrahlen)? Wenn auch viele Tatsachen für die letztere Auffassung sprechen, so findet doch auch die erstere Annahme ihre Vertreter (Bragg). Nun ist klar und bereits in der ursprünglichen Publikation von Schweidler hervorgehoben, daß die Schwankungsmessungen nicht direkt die Frage: Corpuskular- oder Wellenstrahlung entscheiden, sondern bei Benutzung von Blenden verschiedenen Öffnungswinkels vielmehr nur einen Beitrag zu der Frage liefern können: Einseitig konzentrierte oder allseitig sich ausbreitende Strahlung? Offenbar gehört die Corpuskularstrahlung zu der ersteren Gattung; auch eine Strahlung von der hypothetischen Struktur der Lichtquanten würde man, trotz der großen Unbestimmtheit der ganzen Vorstellung, jedenfalls der ersteren Gattung zurechnen müssen. Gehört nun im Gegensatz dazu eine Strahlung vom Röntgenstrahlcharakter zur zweiten Gattung? Von Schweidler ist geneigt, dies der Hauptsache nach zu bejahen, indem er die Verhältnisse bei der Emission gewöhnlicher Röntgenstrahlen direkt auf die  $\gamma$ -Strahlen überträgt. Für den polarisierten An-

<sup>1)</sup> Physikal. Zeitschr. 11, 225, 1910.

teil der gewöhnlichen Röntgenstrahlen ergibt sich auf Grund der üblichen Vorstellungen (quasistationäre geradlinige Bremsung des Kathodenstrahl-Elektrons) folgendes:<sup>1)</sup> In der Richtung des ankommenden Kathodenstrahls und in der entgegengesetzten Richtung wird überhaupt keine Energie emittiert; bei kleiner Kathodenstrahlgeschwindigkeit liegt das Maximum der Emission merklich senkrecht gegen den Kathodenstrahl, eilt aber im Sinne des Kathodenstrahls vor bei größeren Geschwindigkeiten; legt man um die Bremsstelle des Kathodenstrahls eine Kugel und teilt diese durch eine Ebene senkrecht zum Kathodenstrahl in zwei Halbkugeln, so geht durch die Halbkugel, die die Verlängerung des Kathodenstrahls enthält, im ganzen mehr Energie, wie durch die Halbkugel, welche den ankommenden Kathodenstrahl umschließt; das Verhältnis der beiden Gesamtintensitäten beträgt z. B. 1.9 bei  $\beta = \frac{1}{3}$  ( $\beta =$  Kathodenstrahlgeschwindigkeit : Lichtgeschwindigkeit) und wächst beträchtlich bei noch größeren Werten von  $\beta$ . Diese theoretischen Ergebnisse waren mit den Beobachtungen von Baßler etc. im Einklang. Von Schweidler benützt nun meine Werte für  $\beta = \frac{1}{3}$ , um daraus den Einfluß der Unsymmetrie der Emission auf die Schwankungserscheinungen abzuschätzen und kommt zu dem Ergebnis, daß dieser Einfluß klein sei.

Die Schwankungen der  $\gamma$ -Strahlen sind inzwischen von Edgar Meier<sup>2)</sup> experimentell studiert worden. Da er weiteres Material verspricht, soll hier auf die Deutung seiner Versuche nicht eingegangen werden. Meier bezeichnet, um jede spezielle Hypothese zu vermeiden und nur das Vorhandensein einer Vorzugsrichtung in der Emission resp. deren Abwesenheit zum Ausdruck zu bringen, eine einseitig konzentrierte Strahlung als anisotrop, eine allseitig sich ausbreitende als isotrop. In der zitierten Arbeit zieht er aus seinen Schwankungsmessungen den vorläufigen Schluß, daß die  $\gamma$ -Strahlen ausgesprochen anisotrop sind. Zugleich betont er, daß mit diesem Befund nicht nur die corpuskulare und Lichtquanten-Vorstellung sondern

<sup>1)</sup> A. Sommerfeld, Physikal. Zeitschr. 10, 969, 1909.

<sup>2)</sup> Sitzungsber. der Berliner Akademie 32, 647, 1910.

auch die Vorstellung vom Röntgencharakter der  $\gamma$ -Strahlen verträglich sei, falls man bei letzterer, nicht wie es von Schweidler tut, an Röntgenstrahlen von mittlerer Härte ( $\beta < \frac{1}{3}$ ) denkt, sondern entsprechend den wirklichen Verhältnissen bei der Emission der  $\gamma$ -Strahlen viel durchdringendere Röntgenstrahlen zum Vergleich heranzieht.

Im folgenden möchte ich die Richtigkeit der letzten Bemerkung quantitativ erhärten. Dabei wird sich ein recht seltsames Bild von der Struktur eines  $\gamma$ -Strahls ergeben, ein Bild, das die äußerste Konsequenz der von mir vertretenen Auffassung von der Struktur der Röntgenstrahlen bildet. Wie üblich, fassen wir den  $\gamma$ -Strahl als den die Aussendung des  $\beta$ -Strahls begleitenden Röntgenimpuls auf. Dieser berechnet sich ganz ebenso wie der umgekehrte Vorgang, die Bremsung eines Kathodenstrahls, der zu den gewöhnlichen Röntgenimpulsen Anlaß gibt. Selbstverständlich muß die Energie des  $\gamma$ -Strahls um die Richtung des zugehörigen  $\beta$ -Strahls rings symmetrisch angeordnet sein und es muß in der Richtung des  $\beta$ -Strahls selbst die Intensität des  $\gamma$ -Strahls Null sein. Rechnen wir nun mit einer Anfangsgeschwindigkeit des  $\beta$ -Strahls von nahezu Lichtgeschwindigkeit ( $\beta = \frac{9}{10}$  oder  $\frac{99}{100}$ ), so finden wir die maximale Intensität des  $\gamma$ -Strahls bereits in einer Richtung, die nur um wenige Grad ( $15^\circ$  resp.  $5^\circ$ ) von derjenigen des  $\beta$ -Strahls abweicht, oder räumlich gesprochen, auf einem Kegel, der die Richtung des  $\beta$ -Strahls mit enger Öffnung umgibt. Von diesem Vorzugskegel der  $\gamma$ -Strahlemission nimmt die Emissionsstärke sowohl nach innen (zum  $\beta$ -Strahl hin) wie nach außen schnell ab, so daß fast die ganze Intensität auf einen diesen Vorzugskegel umschließenden, mehr oder minder engen Hohlkegel beschränkt ist. Überdies ist die  $\gamma$ -Strahlenergie zwischen zwei Kugelflächen eingeschlossen, die sich beide mit Lichtgeschwindigkeit erweitern. Die äußere derselben geht von dem Momente und dem Ort der beginnenden Beschleunigung des  $\beta$ -Teilchens aus, die innere läuft von dem Punkte und zu der Zeit aus, wo die Beschleunigung des  $\beta$ -Teilchens beendet ist. Die beiden Kugeln sind nicht genau

konzentrisch, ihr Abstand, die „Impulsbreite der  $\gamma$ -Strahlung“, variiert daher in den verschiedenen Richtungen, woraus man auf eine Verschiedenheit der Härte nach den verschiedenen Richtungen zu schließen hat. Die  $\gamma$ -Strahlenergie findet sich hiernach lokalisiert auf den zwischen diesen Kugelflächen und den beiden Mänteln jenes Hohlkegels enthaltenen Raum, also auf ein ringförmiges Gebiet um die  $\beta$ -Strahlrichtung. Während sich der äußere und innere Durchmesser des Ringes proportional mit der Zeit erweitern, bleibt die Ringdicke in der Strahlrichtung zeitlich konstant. Auf der Symmetrieachse des Ringes befindet sich das zugehörige  $\beta$ -Teilchen mit seiner elektromagnetischen Atmosphäre. Dieses schreitet geradlinig mit geringerer als Lichtgeschwindigkeit fort und verliert überdies allmählich durch äußere Störungen an Geschwindigkeit. Der umgebende Ring von  $\gamma$ -Strahlenergie dagegen eilt mit Lichtgeschwindigkeit radial voran und sondert sich daher allmählich mehr und mehr von dem Felde des mit ihm zugleich erzeugten  $\beta$ -Strahls. Für die Struktur der eigentlichen  $\beta$ -Strahlung ist offenbar die Anfangsgeschwindigkeit des  $\beta$ -Teilchens maßgebend, nicht die durch Störungen herabgeminderte und zerstreute Endgeschwindigkeit, die durch die Ablenkungsbeobachtungen ermittelt wird. Bei diesen Störungen werden  $\gamma$ -Impulse geringerer Härte entstehen; die eigentliche  $\gamma$ -Strahlung des Aussendens aber konserviert in ihrer Struktur die anfänglichen und für jede Gruppe von  $\beta$ -Strahlen verschiedenen Höchstgeschwindigkeiten.

Eine  $\gamma$ -Strahlung der hier beschriebenen Struktur hat, im groben betrachtet, durchaus den Charakter eines Projektils und unterscheidet sich in ihrer Energielokalisation nicht mehr merklich von einer Corpuskularstrahlung oder von dem hypothetischen Lichtquant. Es ist sehr merkwürdig, daß man vom Boden der Maxwellschen, also der reinen Undulationstheorie aus unter Umständen zu Konsequenzen geführt wird, die der Newtonschen Emissionstheorie sich nähern, und die äußerlich betrachtet viel mehr Ähnlichkeit haben mit den Newtonschen Lichtprojektilen als mit der Huyghensschen Kugelwelle. Und

doch sind es dieselben theoretischen Grundlagen der Feldfortpflanzung, die im einen Fall zu der allseitigen Kugelwelle, im anderen Fall zu der einseitigen Energieemission im  $\gamma$ -Strahl führen; beide Fälle unterscheiden sich nur durch die Art der Anregung, das eine Mal die verhältnismäßig langsamen, unregelmäßigen und durchschnittlich nach allen Richtungen gleichen Schwingungen eines Elektronenhaufens in der Quelle der Kugelwelle, das andere Mal die einseitige Beschleunigung eines individuellen Elektrons bis hart an die kritische Grenze der Lichtgeschwindigkeit heran. Da die Radiumquelle im Laufe der Zeit  $\beta$ -Strahlen nach allen Richtungen aussendet, wird natürlich auch die  $\gamma$ -Strahlenergie durchschnittlich nach allen Richtungen in gleicher Stärke gelangen. Die Schwankungsmessungen sollen dazu dienen, darüber hinaus die Energieverteilung in den Einzelvorgängen zu bestimmen.

Es soll schon hier betont werden (Näheres in § 6), daß die außerordentlich hohen Anfangsgeschwindigkeiten, mit denen wir hier rechnen werden, ihrem Zahlenwerte nach ziemlich hypothetisch sind, wenn auch vieles für die hier angenommene Größenordnung spricht. Die auf die Schwankungserscheinungen sich beziehenden Ergebnisse dieser Note würden also erst dann volle Realität erhalten, wenn bei Radium (Ra C) das ursprüngliche Auftreten von  $\beta$ -Strahlen äußerster Durchdringungsfähigkeit und ausreichender Intensität nachgewiesen würde. Der Wunsch, die Deutung der Schwankungsmessungen von dieser Seite aus theoretisch vorzubereiten, veranlaßte mich in erster Linie, meine Ergebnisse schon jetzt mitzuteilen. Daneben bestimmte mich das Interesse an dem theoretischen Bilde, zu dem unsere Auffassung führt, sowie die Meinung, daß gewisse spezielle Ergebnisse über das Verhältnis der  $\gamma$ -Strahl- zur  $\beta$ -Strahlenergie (§ 4) und über die Härte der  $\gamma$ -Strahlen (§ 5) für die experimentelle radioaktive Forschung fruchtbar werden könnten. Von großer Tragweite dürfte, wenn er sich in seinen experimentellen Folgerungen bestätigen sollte, der in § 4 vermutete Zusammenhang zwischen dem Planckschen Wirkungsquantum und der Theorie der Röntgenstrahlen werden.

## § 2. Berechnung der Energieverteilung im $\gamma$ -Strahl.

Wir nehmen an, daß das  $\beta$ -Teilchen, Ladung  $e$ , im Felde des Radiummoleküls von der Geschwindigkeit 0 geradlinig und gleichförmig<sup>1)</sup> auf eine Geschwindigkeit  $v = \beta c$  beschleunigt werde, die wenig unter  $c$  liegt, derart, daß

$$(1) \quad \gamma = 1 - \beta \ll 1$$

ist. Die während der Beschleunigungsperiode zunehmende Geschwindigkeit sei  $v' = \beta' c$ ,  $\dot{v}$  sei die konstante Beschleunigung und  $t'$  der zu  $v'$  gehörige Zeitpunkt. Dann wird im Zeitpunkte  $t'$  pro Zeiteinheit unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Bewegungsrichtung eine Energiemenge emittiert, die wir im Abstände  $r$  von der Emissionsstelle durch den auf die Flächeneinheit bezogenen Poyntingschen Energiefluß  $\mathfrak{S}'$  messen:

$$(2) \quad \mathfrak{S}' = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16 \pi^2 c^3 r^2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \beta' \cos \varphi)^6}.$$

Diese Gleichung, auf der alles Folgende beruht, ist zuerst von Abraham<sup>2)</sup> bewiesen. Wir werden ihre Ableitung in § 7 durch die Methoden der Relativitätstheorie erheblich vereinfachen. Die uns wesentlich interessierende Abhängigkeit von dem Azimut  $\varphi$  machen wir uns folgendermaßen klar: Der Zähler  $\sin^2 \varphi$  entspricht dem Umstande, daß die Ausstrahlung eine transversale ist, daß also in der Beschleunigungsrichtung ( $\varphi=0$ ) die Emission Null ist; das Maximum des Zählers liegt senkrecht zur Beschleunigungsrichtung. Der Nenner  $(1 - \beta' \cos \varphi)^6$  liefert die Unsymmetrie wegen der vorhandenen Geschwindigkeit  $v'$ , die während des Zeitintervalles  $dt'$  um  $\dot{v} dt'$  erhöht

<sup>1)</sup> In diesem Paragraph setze ich Gleichförmigkeit der Beschleunigung vom Standpunkte eines etwa auf dem Radiummolekül ruhenden Beobachters voraus. Im nächsten Paragraph werde ich die Änderungen angeben, die vorzunehmen sind, wenn wir die Gleichförmigkeit im Sinne der Relativitätstheorie durch einen mit dem  $\beta$ -Teilchen mitbewegten Beobachter beurteilen lassen.

<sup>2)</sup> Theorie der Elektrizität II, Gleichungen (74), (75), (76 a); ein oben hinzugefügter Faktor  $4\pi$  liegt an der Wahl des Maßsystems für  $e$ .

wird. Betrachten wir diesen Teil des Beschleunigungsvorganges gesondert, so haben wir uns für einen Zeitpunkt  $t > t'$  um die Lage des Elektrons  $O'$  zur Zeit  $t'$  eine Kugel vom Radius  $c(t-t')$  und um seine Lage  $O''$  zur Zeit  $t' + dt'$  eine solche vom Radius  $c(t-t'-dt')$  zu schlagen. Außerhalb der ersteren herrscht das Feld der ursprünglichen Geschwindigkeit  $v'$ , inner-

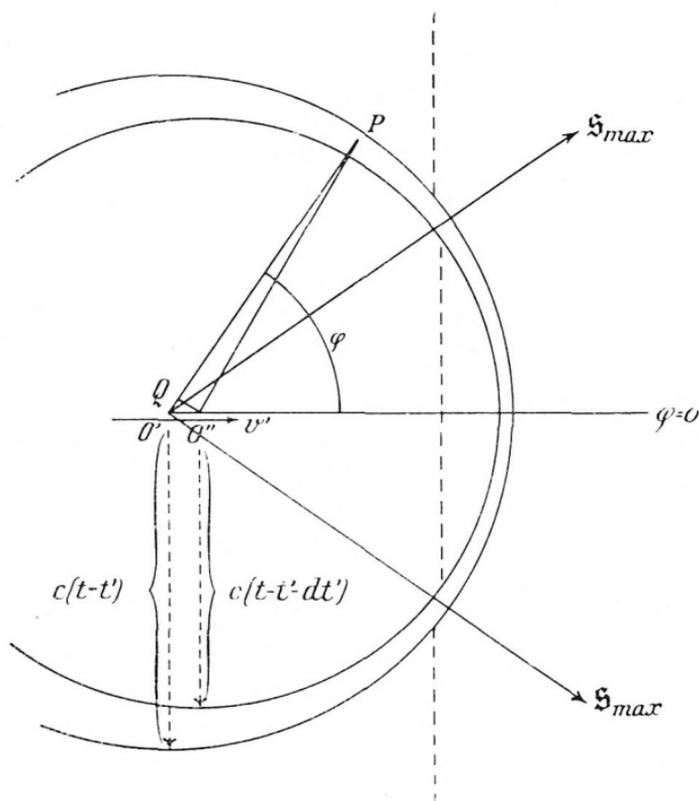


Fig. 1.

halb der letzteren dasjenige der erhöhten Geschwindigkeit  $v' + v' dt'$ . Beide Felder laufen mit der zugehörigen Geschwindigkeit fort und sind um so mehr um eine gewisse Mittelebene herum konzentriert, je näher die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit kommt. Die genannte Mittelebene des Feldes geht durch diejenige Lage des Elektrons hindurch, die dasselbe

bei ungestörter Bewegung zur Zeit  $t$  einnehmen würde. Die Figur ist für  $\beta' = \frac{3}{4}$  gezeichnet. An der Stelle größter Konzentration der Felder ist auch die Stärke des Röntgenimpulses am größten. Man sieht daher, daß bei  $\beta' = \frac{3}{4}$  das Maximum schon recht unsymmetrisch liegt. Diese Unsymmetrie wird in unsrer Formel (2) durch den Nenner bedingt, dessen kleinster Wert bei  $\varphi = 0$  liegt.

Der Energiefluß während der ganzen Beschleunigungszeit wird durch Integration nach der Zeit, aber nicht der Abgangszeit  $t'$ , sondern der Ankunftszeit  $t$ , gewonnen:

$$\mathfrak{E} = \int \mathfrak{E}' dt.$$

Zwischen  $dt$  und  $dt'$  besteht die bekannte Beziehung:

$$(3) \quad dt = (1 - \beta' \cos \varphi) dt'.$$

Es ist nämlich (vgl. Figur 1) der Unterschied der Lichtwege  $O'P$  und  $O''P$  nach einem beliebigen Aufpunkte  $P$  der Wellenzone einerseits gleich

$$c(t - t') - c(t + dt - t' - dt') = c(dt' - dt),$$

andererseits gleich

$$OQ = \cos \varphi O'O'' = \cos \varphi \beta' c dt',$$

woraus (3) durch Vergleichung folgt. Mithin wird

$$(3a) \quad \mathfrak{E} = \frac{e^2 v^2}{16 \pi^2 c^3 r^2} \int \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5} dt',$$

das Integral über die Abgangszeit erstreckt, oder, da  $c d\beta' = v dt'$ , auch

$$(3b) \quad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{e^2 v \sin^2 \varphi}{16 \pi^2 c^2 r^2} \int_0^{\beta} \frac{d\beta'}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5} \\ &= \frac{e^2 v}{64 \pi^2 c^2 r^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{(1 - \beta \cos \varphi)^4} - 1 \right). \end{aligned}$$

Eben diese Gleichung habe ich früher (l. c.) der Untersuchung des polarisierten Anteils der Röntgenstrahlung zu

Grunde gelegt. Wie dort werden wir von dem konstanten Faktor absehen und einfacher schreiben können:

$$(4) \quad \mathfrak{S} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{(1 - \beta \cos \varphi)^4} - 1 \right).$$

Für kleine Werte von  $\varphi$ , wenn zugleich die in (1) eingeführte Größe  $\gamma = 1 - \beta$  klein ist, ergibt sich die Näherungsformel:

$$\mathfrak{S} = \frac{\varphi^2}{\left( \gamma + \frac{\varphi^2}{2} \right)^4},$$

bei der z. B.  $\gamma \frac{\varphi^2}{2}$  gegen  $\gamma + \frac{\varphi^2}{2}$  und  $-1$  gegen  $\left( \gamma + \frac{\varphi^2}{2} \right)^{-4}$  vernachlässigt werden durfte. Schreibt man noch

$$(5) \quad S = \frac{1}{2} \mathfrak{S} \gamma^3, \quad a = \frac{\varphi^2}{2\gamma},$$

so wird einfach:

$$(6) \quad S = \frac{a}{(1+a)^4}.$$

Das Maximum von  $S$  liegt bei  $a = \frac{1}{3}$  und beträgt

$$S_{\max} = \frac{27}{256} = 0,105.$$

In Figur 2 sind die Werte von  $S$ , die mit  $\mathfrak{S} = 2\gamma^{-3}S$  bei festem  $\gamma$  proportional sind, zur Abscisse  $\varphi = \sqrt{2a\gamma}$  aufgetragen (vgl. die ausgezogenen Kurven der Figur 2). Dem Maximum  $a = \frac{1}{3}$  entspricht z. B. für

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{1}{10} \quad \varphi = 0,26 &= 15^\circ \\ \gamma = \frac{1}{100} \quad \varphi = 0,082 &= 5^\circ. \end{aligned}$$

Um die Näherungsformel (6) mit der ursprünglichen (4) zu vergleichen, sind in Figur 2 ferner die dieser letzteren entsprechenden Ordinaten  $S = \frac{1}{2} \gamma^3 \mathfrak{S}$  punktiert eingetragen. Dieselben weichen nur bei der Kurve für  $\gamma = \frac{1}{10}$  bei größeren  $\varphi$  von den Ordinaten der ausgezogenen Kurve ab.

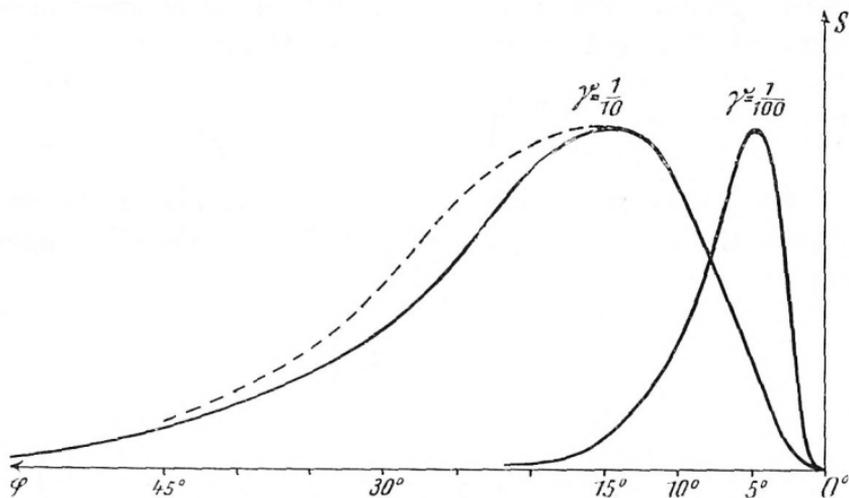


Fig. 2.

In Figur 3 ist die Emissionsverteilung im Polardiagramm dargestellt, indem zu jedem Winkel  $\varphi$  das zugehörige  $\mathcal{S}$  als Radiusvektor eingezeichnet wurde.  $\varphi = 0$  ist die Richtung des ausgesandten  $\beta$ -Strahls. An diese legt sich das Polardiagramm des  $\gamma$ -Strahls von beiden Seiten blattförmig heran, und zwar um so enger, je größer die Geschwindigkeit des  $\beta$ -Strahls ist. Der Maßstab ist willkürlich und für  $\beta = \frac{9}{10}$  und  $\beta = \frac{99}{100}$  in der Figur nur deshalb verschieden gewählt, um die beiden Kurven voneinander zu sondern. Nehmen wir in beiden Fällen gleiche Beschleunigung an, so würden sich die maximalen Intensitäten wie die negativen dritten Potenzen von  $\beta$ , also in unserem Falle wie 1:1000 verhalten. Unter dieser Annahme würde also dem schnelleren  $\beta$ -Strahl nicht nur ein enger begrenzter sondern auch ein viel intensiverer  $\gamma$ -Strahl entsprechen. Die Figur vermeidet diese Annahme und will nur die Struktur, nicht die Stärke der beiden  $\gamma$ -Strahlen im richtigen gegenseitigen Verhältnis darstellen.

Während wir bisher die in jeder Richtung emittierte spezifische Energie  $\mathcal{S}$  dargestellt haben, wollen wir jetzt noch die Gesamtenergie

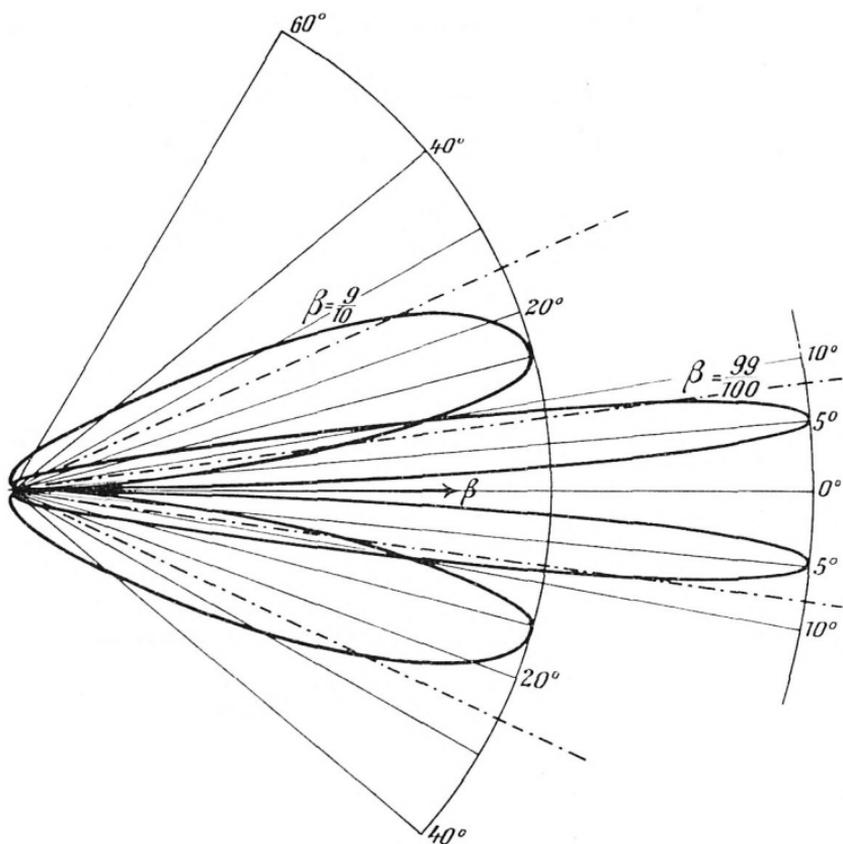


Fig. 3.

$$(7) \quad E_q = \int_q^{\pi} \mathfrak{S} \sin \varphi \, d\varphi$$

bestimmen, welche in den Kegel von der Öffnung  $\pi - \varphi$  gestrahlt wird.  $E$  wächst in dem Maße, wie  $\varphi$  von  $\pi$  aus abnimmt, und nähert sich für  $\varphi = 0$  der Gesamtemission  $E_0$ . Wenn  $\mathfrak{S}$  wie im Falle  $\gamma = \frac{1}{100}$  nur für kleine  $\varphi$  nicht verschwindend klein ist, können wir  $\sin \varphi$  gleich  $\varphi$  und  $\mathfrak{S}$  nach Näherung (5) gleich  $2\gamma^{-3}S$  setzen. Es wird dann

$$E_q = 2\gamma^{-3} \int_q^{\pi} S \varphi \, d\varphi = 2\gamma^{-2} \int \frac{a \, da}{(1+a)^4},$$

letzteres Integral wäre zwischen den Grenzen  $a = \frac{q^2}{2\gamma}$  und  $a = \frac{\pi^2}{2\gamma}$  zu nehmen; man kann aber, da  $\gamma$  klein ist, die letztere Grenze auch durch  $\infty$  ersetzen. Es ergibt sich dann:

$$(8) \quad E_q = \frac{1}{3} \frac{1 + 3a}{\gamma^2 (1 + a)^3} = \frac{1}{3} \frac{\gamma + \frac{3}{2} q^2}{(\gamma + \frac{1}{2} q^2)^3}.$$

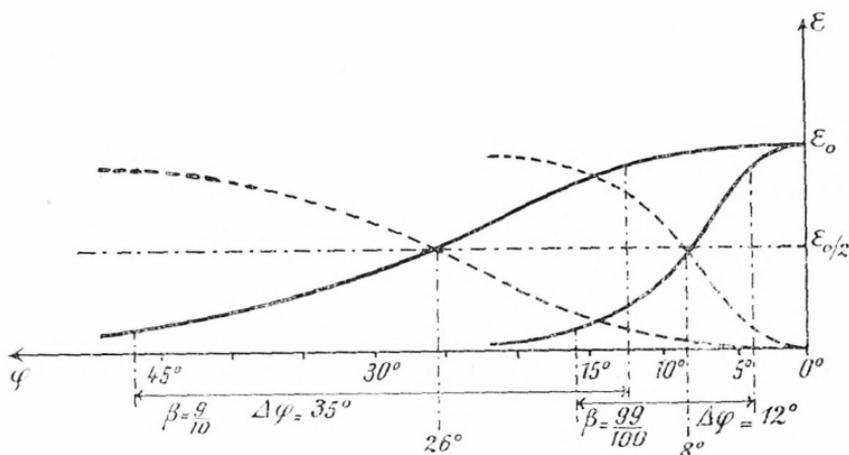


Fig. 4.

Der Verlauf von  $E$  ist in den beiden ausgezogenen Kurven der Figur 4 für  $\gamma = \frac{1}{10}$  (flachere Kurve) und  $\gamma = \frac{1}{100}$  (steilere Kurve) zur Abszisse  $\varphi = \sqrt{2a\gamma}$  eingetragen. Die genauere Berechnung von (7) auf Grund der Gleichung (4) für  $\mathfrak{S}$ , die sich durch Einführung der Integrationsvariablen  $1 - \beta \cos \varphi$  an Stelle von  $\varphi$  leicht bewerkstelligen läßt, liefert fast dieselben Kurven, was daherrührt, daß bei der vorangehenden Näherungsrechnung  $\sin \varphi$  durch den zu großen Wert  $\varphi$  und  $\mathfrak{S}$  durch einen zu kleinen Näherungswert (die in Figur 2 ausgezogene Kurve im Gegensatz zu der genaueren punktierten Kurve) ersetzt war.

Aus den Kurven für  $E$  ersieht man, daß, im Falle  $\beta = \frac{99}{100}$ , die Hälfte der Energie in einen die Richtung  $\varphi = 0$  umgebenden Kegel von der Öffnung  $8^\circ$  gestrahlt wird, während die

andere Hälfte sich auf das Äußere desselben, d. h. einen Kegel von der Öffnung  $172^\circ$  verteilt. Im Falle  $\beta = \frac{1}{10} E_0$  ist der erstere Kegel um  $26^\circ$  geöffnet. Die beiden Winkel  $8^\circ$  und  $26^\circ$  bestimmen sich in Figur 4, wenn man die (strichpunktierte) Parallele zur Abszissenachse im Abstand der Hälfte des maximalen Wertes  $E_0$  zieht. Diese beiden Halbwertskegel der Energie sind auch in Figur 3 strichpunktiert angedeutet. Daß sie weiter geöffnet sind wie die Kegel maximaler Emission, liegt offenbar daran, daß vermöge des Faktors  $\sin \varphi$  den größeren  $\varphi$  bei der Berechnung von  $E$  ein größeres Gewicht zukommt. Die strichpunktierten Kegel würden den durch Umdrehung der Emissionskurve entstehenden Rotationskörper in zwei gleiche Teile teilen.

Man sieht hieraus, daß für sehr große Geschwindigkeiten (sehr kleine  $\gamma$ ) die Energieemission tatsächlich fast corpuskular einseitig erfolgt, daß aber für etwas kleinere Geschwindigkeiten der Halbwertskegel der Energie sich erweitert, um für kleine Geschwindigkeiten die Öffnung von  $90^\circ$  anzunehmen.

Schließlich wollen wir noch, anknüpfend an die Schilderung des vorigen Paragraphen, denjenigen Hohlkegel bestimmen, in den der Hauptteil der Energie emittiert wird. Wir konstruieren zu dem Zwecke in Figur 4 die an der Geraden  $E = \frac{1}{2} E_0$  gespiegelten Energiekurven (punktiert). Die Ordinate jeder dieser Kurven an der Stelle  $\varphi$  gibt diejenige Energiemenge, die in den Kegel zwischen  $0$  und  $\varphi$  emittiert wird, geradeso, wie die Ordinate der ursprünglichen (ausgezogenen) Kurve an der Stelle  $\varphi$  diejenige Energie anzeigt, die in den Kegel zwischen  $\pi$  und  $\varphi$  ausstrahlt. Wir markieren bei den beiderlei Energiekurven etwa den Wert  $\varphi$ , für den  $E = \frac{1}{10} E_0$ . Die beiden für gleiches  $\gamma$  so erhaltenen  $\varphi$ -Werte geben die innere und äußere Begrenzung des Hohlkegels, in den  $\frac{4}{5}$  der Gesamtenergie, nämlich  $E_0 - \frac{1}{10} E_0 - \frac{1}{10} E_0$  emittiert wird. Dieser Hohlkegel hat nach Figur 4 für  $\beta = \frac{1}{10} E_0$  eine Öffnung  $A\varphi$  von  $12^\circ$ , für  $\beta = \frac{1}{10} E_0$  eine solche von  $35^\circ$ . Dieselbe Öffnung kommt dem ringförmigen Störungsgebiet zu, von dem im vorigen Paragraphen die Rede war.

### § 3. Korrektur dieser Berechnung bei konstanter Eigenbeschleunigung.

Der Vorgang der Aussendung des  $\beta$ -Teilchens ist uns natürlich völlig unbekannt. Die nächstliegende Annahme wird die sein, daß die Aussendung durch ein räumlich konstantes Spannungsgefälle innerhalb der Ausdehnung der molekularen Wirkungssphäre) bewirkt wird. Dieses würde eine konstante Beschleunigung des  $\beta$ -Teilchens nur dann hervorbringen, wenn seine Masse konstant, d. h. von der jeweiligen Geschwindigkeit unabhängig wäre. Dies ist sie bekanntlich weder nach der Relativitätstheorie noch nach der Absoluttheorie, so daß die Annahme eines konstanten  $\dot{v}$ , die wir im vorigen Paragraph machten, willkürlich erscheint. Vielmehr hätten wir mit einer Abnahme von  $\dot{v}$  bei wachsendem  $\beta$  zu rechnen, die der Zunahme der longitudinalen Masse mit  $\beta$  entspricht und die nach der Absoluttheorie recht kompliziert ausfallen würde.

Statt dessen stellen wir uns lieber auf den Standpunkt der Relativitätstheorie, wo die Vorstellungen und Formeln sich vereinfachen. Die longitudinale Masse ist hier  $m_0(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}$ , wo  $m_0$  die konstante Ruhmasse. Bei konstantem Kraftfelde wird also  $\dot{v}(1 - \beta^2)^{-\frac{3}{2}}$  gleich einer Konstanten  $\dot{v}_0$  oder

$$(9) \quad \dot{v} = \dot{v}_0(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Beschleunigung nimmt also unter diesen Annahmen bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit stark ab.

Wir kommen zu derselben Abhängigkeit der Beschleunigung von  $\beta$  und deuten zugleich  $\dot{v}_0$  als die von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommene Beschleunigung, die „Eigenbeschleunigung“, wenn wir, im wesentlichen kinematisch verfahren, uns auf das Additionstheorem der Geschwindigkeiten stützen. Ist  $v_1$  die augenblickliche Geschwindigkeit des Elektrons, die ein ruhender Beobachter wahrnimmt,  $\delta v$  der Geschwindigkeitszuwachs, den ein mit  $v_1$  bewegter Beobachter konstatiert, so wird die resultierende Geschwindigkeit vom Standpunkte des ruhenden Beobachters:

$$v_2 = \frac{v_1 + \delta v}{1 + \frac{v_1 \delta v}{c^2}}$$

also der Geschwindigkeitszuwachs, von dem gleichen Standpunkte aus beurteilt:

$$(9a) \quad v_2 - v_1 = \frac{v_1 + \delta v}{1 + \frac{v_1 \delta v}{c^2}} - v_1 = \delta v \frac{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}{1 + \frac{v_1 \delta v}{c^2}}$$

Bei der Division mit  $dt$  (Zeitelement im ruhenden System) entsteht links

$$(9b) \quad \frac{v_2 - v_1}{dt} = \dot{v}$$

Das [Zeitelement im bewegten System (Eigenzeit) ist  $d\tau = dt(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$  und es wird

$$\frac{\delta v}{d\tau} = \dot{v}_0,$$

die von dem mitbewegten Beobachter gemessene Eigenbeschleunigung. Auf der rechten Seite von (9a) entsteht daher durch Division mit  $dt$ , wenn man den Zähler durch  $1 - \beta^2$ , den Nenner in der Grenze  $\delta v = 0$  durch 1 ersetzt:

$$(9c) \quad \frac{\delta v}{dt} (1 - \beta^2) = \frac{\delta v}{d\tau} (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} = \dot{v}_0 (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Durch Gleichsetzen von (9b) und (9c) bekommt man also wieder Gleichung (9).

Wir haben jetzt die Rechnungen des vorigen Paragraphen auf Grund dieser Annahme über  $\dot{v}$  zu revidieren. Die Gleichungen (2) und (3) bleiben ungeändert, da in ihnen nichts über das Änderungsgesetz der Beschleunigung vorausgesetzt ist. In Gleichung (3a) darf  $\dot{v}^2$  nicht mehr vor das Integral gezogen werden, Gleichung (3b) wird wegen  $c d\beta' = \dot{v} dt$

$$(10) \quad \mathcal{E} = \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{16 \pi^2 c^2 r^2} \int_0^\beta \frac{\dot{v} d\beta'}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5}.$$

Setzen wir hier für  $\dot{v}$  seinen Wert aus Gleichung (9) ein, wobei  $\beta$  durch  $\beta'$  zu ersetzen ist, da wie früher  $\beta$  die Endgeschwindigkeit bedeuten soll, nämlich  $\dot{v} = \dot{v}_0(1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}}$ , und unterdrücken wir den für die Integration konstanten Faktor  $\frac{e^2 \dot{v}_0}{16 \pi^2 c^2 \gamma^2}$ , so entsteht:

$$(11) \quad \mathfrak{S} = \sin^2 \varphi \int_0^{\beta} \frac{(1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}} d\beta'}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5}.$$

Eine genaue Ausführung dieser Integration wäre möglich, aber sehr umständlich. Wir beschränken uns daher auf dieselbe Näherung wie in den Gleichungen (4), (5) des vorigen Paragraphen:

$$(12) \quad \gamma = 1 - \beta \ll 1, \quad \varphi \ll 1.$$

Ferner setzen wir:

$$\gamma' = 1 - \beta',$$

so daß

$$(12a) \quad 1 - \beta'^2 = 2\gamma' \left(1 - \frac{\gamma'}{2}\right).$$

Nun liefern unter den Voraussetzungen (12) diejenigen Werte von  $\gamma'$  den Hauptbetrag unseres Integrals, für die der Nenner  $1 - \beta' \cos \varphi$  klein, also  $\beta'$  nahezu 1 oder  $\gamma'$  klein wird. Für solche Werte von  $\gamma'$  kann man aber vereinfachen:

$$(12b) \quad (1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}} = (2\gamma')^{\frac{3}{2}}, \quad 1 - \beta' \cos \varphi = \gamma' + \frac{\varphi^2}{2}.$$

Zugleich ergibt sich wegen (12):

$$\mathfrak{S} = -\varphi^2 \int_1^{\gamma'} \frac{(2\gamma')^{\frac{3}{2}} d\gamma'}{\left(\gamma' + \frac{\varphi^2}{2}\right)^5}.$$

Wir setzen wie in (5)

$$\alpha = \frac{\varphi^2}{2\gamma}$$

und führen als neue Integrationsvariable ein:

$$(13) \quad a' = \frac{q^2}{2\gamma'}, \quad d\gamma' = -\frac{q^2}{2a'^2} da'.$$

In dieser werden die Grenzen des Integrals bez.:

$$(13a) \quad a' = \frac{q^2}{2\gamma} = a, \quad a' = \frac{q^2}{2} = 0,$$

letzteres wegen der Voraussetzung (12). Also

$$\mathfrak{S} = \frac{2^4}{q^3} \int_0^a \frac{a'^{\frac{3}{2}} da'}{(1+a')^5}$$

oder, wenn man endlich die Substitution

$$(13b) \quad a' = \operatorname{tg}^2 \chi, \quad a = \operatorname{tg}^2 x$$

macht:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{2^5}{q^3} \int_0^x \sin^4 \chi \cos^4 \chi d\chi \\ &= \frac{1}{q^3} \left\{ -\frac{1}{4} \cos 2x \sin^3 2x - \frac{3}{16} \sin 4x + \frac{3}{4} x \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist wegen  $a = \operatorname{tg}^2 x$  (Gleichung 13 b)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+a}, \quad \cos 2x = \frac{1-a}{1+a}, \quad \sin 2x = \frac{2\sqrt{a}}{1+a}$$

$$\sin 4x = \frac{4\sqrt{a}(1-a)}{(1+a)^2}, \quad x = \operatorname{artg} \sqrt{a}$$

und wegen  $a = \frac{q^2}{2\gamma}$  (Gleichung 13 a)

$$\frac{1}{q^3} = \frac{(2\gamma)^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

also:

$$(14) \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^{-\frac{3}{2}} \left\{ \frac{a-1}{(1+a)^4} + \frac{3}{8} \frac{a-1}{a(1+a)^2} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{artg} \sqrt{a}}{a^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Diese etwas komplizierte Formel tritt an die Stelle der Gleichungen (5), (6) des vorigen Paragraph, welche analog geschrieben lauten:

$$(14a) \quad \mathfrak{S} = 2\gamma^{-3} \frac{a}{(1+a)^4}.$$

Der Verlauf von (14) ist ähnlich demjenigen von (14a). Das Maximum von (14) liegt, wie man aus einer graphischen Darstellung entnimmt, bei  $a = 0,42$ , dasjenige von (14a) fanden wir früher bei  $a = 0,33$ . Die Einseitigkeit der Ausstrahlungskurve erscheint dementsprechend jetzt etwas abgeschwächt.

In der Tat zeigt sich folgendes: Wenn wir nach Gleichung (14)  $\mathfrak{S}$  als Funktion von  $a$  berechnen und nach Gleichung (13a) zu jedem  $a$  das zugehörige  $\varphi = \sqrt{2\gamma a}$  bestimmen, so ergibt sich für  $\gamma = \frac{1}{10}$  eine Emissionsverteilung  $\mathfrak{S}$  als Funktion von  $\varphi$ , welche, in Figur 2 übertragen, sich zufällig fast genau (bis auf unwesentliche Abweichungen bei größeren  $\varphi$ ) mit der dort punktierten Kurve deckt, also von der dort ausgezogenen Näherungskurve (14a) nur unwesentlich abweicht. An der so erhaltenen punktierten Kurve, welche der Näherung (14a) entspricht, hätten wir noch eine Korrektur anzubringen, um die genaue Gleichung (11) darzustellen, eine Korrektur, die einerseits dem Umstande Rechnung trägt, daß für größere  $\varphi$  nicht mehr  $\sin \varphi$  durch  $\varphi$  ersetzt werden darf und andererseits dem Umstande, daß  $1 - \beta'^2$  nach (12a) gleich  $2\gamma' \left(1 - \frac{\gamma'}{2}\right)$  ist, während wir bisher dafür nach (12b) den Näherungswert  $2\gamma'$  benutzt haben. Diese Korrektur würde aber unsere Kurve nur unwesentlich beeinflussen, so daß wir auf ihre Berechnung verzichten können. Verfahren wir ebenso im Falle  $\gamma = \frac{1}{100}$ , so wird  $\mathfrak{S}$  als Funktion von  $\varphi$  (bis auf unwesentliche Abweichungen bei größeren  $\varphi$ ) direkt durch die entsprechende ausgezogene Kurve der Figur 2 dargestellt; von einer weiteren Korrektur derselben können wir in diesem Falle ebenso wie im vorigen Paragraphen absehen.

Ebenso wie die Kurven der Emissionsverteilung in Figur 2

können auch ihre Polardiagramme in Figur 3 und die Kurven für die Verteilung der Gesamtenergie in Figur 4 auf unseren jetzigen Fall ohne wesentliche Korrektur übertragen werden, da sie direkte Folgen aus den Kurven der Figur 2 sind. Es bleiben also auch unsere früheren Zahlenangaben über den Grad der Energiekonzentration, den Halbwertskegel der Energie etc. im wesentlichen erhalten.

Dagegen muß die Formel für die ausgestrahlte Gesamtenergie auf Grund der Annahme konstanter Eigenbeschleunigung neu berechnet werden. Es handelt sich dabei um den Maximalwert  $E_0$  der in Gleichung (7) definierten Größe  $E_\varphi$ , den wir für die Entfernung  $r$  von der Emissionsstelle folgendermaßen aus  $\mathfrak{S}$  zu bestimmen haben:

$$E_0 = 2 \pi r^2 \int_0^\pi \mathfrak{S} \sin \varphi d\varphi.$$

Tragen wir hier für  $\mathfrak{S}$  den Wert (11) ein und fügen den in dieser Gleichung unterdrückten Faktor  $\frac{e^2 \dot{v}_0}{16 \pi^2 c^2 r^2}$  hinzu, so ergibt sich:

$$E_0 = \frac{e^2 \dot{v}_0}{8 \pi c^2} \int_0^\beta (1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}} d\beta' \int_0^\pi \frac{\sin^3 \varphi d\varphi}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5}.$$

Das zweite dieser Integrale geht durch die Substitution  $u = 1 - \beta' \cos \varphi$  über in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta'} \int_{1-\beta'}^{1+\beta'} \left(1 - \frac{(1-u)^2}{\beta'^2}\right) \frac{du}{u^5} \\ &= \frac{1}{\beta'} \left\{ \frac{\beta'^2 - 1}{\beta'^2} \int \frac{du}{u^5} + \frac{2}{\beta'^2} \int \frac{du}{u^4} - \frac{1}{\beta'^2} \int \frac{du}{u^3} \right\} \\ &= \frac{1}{\beta'^3} \left\{ \frac{\beta'^2 - 1}{4} \left( \frac{1}{(1-\beta')^4} - \frac{1}{(1+\beta')^4} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{(1-\beta')^3} - \frac{1}{(1+\beta')^3} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1-\beta')^2} - \frac{1}{(1+\beta')^2} \right) \right\} = \frac{4}{3} \frac{1}{(1-\beta'^2)^3}. \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$(15) \quad E_0 = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} \int_0^\beta \frac{d\beta'}{(1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Als Näherungswert kann man benutzen für den Fall, daß  $\beta = 1 - \gamma$  nahezu gleich 1 ist:

$$(15 a) \quad E_0 = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} (2\gamma)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dagegen ergibt sich aus Gleichung (8) des vorigen Paragraphen bei dem dort vorausgesetzten abweichenden Beschleunigungsvorgang für  $\varphi = 0$ :

$$E_0 = \frac{1}{3} \gamma^{-2}$$

oder, wenn wir die dort unterdrückten konstanten Faktoren hinzufügen, nämlich einerseits den Faktor aus Gleichung (3 b)  $\frac{e^2 \dot{v}}{64 \pi^2 c^2 r^2}$ , andererseits von der Integration über die Kugel vom Radius  $r$  herrührend den Faktor  $2 \pi r^2$ :

$$(15 b) \quad E_0 = \frac{e^2 \dot{v}}{24 \pi c^2} (2\gamma)^{-2}.$$

Beide Formeln (15 a) und (15 b) werden vermöge Gleichung (9) (angenähert  $\dot{v} = \dot{v}_0 (2\gamma)^{\frac{3}{2}}$ ) identisch bis auf einen Zahlenfaktor.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß für den umgekehrten Vorgang, die Bremsung eines  $\beta$ -Teilchens bei der Erzeugung der Röntgenstrahlung, der Gegensatz zwischen konstanter Beschleunigung und konstanter Eigenbeschleunigung noch nicht in Frage kommt, weil die hierbei vorkommenden Höchstgeschwindigkeiten noch verhältnismäßig weit von der Lichtgeschwindigkeit abliegen. Deshalb dürfte ich bei der obengenannten Diskussion über die Unsymmetrie der Röntgenstrahlen die Beschleunigung schlechtweg als konstant ansehen und mit den Formeln des vorigen Paragraphen rechnen.

§ 4. Über die verhältnismässige Energie der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen.

Die Energie eines  $\beta$ -Strahls  $E_\beta$  ist für unsere Zwecke als die lebendige Kraft eines Punktes von der Ruhmasse  $m_0$  zu berechnen, also nach der Relativitätstheorie durch die Formel:

$$(16) \quad E_\beta = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}).$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig darauf hinzuweisen, daß man auch von dem Ausdruck der elektromagnetischen Energie auf folgendem Wege zu Gleichung (16) gelangt. Die elektromagnetische Energie eines mit  $\beta$  bewegten Heaviside-Ellipsoides beträgt bei Oberflächenlandung:<sup>1)</sup>

$$(16a) \quad E = \frac{3}{4} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right).$$

Außerdem ist aber noch die potentielle Energie  $E_p$  einer über die Oberfläche des Elektrons gleichmäßig verteilten und sich nach dem Innern gleichmäßig fortsetzenden Normalspannung  $p$  zu berücksichtigen, welche die Ladungselemente gegen die elektrischen Abstößungen zusammenhält. Für den mit dem Elektron bewegten Beobachter ist<sup>2)</sup> nach Poincaré:

$$p = \frac{1}{4} \frac{m_0 c^2}{V_0},$$

wo  $V_0$  das von demselben Beobachter gesehene oder Ruhvolumen des Elektrons ist. Derselbe Wert von  $p$  gibt auch nach einem Satze von Planck ( $p' = p$ ) die Spannung an für einen ruhenden, d. h. die Bewegung des Elektrons nicht mitmachenden Beobachter. Die potentielle Energie dieser Spannung ist:

<sup>1)</sup> Vgl. Abraham, Theorie der Elektrizität II, Gleichung (124 g) und (117 b); durch Einführung von  $m_0$  statt  $e$  fällt der Unterschied zwischen dem bei Abraham und dem hier benutzten Maßsystem der elektrischen Einheiten fort. Die spezielle Annahme über die Kugel-Ellipsoidform des Elektrons ist offenbar für die folgende Energievergleichung unwesentlich.

<sup>2)</sup> Vgl. H. A. Lorentz, Theory of electrons, § 181.

$$(16\ b) \quad E_p = p V = \frac{1}{4} m_0 c^2 \frac{V}{V_0} = \frac{1}{4} m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2},$$

da wegen der Lorentz-Kontraktion

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

ist.

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich aus der Feldenergie (16 a) und der Spannungsenergie (16 b) zusammen und ist

$$(16\ c) \quad \begin{cases} E + E_p = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \frac{3}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{4} (1 - \beta^2) \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{cases}$$

Ist das Elektron zur Ruhe gebracht, so setzt sich seine Gesamtenergie in derselben Weise zusammen aus der Energie seines elektrostatischen Feldes  $E_{\text{stat}}$  und der Spannungsenergie im Ruhezustande  $E_{p\ \text{stat}}$  und es ist nach (16 c) für  $\beta = 0$ :

$$E_{\text{stat}} + E_{p\ \text{stat}} = m_0 c^2,$$

entsprechend dem Einsteinschen Satz von der Trägheit der Energie. Die auf Wärme- oder Ionisationswirkungen verfügbare Energie des  $\beta$ -Strahls ist daher:

$$E_\beta = E + E_p - E_{\text{stat}} - E_{p\ \text{stat}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (16) für seine lebendige Kraft. Übrigens verschwindet für  $\beta$  nahezu gleich 1 der Unterschied in der Definition von  $E_\beta$  und  $E$ , indem  $E_p = 0$ ,  $E_{\text{stat}}$  und  $E_{p\ \text{stat}}$  endlich,  $E_\beta = E = \infty$  werden. Für  $\beta$  nahezu gleich 0 ist  $E_\beta$  in bekannter Weise mit  $\frac{m_0 v^2}{2}$  identisch.

Für die Energie eines  $\gamma$ -Strahls andererseits fanden wir oben in Gleichung (15) (es handelt sich um die nach allen möglichen Azimuten ausgestrahlte Gesamtenergie  $E_0$ , im folgenden durch  $E_\gamma$  bezeichnet):

$$E_\gamma = \frac{c^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Mithin:

$$(17) \quad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6 \pi c^4}{\dot{v}_0 e \left( \frac{e}{m_0} \right)} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}.$$

Hier sind alle Größen bekannt bis auf  $\dot{v}_0$ . Um diese mit einer ebenfalls bekannten Größenordnung zu vergleichen, ersetzen wir die Beschleunigung  $\dot{v}_0$  durch den Beschleunigungsweg  $l$ , der ein Bruchteil der molekularen Wirkungssphäre sein muß. Vom Standpunkte des § 2 ( $\dot{v}$  konstant während des Aussendungsvorganges) wäre nach den gewöhnlichen Fallformeln:

$$(18) \quad l = \frac{v^2}{2 \dot{v}}, \quad \dot{v} = \frac{(\beta c)^2}{2 l}, \quad \tau = \frac{v}{\dot{v}} = \frac{2 l}{\beta c},$$

wo  $l$  der ganze Beschleunigungsweg,  $\tau$  die ganze Beschleunigungszeit ist.

Wir haben zuzusehen, was an die Stelle dieser Fallformeln vom Standpunkt des § 3 ( $\dot{v}_0$  konstant während des Aussendungsvorganges) tritt.<sup>1)</sup> Den Zusammenhang zwischen  $l$  und  $v_0$  liefert uns hier wie bei den gewöhnlichen Fallformeln der Satz der lebendigen Kraft. Die auf das Elektron bei seiner Beschleunigung wirkende Kraft ist (Gleichung (9)):

$$m_{\text{long}} \dot{v} = m_0 \dot{v}_0,$$

sie ist nach der Annahme vom Anfang des § 3 auf dem ganzen Beschleunigungswege konstant; daher ihre Arbeit:

$$m_0 \dot{v}_0 l,$$

und nach dem Satze der lebendigen Kraft:

$$(19) \quad m_0 \dot{v}_0 l = m_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \dot{v}_0 = \frac{c^2}{l} \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

<sup>1)</sup> Es handelt sich dabei um die Formeln der sogenannten Hyperbelbewegung.

Den Zusammenhang zwischen  $\tau$  (Beschleunigungszeit) und  $\dot{v}_0$  andererseits gibt am einfachsten der Impulssatz.

Nach diesem ist das Zeitintegral der wirkenden (konstanten) Kraft  $m_0 \dot{v}_0 \tau$  gleich der erzeugten Bewegungsgröße

$$m_0 \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

also mit Rücksicht auf (19)

$$(19a) \quad m_0 \dot{v}_0 \tau = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \tau = \frac{l}{c} \frac{\beta}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Aus (17) und (19) folgt:

$$(20) \quad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6 \pi c^2 l \sqrt{1 - \beta^2}}{e \left( \frac{e}{m_0} \right) \beta}.$$

Da nach unserer Auffassung der Beschleunigungsweg  $l$  ein Bruchteil der molekularen Wirkungssphäre sein muß, ist durch diese Formel das Verhältnis  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  auf eine bekannte Größenordnung zurückgeführt und in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der  $\beta$ -Strahlen gesetzt. Unter der (vorläufigen) Annahme, daß  $l$  von dieser Geschwindigkeit unabhängig sei, sagt Gleichung (20) aus, daß die Energie der  $\gamma$ -Strahlung einen um so größeren Bruchteil von der Energie der zugehörigen  $\beta$ -Strahlung ausmachen wird, je schneller die betreffende  $\beta$ -Strahlung ist.

So hypothetisch die bisherigen Betrachtungen schon sind, wollen wir doch versuchsweise durch Einführung einer neuen Hypothese sie einen Schritt weiterführen, um das Verhältnis  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  durch lauter bekannte Größen auszudrücken und als reine Funktion der Geschwindigkeit anzugeben. Wir übertragen nämlich die Fundamentalthypothese der Planckschen Strahlungstheorie auf die radioaktiven Emissionen und nehmen an, daß

bei jeder solchen Emission gerade ein Wirkungsquantum  $h$  abgegeben wird. Die „Wirkung“ einer Emission (Zeitintegral der Energie) setzen wir gleich Beschleunigungszeit  $\tau$  mal emittierter Gesamtenergie<sup>1)</sup>  $E + E_p$ , Gleichung (16c); also

$$(21) \quad \tau \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h, \quad \tau = \frac{h}{m_0 c^2} \sqrt{1 - \beta^2}$$

oder wegen (19a)

$$(21a) \quad l = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}).$$

Hiernach würde  $\tau$  mit zunehmender Geschwindigkeit  $\beta$  abnehmen wie  $\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $l$  bei kleinem  $\beta$  zunächst zunehmen wie  $\beta$ , bei großem  $\beta$  ebenfalls abnehmen wie  $\sqrt{1 - \beta^2}$ . Tragen wir diesen Wert von  $l$  in (20) ein, so wird:

$$(22) \quad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6 \pi c h}{c^2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}).$$

Wir wollen diese Formeln qualitativ und quantitativ prüfen. Vorab sei auf die große Unsicherheit dieser Prüfung hingewiesen. Sie beruht einmal darin, daß die  $\beta$ -Strahlen der meisten Präparate nicht homogen sind und bestenfalls in einige homogene Gruppen aufgelöst werden können, sodann darin, daß die Energie der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen durch das Ionisationsvermögen, also gewissermaßen in willkürlichen und nicht recht vergleichbaren Einheiten, gemessen wird. Die folgenden Zahlen

1) Oder soll man hierfür, wie es später für den Fall der Röntgenstrahlen motiviert wird, nur die kinetische Energie  $E_\beta$  setzen? (22) würde dann durch (22a) zu ersetzen sein. Übrigens ist der Unterschied für große  $\beta$  nicht wesentlich, da wie oben bemerkt für  $\beta = 1$  Gesamtenergie und kinetische identisch werden und daher auch (22) in (22a) asymptotisch übergeht.

Ferner: Soll man die „Wirkung“ statt durch das Produkt aus der ganzen Beschleunigungszeit in die Gesamtemission lieber messen durch das Integral der Wirkungselemente, d. h. der Produkte aus Zeitelement mal Augenblickswert der emittierten Energie? Dann würde sich in der Tabelle von p. 29 ein etwas kleinerer Wert von  $h$  ergeben, nämlich bei RaE, UrX, RaC bez.  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$  der dort angegebenen Zahl.

mögen daher nicht eigentlich als eine Bestätigung unserer theoretischen Formeln angesehen werden, sondern vielmehr als eine Aufforderung an die radioaktive Forschung, das Verhältnis zwischen  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlenergie genauer nachzuprüfen.

Wir werden uns auf die folgenden Daten stützen, die selbst keineswegs gesichert<sup>1)</sup> sind:

	Ra E	Ur X	Ra C
$\beta$	0,78	0,92	0,95
$\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$	6000	5000 . . . 1000	100
$\frac{E_\beta}{E_\gamma}$	120	44 . . . 9	2

Hier bedeutet  $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$  das experimentell gefundene Verhältnis der Ionisationswirkung der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen in derselben Ionisationszelle. Ist ihre in Betracht kommende Ausdehnung  $a$  klein gegen die Reichweite der  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen, so hält sie von der auffallenden Energie  $E_\beta$  bzw.  $E_\gamma$  den Bruchteil zurück:

$$E'_\beta = r_\beta a E_\beta, \quad E'_\gamma = r_\gamma a E_\gamma,$$

wo  $r_\beta$  und  $r_\gamma$  die Absorptionskoeffizienten der Gasfüllung sind. Diese Bruchteile  $E'_\beta$  und  $E'_\gamma$  sind proportional den Anzahlen der gebildeten Ionen und den Ionisationsströmen: aus ihrem Verhältnis folgt nach den vorangehenden Gleichungen das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{r_\gamma}{r_\beta} \frac{E'_\beta}{E'_\gamma}.$$

Die in Frage kommenden Absorptionskoeffizienten  $r_\beta$  und  $r_\gamma$  sind im folgenden Paragraphen tabellarisch zusammengestellt; da beide annähernd der Dichte des absorbierenden Mittels pro-

<sup>1)</sup> Vgl. eine soeben erschienene Arbeit von Russel und Soddy, Phil. Mag. 21, 130, 1911.

portional sind, wird ihr Verhältnis von dem Material der Gasfüllung unabhängig. Für Ra E ist z. B.  $r_\beta : r_\gamma = 15 : 0,3$  und

$$\frac{E'_\beta}{E'_\gamma} = 6000, \text{ also:}$$

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = 6000 \frac{0,3}{15} = 120.$$

Im einzelnen ist folgendes zu bemerken:

1. Der Wert von  $\beta$  für Ra E folgt aus Ablenkungsversuchen von H. W. Schmidt.<sup>1)</sup> Diese ergaben  $RH$  (Krümmungsradius der Bahn  $\times$  Magnetfeld) = 2200 Gauß cm. Da

$$RH = \frac{v m}{e}$$

( $e$  ist hier in gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten gemessen) und nach der Relativtheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

so hat man also:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{RH}{c} \frac{e}{m_0} = \frac{2200}{3 \cdot 10^{10}} 1,7 \cdot 10^7 = 1,25,$$

woraus der angegebene Wert  $\beta = 0,78$  folgt. In derselben Arbeit findet Schmidt die Intensität der  $\gamma$ -Strahlung von Ra E zu 0,16 pro Mille der  $\beta$ -Strahlintensität, was dem angegebenen Werte  $E'_\beta : E'_\gamma = 6000$  entspricht.

2. Für die harte  $\beta$ -Strahlung von UrX findet derselbe Autor<sup>2)</sup>  $v = 2,76 \cdot 10^{10}$ , entsprechend dem angegebenen Werte  $\beta = 0,92$ , und für  $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$  bei UrX den Wert 1000.<sup>3)</sup> Der Wert

<sup>1)</sup> Physikal. Zeitschr. 8, 361, 1907.

<sup>2)</sup> Physikal. Zeitschr. 10, 6, 1909. Nach Ablenkungsversuchen von v. Baeyer und Hahn bestehen die  $\beta$ -Strahlen von Ra E und von UrX (im Gegensatz zu den sehr inhomogenen Strahlen von Ra C) aus wenigen in sich ziemlich homogenen Gruppen, vgl. Physik. Zeitschr. 11, 488, 1910.

<sup>3)</sup> Ann. Phys. 23, 671, 1907, vgl. Ann. p. 681.

5000 ergibt sich aus Versuchen von Soddy und Russell,<sup>1)</sup> nach denen die  $\gamma$ -Strahlenergie von UrX zu derjenigen eines Radiumpräparates von gleicher  $\beta$ -Strahlintensität sich verhält wie 1:50. Nehmen wir also das Verhältnis  $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$  für Ra (d. i. im wesentlichen RaC) nach Rutherford gleich 100 an, so folgt für dasselbe Verhältnis bei UrX der angegebene Wert 5000.

3. Der Wert  $\beta = 0,95$  für die  $\beta$ -Strahlen des Radiums ergibt sich aus Ablenkungsversuchen von W. Wilson,<sup>2)</sup> bei denen der Höchstwert von  $RH$  (vgl. unter 1) 5280 betrug; wegen der starken Inhomogenität der  $\beta$ -Strahlen des Ra ergaben sich daneben natürlich auch viel kleinere Werte von  $RH$  (bis 1950 Gauß cm). Aus  $RH = 5280$  folgt nach der unter 1. angeführten Rechnung  $\beta = 0,95$ . Wir kommen im § 6 auf die Schätzung der Höchstgeschwindigkeit oder Ursprungsgeschwindigkeit der  $\beta$ -Strahlen des Ra zurück.

Unsere Tabelle zeigt, daß das von uns vermutete Gesetz qualitativ jedenfalls zutrifft, daß nämlich die verhältnismäßige  $\gamma$ -Strahlintensität um so kleiner, also das Verhältnis  $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$  um so größer ist, je geringer die Geschwindigkeit der  $\beta$ -Strahlen.

Mehr erfahren wir durch eine quantitative Prüfung der Formeln (20) und (22). Hierbei wird es einmal darauf ankommen, aus (20) den Beschleunigungsweg  $l$  auszurechnen und mit den Moleküldimensionen zu vergleichen, andererseits aus (22) die Größe  $h$  zu bestimmen und mit dem Planckschen  $h$  zu vergleichen.

Da unser  $e$  in elektrostatischen rationalen (Heavisideschen) Einheiten gemessen ist, haben wir, wenn  $e_{\text{stat}}$  und  $e_{\text{magn}}$  die in gewöhnlichen elektrostatischen oder elektromagnetischen Einheiten gemessene Elektrizitätsmenge bedeuten:

$$e^2 = 4\pi e_{\text{stat}}^2 = 4\pi c e_{\text{stat}} \cdot e_{\text{magn}}.$$

<sup>1)</sup> Phil. Mag. 18, 620, 1909.

<sup>2)</sup> Proc. Roy. Soc. (A) 84, 141. 1910.

Nun ist:

$$e_{\text{stat}} = 4,7 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{e_{\text{magn}}}{m_0} = 1,7 \cdot 10^7.$$

Daher wird der Faktor in Gleichung (20):

$$e \left( \frac{e}{m_0} \right) = \frac{3}{2} \frac{e}{e_{\text{stat}}} \left( \frac{e_{\text{magn}}}{m_0} \right) = \frac{3}{2} \frac{3 \cdot 10^{10}}{4,7 \cdot 10^{-10} \cdot 1,7 \cdot 10^7} = \frac{10^{13}}{1,8}$$

und Gleichung (2) ergibt:

$$l = 1,8 \cdot 10^{-13} \frac{E_\beta}{E_\gamma} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Andererseits wird der Faktor in Gleichung (22):

$$\frac{6 \pi c}{e^2} = \frac{3}{2} \frac{c}{e_{\text{stat}}^2} = \frac{10^{30}}{4,9},$$

also nach einer kleinen Umformung:

$$h = 4,9 \cdot 10^{-30} \frac{E_\beta}{E_\gamma} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2}.$$

Aus diesen Formeln und den Daten der vorigen ist die folgende Tabelle berechnet:

	Ra E	Ur X	Ra C
$l =$	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-11} \dots 4 \cdot 10^{-12}$	$10^{-12}$
$h =$	$2,4 \cdot 10^{-27}$	$1,9 \cdot 10^{-27} \dots 3,9 \cdot 10^{-28}$	$1,4 \cdot 10^{-28}$
$\frac{E_\beta}{E_\gamma} =$	330	150	100

Die erste Zeile zeigt, daß der Beschleunigungsweg  $l$  ein sehr kleiner Bruchteil der Moleküldimensionen ( $10^{-8}$ ) ist. Ein Widerspruch gegen die der Gleichung (20) zu Grunde liegenden Anschauungen ist darin nicht zu erblicken. Ein solcher würde sich nur ergeben, wenn  $l > 10^{-8}$  gefunden würde.

Die zweite Zeile zeigt, zumal in ihren ersten Ziffern, einen Wert von  $h$ , der durchaus von der Größenordnung des

Planckschen  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  ist. Besonders groß ist der Unterschied in unserem Werte von  $h$  für Ra C; hier sind aber auch die benutzten Daten besonders unsicher wegen der starken Inhomogenität der betreffenden  $\beta$ -Strahlen und der vermutlichen Ungenauigkeit des Grenzwertes  $\beta = 0,95$ . Offenbar reicht das Beobachtungsmaterial nicht aus, um für oder gegen die Frage zu entscheiden, ob die radioaktiven Emissionen mit der Planckschen Theorie des Wirkungsquantums zusammenhängen. Daß ein solcher Zusammenhang der Größenordnung nach bestehen kann, schien mir jedenfalls sehr bemerkenswert.

Die dritte Zeile gibt diejenigen Werte des Energieverhältnisses, die sich aus Gleichung (22) mit  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  ergeben.

Diese berechneten Werte fallen nicht so schnell mit wachsendem  $\beta$  ab, wie die aus den Beobachtungen geschlossenen der vorigen Tabelle. Sie zeigen dieselbe Übereinstimmung der Größenordnung nach resp. dieselben Abweichungen wie die vorige Zeile, nur von einer anderen Seite gesehen.

Wir können aber unsere Formeln (20) und (22) im Gebiete der Röntgenstrahlung einer wesentlich schärferen Prüfung unterwerfen dank einer Untersuchung von W. Wien,<sup>1)</sup> in der die Energie der Röntgenstrahlen  $E_r$  im Verhältnis zur Energie der auffallenden Kathodenstrahlen  $E_k$  und zwar auf thermischem Wege, also in absolutem Maße, bestimmt wurde. Wien findet

$$\frac{E_r}{E_k} = 2 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3}.$$

Hier meint  $E_r$  die gesamte Energie der Röntgenstrahlen, die von der Antikathode ausgeht resp. in sie hineingeht, wobei der letztere nicht mitgemessene Bestandteil durch den Faktor 2 berücksichtigt werden soll. Indessen haben wir zum Vergleich mit unseren Formeln wahrscheinlich nur den polarisierten Anteil  $E_{r, \text{pol}}$  einzusetzen, der nach unserer Anschauung allein

<sup>1)</sup> Wüllner, Festschrift, Aachen 1905 und *Annalen der Physik* 18, 991, 1905.

seinen Ursprung in dem Bremsvorgange hat. Nach den Messungen von Baßler<sup>1)</sup> beträgt derselbe bei verschiedenen Röhren zwischen  $\frac{1}{10}$  und  $\frac{1}{20}$  der ganzen Energie (Platinantikathode). Wir setzen also etwa:

$$\frac{E_{r \text{ pol}}}{E_k} = 1,35 \cdot 10^{-4}.$$

Die Geschwindigkeit seiner Kathodenstrahlen bestimmt Wien durch Spannungsmessungen zu  $\beta = 0,46$ ; nach der Relativitätstheorie berechnet liefern sie statt dessen  $\beta = 0,43$ . Wir haben also für

$$\beta = 0,43 \cdots \frac{E_k}{E_{r \text{ pol}}} = \frac{10^4}{1,35} = \text{ca. } 7000.$$

Dieses Verhältnis ist dem Verhältnis  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  zu vergleichen. Denken wir es uns in die Tabelle von p. 26 mit dem zugehörigen Werte von  $\beta$  eingetragen, so setzt es die Tabelle nach der Richtung kleinerer Geschwindigkeiten fort und gibt ein weiteres Anwachsen von  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  bei abnehmendem  $\beta$ .

<sup>1)</sup> Dissertation, München 1908. Annalen der Physik 28, 808, 1909. Wenn Baßler bei Röhre II unter  $90^\circ$  Azimut  $x = 5\%$  findet, so bedeutet dies, unter  $a$  die gesamte Emission in dieser Richtung, unter  $b$  die unpolarisierte Emission verstanden:

$$x = \frac{a - b}{a + b}, \quad \text{also} \quad \frac{a - b}{a} = \frac{2x}{1 + x} = \frac{10}{105}.$$

Das Azimut von  $90^\circ$  liegt der Richtung maximaler Emission der polarisierten Strahlung nahe. Die durchschnittliche Stärke der polarisierten Emission beträgt etwa die Hälfte der maximalen, also ist ungefähr

$$\frac{E_{r \text{ pol}}}{E_\gamma} = \frac{1}{2} \frac{a - b}{a} = \frac{x}{1 + x} = \frac{5}{105}.$$

Für die sehr harten Wienschen Strahlen dürfte der von Baßler gefundene kleinste Wert  $x = 5\%$  zutreffen. Ich habe daher im Text mit

$$\frac{E_{r \text{ pol}}}{E_\gamma} = \frac{1}{20} \text{ gerechnet.}$$

Aus Gleichung (20) läßt sich jetzt der „Bremsweg“  $l$  berechnen. Mit dem oben benutzten Zahlenwert von

$$\frac{6 \pi c^2}{e \left( \frac{e}{m_0} \right)}$$

ergibt sich:

$$l = 1,8 \cdot 10^{-13} \frac{E_k}{E_{r \text{ pol}}} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 6 \cdot 10^{-10},$$

also wieder ein Wert, der ein kleiner Bruchteil der Moleküldimensionen ist und der sich an die Tabelle der  $l$ -Werte von p. 29 links angliedert.

Wir betrachten andererseits die „Bremsdauer“  $\tau$  und die während derselben von dem bremsenden Molekül absorbierte Energie. Während wir oben als emittierte Energie die Gesamtenergie des  $\beta$ -Strahls  $E + E_p$  ansetzen mußten, scheint es bei dem Bremsvorgange naturgemäßer, hiervon, wie es auch Wien tut, die elektrostatische Energie und dann auch die dem Elektron verbleibende Spannungsenergie im Ruhezustande  $E_{0p}$  abzuziehen, d. h. (vgl. den Anfang dieses Paragraphen) die absorbierte Energie der Bremsung direkt der kinetischen Energie des Kathodenteilchens gleichzusetzen. Bei dieser Berechnungsweise setzen wir also voraus, daß das bremsende Molekül nur die Geschwindigkeit vernichtet, aber nicht das Elektron und seine Feldenergie in seinen Verband aufnimmt. Die aufgenommene kinetische Energie wird, wie dies in unseren Formeln enthalten ist, nur zum kleinsten Teil als polarisierte Röntgenstrahlung wieder abgegeben; der größte Teil setzt sich in Wärmeenergie um oder erregt, wie wir annehmen müssen, die (weichere) unpolarisierte Fluoreszenzstrahlung des Moleküls.

Von diesem Standpunkte aus ist die „Wirkung“ des Bremsvorganges

$$(21 \text{ b}) \quad \tau E_{\text{kin}} = \tau \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}).$$

An die Stelle von (21) und (21a) tritt also

$$(21\ c) \quad \tau = \frac{h}{m_0 c^2} \frac{V\sqrt{1-\beta^2}}{1-V\sqrt{1-\beta^2}}, \quad l = \frac{h}{m_0 c} \frac{V\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}.$$

Aus (20) ergibt sich daher an Stelle von (22):

$$(22\ a) \quad \frac{E_k}{E_{r\ \text{pol}}} = \frac{6\pi c h}{e^2} \frac{1-\beta^2}{\beta^2}.$$

Hieraus folgt mit dem oben berechneten Werte  $\frac{6\pi c}{e^2} = \frac{10^{30}}{4,9}$ , dem Planckschen  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  und mit  $\beta = 0,43$ :

$$\frac{E_k}{E_{r\ \text{pol}}} = 6000.$$

Die Übereinstimmung mit dem Wienschen Beobachtungswerte 7000, der allerdings selbst erst durch die Baßlerschen Messungen auf seinen polarisierten Anteil korrigiert war, ist überraschend.<sup>1)</sup> Dementsprechend ergibt sich auch mit diesem Wienschen Werte eine sehr gute Annäherung an das Plancksche  $h$ , wenn wir umgekehrt  $h$  aus (22 a) berechnen, nämlich:

$$h = 8 \cdot 10^{-27}.$$

Rechnen wir statt mit (22 a) mit der früheren Formel (22), indem wir als absorbierte die ganze Energie des ankommenden Elektrons in Anschlag bringen, so ergibt sich analog in runden Zahlen:

$$\frac{E_k}{E_{r\ \text{pol}}} = 600, \quad h = 8 \cdot 10^{-26}.$$

<sup>1)</sup> Ich möchte auch darauf hinweisen, daß E. Carter (Dissertation Würzburg, Ann. Phys. 21, 955, 1906) das Verhältnis  $\frac{E_r}{E_k}$  proportional der Spannung, also proportional  $\beta^2$  findet. Dies würde im wesentlichen die in (22 a) angegebene Abhängigkeit von der Geschwindigkeit sein, wenn man annehmen dürfte, daß  $E_{r\ \text{pol}}$  ein von der Spannung unabhängiger Bruchteil der Gesamtenergie  $E_r$  der Röntgenstrahlen ist. Die Messungen von Carter sowie diejenigen von Angerer (Dissertation München, Ann. Phys. 21, 112, 1906) bestätigen durchaus die im Text benutzte Wiensche Beobachtungszahl für  $\frac{E_r}{E_h}$ .

Bestimmen wir andererseits (vgl. die Anm. zu p. 25) die „Wirkung“ des Bremsvorganges aus dem Zeitintegral der kinetischen Energie statt wie in (21b) aus dem Produkt der Bremszeit  $\tau$  in die gesamte kinetische Energie, so ergibt sich aus dem Planckschen  $h$  bez. aus dem Wienschen Energieverhältnis

$$\frac{E_k}{E_{\text{r pol}}} = 17000 \text{ bez. } h = 3 \cdot 10^{-27}.$$

Die in diesem und dem folgenden Paragraphen benutzten radioaktiven Daten verdanke ich Herrn H. W. Schmidt, dessen sachkundiger Rat mich auch bei der Verwendung dieser Daten wesentlich unterstützt hat.

### § 5. Über die Härte der $\gamma$ -Strahlen und die Impulsbreite der Röntgenstrahlen.

Als theoretisches Maß für die Härte der  $\gamma$ -Strahlen werden wir ihre Impulsbreite anzusehen haben. Sie ergibt sich leicht aus Figur 1 und zwar, wie ich schon früher für Röntgenstrahlen ausgeführt habe, für die verschiedenen Azimute  $\varphi$  von verschiedener Größe. Sehen wir nämlich in Figur 1  $O'$  als den Anfangspunkt,  $O''$  als den Endpunkt des Beschleunigungsweges an, so haben wir um  $O'$  eine Kugel von dem willkürlichen Radius  $cT$  ( $T =$  der seit dem Beginn der Beschleunigung verfloßenen Zeit), um  $O''$  eine Kugel vom Radius  $c(T - \tau)$  zu beschreiben ( $\tau =$  der ganzen Beschleunigungsdauer). Diese beiden Kugeln haben aber die Exzentrizität  $l$  und geben daher in verschiedenen Azimuten eine verschiedene Dicke der Störungszone oder eine verschiedene Impulsbreite. Der Mittelwert der Impulsbreite beträgt nach dem Gesagten

$$(23) \quad \lambda_m = c\tau$$

und entspricht dem Azimut  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; ihr Minimalwert gehört ersichtlich zum Azimut  $\varphi = 0$  und beträgt  $\lambda_{\min} = c\tau - l$ , ihr Maximalwert tritt für  $\varphi = \pi$  auf und beträgt  $\lambda_{\max} = c\tau + l$ ,

wo  $l = O' O''$  der ganze Beschleunigungsweg ist. Für ein beliebiges  $\varphi$  gilt offenbar

$$(23a) \quad \lambda = c\tau - l \cos \varphi,$$

wo  $l \cos \varphi$  die Strecke  $O' Q$  der Figur 1 bedeutet. Die Wahl des Buchstabens  $\lambda$  soll an die Analogie dieser Größe zur Wellenlänge des periodischen Lichts erinnern.

Wir berechnen das Verhältnis  $\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}$  einmal unter der Annahme konstanter Beschleunigung  $\dot{v}$ , wie ich sie früher für den Fall der Röntgenstrahlen machen durfte. Dann ist nach Gleichung (18)  $c\tau = \frac{2l}{\beta}$ , also:

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\beta}{1 + \frac{1}{2}\beta}.$$

Sodann unter der Annahme der konstanten Eigenbeschleunigung  $\dot{v}_0$ . Alsdann ist nach (19 a)

$$c\tau = \frac{l\beta}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}},$$

also:

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = \frac{\beta - 1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta + 1 - \sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Der Unterschied beider Formeln tritt natürlich wieder erst in der Nähe von  $\beta = 1$  zutage. Für  $\beta = \frac{1}{2}$  liefert z. B. die erste den Wert  $\frac{3}{5} = 0,60$ , die zweite den wenig davon verschiedenen Wert  $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,58$ ; dagegen folgt für  $\beta = \frac{9}{10}$  aus der ersten  $\frac{11}{9} = 0,38$ , aus der zweiten dagegen  $\sqrt{\frac{1}{19}} = 0,23$ . Die Unsymmetrie in der Verteilung der Härte auf die verschiedenen Azimute wird also bei sehr schnellen Strahlen gesteigert, wenn wir dabei, wie es sein muß, die (nach der Relativitätstheorie berechnete) Veränderlichkeit der Masse berücksichtigen.

Für den Mittelwert der Impulsbreite ergibt sich aus (23) und (18) (konstante Beschleunigung) der Wert

$$(24) \quad \lambda_m = \frac{2l}{\beta},$$

der sich nach (23) und (19 a) (konstante Eigenbeschleunigung) berichtigt zu:

$$(24 a) \quad \lambda_m = l \frac{\beta}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} = l \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}.$$

Auch dieser Wert wäre für  $\gamma$ -Strahlen noch weiter zu berichtigen. Zu dem Azimut  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , auf das sich dieser Wert  $\lambda_m$  bezieht (vgl. (23) und (23 a)), gehört ja nach unseren Figuren bei harten  $\gamma$ -Strahlen nur eine sehr geringfügige Energie; vielmehr wird das Maximum der Energie nach den Näherungsformeln (5) und (6) unter einem Winkel  $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma$  ausgestrahlt, zu dem bei kleinem  $\gamma$  ein Wert von

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{3} \gamma = 1 - \frac{1}{3} (1 - \beta)$$

gehört. Für diesen Winkel wird die zugehörige Impulsbreite nach (23 a) und (19 a):

$$\lambda = l \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} - 1 + \frac{1}{3} (1 - \beta) \right)$$

oder

$$(24 b) \quad \lambda = l \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \left( 1 + \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \left( 1 + \frac{\beta}{3} \right) \right).$$

Der genaue Wert wäre, wenn  $\varphi = \varphi_m$  den Winkel maximaler Emission bedeutet, nach Gleichung 23 a:

$$(24 c) \quad \lambda = l \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} - \cos \varphi_m \right).$$

Allen diesen Formeln für die mittlere oder maßgebende Impulsbreite ist gemeinsam eine gesetzmäßige Abnahme der Impulsbreite mit zunehmender Geschwindigkeit. Die Impulsbreite ist  $\infty$  für  $\beta = 0$  und fällt für  $\beta = 1$  bis zu  $2l$  nach (24), bis zu  $l$  nach (24a), bis zu 0 nach (24b) und (24c) herab. Der Abnahme der Impulsbreite entspricht nach allgemeiner Anschauung eine Zunahme der Härte. Diese wächst also, unter der vorläufigen Voraussetzung eines im wesentlichen gleich

bleibenden Wertes von  $l$ , sowohl bei Röntgen- wie bei  $\gamma$ -Strahlen mit wachsender Geschwindigkeit der erzeugenden Kathoden- oder  $\beta$ -Strahlen.

Als Beispiel diene die folgende Tabelle; in dieser bedeutet  $\nu_\beta$  bez.  $\nu_\gamma$  den Asorptionskoeffizienten der betreffenden  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Strahlen für die Längeneinheit in  $\text{cm}^{-1}$ ,  $D$  die Dichte des absorbierenden Materials ( $\frac{\nu}{D}$  ist mit einiger Annäherung vom Material unabhängig); die Zahlen für RaE sind der im vorigen Paragraphen zitierten Arbeit von Schmidt (Physikal. Zeitschr. 8), diejenigen für UrX und RaC der ebenda zitierten Arbeit von Soddy und Russell resp. von W. Wilson (vgl. Tabelle 2, p. 147) entnommen;  $\lambda$  ist für Röntgenstrahlen nach (24 a), für die verschiedenen  $\gamma$ -Strahlen nach (24 b) berechnet.

	Röntgenstr.	RaE	UrX	RaC
$\beta =$	0,2 bis 0,5	0,78	0,92	0,95
$\frac{\nu_\beta}{D} =$	—	15	5	1,8
$\frac{\nu_\gamma}{D} =$	4 bis 3	0,3	0,047	0,040
$\lambda =$	10 $l$ bis 4 $l$	1,2 $l$	0,55 $l$	0,40 $l$

Durch die Formeln dieses Paragraphen wird also  $\lambda$  mit dem Bremsweg bez. Beschleunigungsweg  $l$  in Beziehung gesetzt und erweist sich von derselben Größenordnung wie  $l$ . Diese Beziehung ist im wesentlichen geometrischer Natur. Der absolute Wert von  $\lambda$  und seine Abhängigkeit von  $\beta$  bleibt unbekannt, solange wir nicht  $l$  kennen.

Nun haben wir aber im vorigen Paragraphen, Gleichung (20),  $l$  mit  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  bez. bei Röntgenstrahlen mit  $\frac{E_k}{E_{r\text{ pot}}}$  in Zusammenhang gebracht. Wir können also auch  $\lambda$  durch diese Energieverhältnisse ausdrücken und dadurch auf Beobachtungsdaten reduzieren. Für harte  $\gamma$ -Strahlen ergibt sich so

nach Gleichung (24 b) und (20) als Impulsbreite für die Richtung maximaler Emission:

$$(25) \quad \lambda = \frac{e \left( \frac{e}{m_0} \right) E_\beta}{6 \pi c^2 E_\gamma} \left( 1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \left( 1 + \frac{\beta}{3} \right) \right);$$

ähnlich für Röntgenstrahlen nach Gleichung (24 a) und (20) als Impulsbreite für die Richtung  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (oben mit  $\lambda_m$  bezeichnet):

$$(25 a) \quad \lambda = \frac{e \left( \frac{e}{m_0} \right) E_k}{6 \pi c^2 E_{r \text{ pol}}} \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\frac{e^2}{6 \pi c^2 m_0} = 1,8 \cdot 10^{-13}$$

und nach Wien-Baßler

$$\frac{E_k}{E_{r \text{ pol}}} = \frac{10^4}{1,35}, \quad \beta = 0,43,$$

also für die recht harten Wienschen Röntgenstrahlen:

$$(26) \quad \lambda = 3 \cdot 10^{-9}.$$

Für die  $\gamma$ -Strahlen ergibt sich analog nach Gleichung (25) und der Tabelle von p. 26:

RaE	UrX	RaC
$\lambda = 3 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-11} \dots 2 \cdot 10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-13}$

Die Abnahme der Impulsbreite mit wachsender Geschwindigkeit gilt also für die ganze Reihe von den Röntgenstrahlen bis zu den  $\gamma$ -Strahlen des Radiums; ihr entspricht qualitativ die Zunahme der durch den Absorptionskoeffizienten bestimmten Härte in der Tabelle von p. 37.

Nehmen wir die Hypothese des vorigen Paragraphen hinzu,

nach der das Energieverhältnis  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  bez.  $\frac{E_k}{E_{r\text{ pol}}}$  mit dem Planckschen  $h$  zusammenhängt, so ergibt sich eine Formel, die  $\lambda$  ohne Zuhilfenahme von Energiebeobachtungen lediglich aus der Geschwindigkeit bestimmt. Man erhält so aus (25) und (22) für  $\gamma$ -Strahlen:

$$(27) \quad \lambda = \frac{h}{m_0 c} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \left( 1 + \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \left( 1 + \frac{\beta}{3} \right) \right)$$

und aus (25 a) und (22 a) für Röntgenstrahlen einfacher:

$$(27 \text{ a}) \quad \lambda = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta^2} (1 + \sqrt{1 - \beta^2}) = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27}, \quad \beta = 0,43$$

und

$$\frac{1}{m_0 c} = \frac{e_{\text{magn}}}{m_0} \frac{1}{e_{\text{stat}}} = \frac{1,7 \cdot 10^7}{4,7 \cdot 10^{-10}}$$

der mit dem obigen Werte (26) nahe übereinstimmende Wert

$$(26 \text{ a}) \quad \lambda = 2 \cdot 10^{-9}.$$

Diese nahe Übereinstimmung entspricht natürlich dem Umstande, daß wir im vorigen Paragraphen das von Wien beobachtete und auf Polarisation korrigierte Energieverhältnis  $\frac{E_k}{E_{r\text{ pol}}}$  sehr nahe aus dem Planckschen Werte von  $h$  berechnen konnten.

Der zu (27 a) führende Weg über (22 a) und (25 a) war ersichtlich recht indirekt. Der Einfachheit des Resultates entspricht besser die folgende direkte Ableitung. Die Impulsbreite für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ist nach (23 a)

$$\lambda = c \tau;$$

die Hypothese des Wirkungsquantums, angewandt auf den Absorptionsvorgang der Bremsung, liefert:

$$(28) \quad \tau E_{\text{kin}} = h,$$

also in Übereinstimmung mit (27 a):

$$(28 \text{ a}) \quad \lambda = \frac{c h}{E_{\text{kin}}} = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Der etwas komplizierte Ausdruck, den wir in (27) fanden, rührt nur daher, daß wir als emittierte Energie der radioaktiven Prozesse nicht die kinetische, sondern die gesamte Energie  $E + E_p$  nahmen und daß wir die Impulsbreite nicht für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , sondern für  $\varphi = \varphi_{\text{max}}$  bestimmten.

Der Wert (26) für  $\lambda$  ist etwa 25 mal so groß wie der von Wien in der früher zitierten Arbeit berechnete Wert  $\lambda = 1,15 \cdot 10^{-10}$ . Der Grund der Abweichung liegt weniger in der Verschiedenheit der Formeln (Wien rechnete damals nach der Absoluttheorie und mit konstanter Verzögerung  $\dot{v}$ , bei ihm  $j$  genannt, wir nach der Relativtheorie mit konstanter Eigenbeschleunigung  $\dot{v}_0$ ) als vielmehr in unserer Reduktion auf den polarisierten Anteil der Röntgenstrahlung, durch welche wir einen Faktor 20 einführten. Offenbar stellt diese unsere Berechnung von  $\lambda$  nur eine Modifikation des ursprünglichen Wienschen Gedankens dar.

Aber auch die Berechnung von  $\lambda$  aus dem Planckschen  $h$  ist an sich nicht neu. Sie wurde von Wien<sup>1)</sup> auf die sekundären Kathodenstrahlen, von Stark<sup>2)</sup> auf die primären angewandt. Bei beiden wird die mit (28) analoge Gleichung benutzt:

$$E_{\text{kin}} = h \nu, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}.$$

Daß dabei unter Anlehnung an die Optik  $\nu$  als Schwingungszahl,  $\lambda$  als Wellenlänge bezeichnet und daß  $E_{\text{kin}}$  nach der gewöhnlichen Formel durch  $\frac{m v^2}{2}$  ausgedrückt wird, ist natürlich kein bemerkenswerter Unterschied.

<sup>1)</sup> Göttinger Nachr. 1907.

<sup>2)</sup> Physikal. Zeitschr. 8, 881, 1907.

Um so wesentlicher scheint mir der folgende Unterschied in der Auffassung zu sein. Bei Wien besteht kein Zusammenhang zwischen seiner elektromagnetischen Berechnung von  $\lambda$  vom Jahre 1905 und seiner strahlungstheoretischen vom Jahre 1907. Beide geben recht verschiedene Werte und scheinen sich auszuschließen. Stark ist sogar geneigt, die gewöhnliche elektromagnetische Theorie bei den Elementarprozessen überhaupt und den Röntgenstrahlen insbesondere zu Gunsten der Strahlungstheorie aufzugeben und durch eine Quantentheorie zu ersetzen. Dagegen haben wir hier gesehen, daß beide Gesichtspunkte miteinander wohl verträglich sind. Wir haben die Emission der Röntgenstrahlen, ihrer Verteilung und Stärke nach, unter einfachsten Annahmen, aus der rein elektromagnetischen Theorie berechnet. Dabei blieb eine Konstante unbestimmt, die wir als Eigenverzögerung  $v_0$  oder als Bremsweg  $l$  oder als Bremsdauer  $\tau$  wählen konnten und über die uns die Theorie des elektromagnetischen Feldes nichts lehren kann. Diese Konstante ist eine Eigenschaft des bremsenden Moleküls; es lag daher nicht fern, sie aus der universellen Eigenschaft aller emittierenden oder absorbierenden Moleküle zu entnehmen, die in dem Planckschen Wirkungsquantum zum Ausdruck kommt. Erst durch dieses Eingreifen der Strahlungstheorie wird die elektromagnetische Theorie der Röntgenstrahlen völlig bestimmt. Beide Theorien schließen sich nicht aus, sondern ergänzen sich.

Das Eingreifen der Strahlungstheorie ist gewissermaßen ein äußerliches. Über den elektromagnetischen Mechanismus des  $h$  erfahren wir aus unserer Anwendung desselben auf die Röntgenstrahlung nichts. Sowenig wie die Existenz des Wirkungsquantums den elektromagnetischen Ausbreitungsvorgang stört (sie beeinflusst ihn nur durch Bestimmung eines sonst unbestimmten Parameters), sowenig kann die elektromagnetische Theorie die Existenz des Wirkungsquantums hindern oder erklären. So gut wie in der Optik alle Ergebnisse der Wellentheorie festzuhalten sind, z. B. die Folgerungen aus dem Huyghensschen Prinzip, die Anschauungen über Interferenz-

fähigkeit und Polarisation, so gut wie diese Ergebnisse durch die Plancksche Entdeckung nicht beeinträchtigt, sondern nur in Bezug auf die Entstehung und Vernichtung der optischen Wirkungen ergänzt werden, ebensogut können alle Folgerungen aus der Impulstheorie der Röntgenstrahlen mit dem Wirkungsquantum vereinigt werden, die Struktur und Polarisation der Röntgenstrahlen, von der ich in der genannten früheren Note gehandelt habe, die Ungleichförmigkeit der Härte unter verschiedenen Azimuten, von der im Anfang dieses Paragraphen die Rede war, die Beugung der Röntgenstrahlen, auf die ich demnächst zurückzukommen hoffe.

Aus unserem Zusammenhang zwischen der Stärke und Härte der polarisierten Röntgenstrahlung mit dem Wirkungsquantum ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen, die der experimentellen Prüfung wert sind. Die Stärke der polarisierten Strahlung müßte vom Material der Antikathode unabhängig sein nach Gleichung (22 a), ebenso ihre Impulsbreite nach Gleichung (27 a), die ihrem absoluten Wert nach aus Beugungsbildern<sup>1)</sup> zu entnehmen wäre, die sich aber qualitativ wohl auch in den Absorptionsmessungen zeigen müßte. Es müßte also der polarisierte Anteil bei einer Kohlenantikathode gleich groß sein wie der polarisierte Anteil bei einer Platinantikathode bezogen auf den gleichen Wert der Kathodenstrahlenergie. Der Unterschied beider würde nur in einer verschiedenen Größe des unpolarisierten (Fluoreszenzanteils) liegen. Der polarisierte Anteil müßte in ganz bestimmter Weise, nach Gleichung (22 a), von der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, also der Spannung abhängen, nämlich im wesentlichen der

<sup>1)</sup> Aus Beugungsbildern des polarisierten Anteils (!), die sich schwerlich werden realisieren lassen. Ich habe früher aus den Haga-Windschen Beugungsbildern auf  $\lambda = 1,310 \cdot 10^{-8}$  geschlossen. Dieses  $\lambda$  würde einer geringeren Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, nämlich, nach Gleichung (27 a) berechnet, dem Werte  $\beta = 0,19$  entsprechen, also etwa der Hälfte des recht hohen Wien'schen Wertes  $\beta = 0,43$ . Jedoch bedarf meine damalige Folgerung der Nachprüfung an den neueren Aufnahmen von Walter und Pohl und ist auch der Methode nach zu verschärfen.

Spannung proportional sein (vgl. die Anm. auf p. 33). Auch bei dem unpolarisierten Fluoreszenzanteil dürfte das Plancksche Wirkungsquantum eine Rolle spielen, wie ich schon früher bemerkte.<sup>1)</sup> An die Stelle unserer Gleichung (27)

$$\tau E_{\text{kin}} = h$$

würde dabei zu treten haben

$$\tau' E' = h,$$

wobei  $\tau'$  eine Eigenschwingungsdauer des Moleküls wäre und  $E'$  die Energie des unpolarisierten Anteils der Röntgenstrahlung von der Frequenz  $\frac{1}{\tau'}$ . Da  $E'$  kleiner sein müßte als die nach der Ausstrahlung des polarisierten Anteils verbleibende Energie  $E_{\text{kin}} - E_{\text{r pol}}$ , so würde sich notwendig ergeben  $\tau' > \tau$ , d. h. die unpolarisierte Strahlung (resp. ihre verschiedenen Bestandteile) ist weicher wie die polarisierte, was dem Befunde von Baßler entspricht. Bei dem Fluoreszenzanteil würde man also  $\tau'$  als gegeben durch die Moleküleigenschaften ansehen und  $E'$  aus der Planckschen Gleichung berechnen, während wir bei dem polarisierten Anteil  $E$  als durch die auffallende kinetische Energie gegeben ansahen und  $\tau$  durch die Plancksche Gleichung bestimmten. In solcher Weise könnte man mit den verschiedenen Eigenschwingungsdauern  $\tau'$  verfahren und zu jeder die zugehörige Energie  $E'$  bestimmen, von den kürzesten beginnend bis zu den sichtbaren und ultraroten. Der Rest der Energie würde für die Wärmebewegung des Moleküls verbleiben. Indessen sind solche weitergehenden Folgerungen zur Zeit wohl verfrüht.

1) l. c. Physikal. Zeitschr. 10, 970, 1909. Ich möchte bei dieser Gelegenheit die dortige Bemerkung: „Mit dem ersten „Bremsanteil“ der Strahlung scheint mir das Wirkungsquantum nichts zu tun zu haben“ zurücknehmen. Ich stand damals unter dem wohl allgemein verbreiteten Eindruck, daß das Wirkungsquantum nur für Vorgänge bestimmter Frequenz  $\nu$  in Frage kommen könne. Daß unsere Bremsdauer  $\tau$  an die Stelle des Planckschen  $\frac{1}{\nu}$  treten könne, habe ich erst jetzt gesehen.

## § 6. Diskussion der Voraussetzungen.

Für die Anwendung unserer Überlegungen auf die Schwankungserscheinungen muß die Hauptfrage sein: Sendet Ra, genauer gesagt RaC,  $\beta$ -Strahlen von so großer Geschwindigkeit aus, wie wir sie in Fig. 3 des § 2 voraussetzten?

### 1. Direkte Messung der Höchstgeschwindigkeiten.

Kaufmann<sup>1)</sup> gibt eine Sichtbarkeitsgrenze seiner photographischen Kurven an, aus der sich nach der Relativitätstheorie ein Wert  $\gamma = 1 - \beta < \frac{2}{100}$  berechnet. Ähnlich findet Paschen<sup>2)</sup> bei seinen Ablenkungsversuchen einen kontinuierlichen Übergang der  $\beta$ -Strahlgeschwindigkeiten bis zur Grenze der Lichtgeschwindigkeit. Eine neuere Arbeit von W. Wilson, aus der sich  $\beta = 0,95$  ergeben würde, wurde bereits in § 4 zitiert.

Nun kann man sich schwerlich Umstände vorstellen, durch welche die Geschwindigkeit des  $\beta$ -Teilchens auf seinem Wege erhöht würde, während andererseits Geschwindigkeitsverluste namentlich innerhalb des spezifisch schweren Radiumkorns, sehr plausibel sind. Aus dem Auftreten der genannten hohen Grenzgeschwindigkeiten wird man also auf das Vorhandensein von gleich hohen Anfangsgeschwindigkeiten und zwar in größerer Häufigkeit, als sie außerhalb des Radiums beobachtet werden, schließen dürfen.

### 2. Indirekte Bestimmung aus der verhältnismässigen Energie der $\gamma$ -Strahlen und ihrer Härte.

Die Tabelle von p. 26 für  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  und die Hypothese des Wirkungsquantums legen den Versuch nahe, den Ursprungswert der Geschwindigkeit der Radium- $\beta$ -Strahlen aus der zugehörigen  $\gamma$ -Strahlenergie zu berechnen, unter Zugrundelegung

<sup>1)</sup> Ann. Phys. 19, 487, 1906. Vgl. insbesondere in Anhang IV p. 551 den Grenzwert  $z = 0,06$ .

<sup>2)</sup> Ann. Phys. 14, 389, 1904.

der Gleichung (22) und des Planckschen Wertes  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ . Setzt man  $\delta = \sqrt{1 - \beta^2}$ , so wird:

$$\frac{1 - \beta^2}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) = \frac{\delta^2}{1 + \delta} = 1,6 \cdot 10^{-3}, \quad \delta = 4 \cdot 10^{-2},$$

$$\beta = 1 - 8 \cdot 10^{-4}.$$

Die verhältnismäßig große Energie der  $\gamma$ -Strahlen des Radiums würde also nach unserer theoretischen Formel auf einen viel größeren Wert für die bei der Emission der  $\beta$ -Strahlen maßgebende Geschwindigkeit der  $\beta$ -Strahlen schließen lassen, als er direkt beobachtet wurde; damit würde sich eine noch viel größere Unsymmetrie und Einseitigkeit der  $\gamma$ -Strahlemission ergeben, als sie Figur 2 selbst für  $\beta = 0,99$  zeigt. Natürlich ist unser Schluß sehr unsicher, da er außer auf der Hypothese des Wirkungsquantums ganz auf der Größe 2 für  $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$  beruht.

Auch die Härte der  $\gamma$ -Strahlen des Radiums (vgl. p. 37) gestattet einen ungefähren Schluß auf die Ursprungsgeschwindigkeit der für ihre Aussendung maßgebenden  $\beta$ -Strahlen. Da die Härte der  $\gamma$ -Strahlen von Ra größer als diejenige von UrX ist, wird man auch schließen dürfen, daß das maßgebende  $\beta$  größer als 0,92 sei. Es bleibe aber nicht unerwähnt, daß die p. 26 zitierte Untersuchung von Russell und Soddy die Berechtigung solcher Schlüsse beanstandet.

Neben dieser physikalischen Voraussetzung über die hohen  $\beta$ -Strahlgeschwindigkeiten beim Ra haben wir noch die mathematischen Voraussetzungen zu prüfen, die wir zur Vereinfachung der Rechnung gemacht haben. Sie betreffen den quasistationären Charakter, die Geradlinigkeit und Gleichmäßigkeit des Beschleunigungsvorganges.

#### a) Quasistationäre Bewegung.

In den Ausgangsformeln 2) und 4) war von der Ausdehnung des Elektrons oder vom „Elektronenradius“ nicht die Rede; auch werden diese Formeln in § 7 nach den Methoden der Relativitätstheorie unter der ausdrücklichen Voraussetzung

eines punktförmigen Elektrons abgeleitet. In der älteren Theorie würde hierdurch für die zuzulassende Beschleunigung eine Grenze<sup>1)</sup> gesetzt werden. Unterhalb dieser Grenze kann man die Bewegung als quasistationär behandeln, d. h. sowohl die Bestimmung des Feldes als auch die Dynamik des Elektrons, letztere durch Einführung einer nur vom augenblicklichen Bewegungszustande abhängigen Masse, vereinfachen; oberhalb dieser Grenze würde sowohl für das Feld wie für die Bewegungsgesetze die Vorgeschichte in Betracht kommen. Diese Grenze würde in unserem Falle etwa bei  $\beta = \frac{9}{10}$  liegen, wenn man die hierzu führende Beschleunigung durch das Gesetz des Wirkungsquantums gegeben denkt.

In der Relativitätstheorie dagegen muß man sich einstweilen prinzipiell auf quasistationäre Bewegungen beschränken, ohne deren Grenze angeben oder sie gar überschreiten zu können. Schon die Feldberechnung wird illusorisch bei wirklich beschleunigten Bewegungen, d. h. bei solchen, deren Geschwindigkeitsänderungen nicht mehr klein sind gegen  $c$  in derjenigen Zeit, die das Licht braucht, um das Elektron zu überstreichen. Hier würde die Gestalt des Elektrons in Frage kommen; und, wenn man auch über die Ruhgestalt des Elektrons eine spezielle Annahme machen wollte, die man gern vermeiden möchte, so würde doch die Gestalt bei beschleunigter Bewegung derzeit unbekannt sein; denn die einfache Übertragung der Lorentz-Kontraktion auf das Elektron ist wieder nur für quasistationäre Bewegungen widerspruchlos möglich, wie die Untersuchung des relativ-starren Körpers ergeben hat.

Unsere Rechnungen sind daher für die schnellen Geschwindigkeiten der Radioaktivität (nicht für den Fall der Röntgenstrahlen) mit einer gewissen theoretischen Unsicherheit behaftet, die sich zur Zeit nicht heben läßt. Man kann bemerken, daß sich später vielleicht gerade auf diesem Gebiet etwaige über den quasistationären Zustand hinausgehende Ansätze prüfen ließen.

<sup>1)</sup> Vgl. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 11, Gleichung (63b).

b) Geradlinigkeit und Gleichmäßigkeit des Beschleunigungsvorganges.

Eine Zickzackbewegung des Elektrons, wie sie bei der Absorption desselben in der Antikathode vielfach in Betracht gezogen wird, die wir aber auch für diesen Fall im folgenden zurückzuweisen haben werden, scheint für den Elementarprozeß der Emission eines  $\beta$ -Teilchens aus dem Radiummolekül keinen rechten Sinn zu haben. Vielmehr wird man hier den Vorgang des Austritts durch eine kontinuierliche Bahn beschreiben können, die durch ihre Tangente im Momente des Austretens, also durch eine Gerade, ersetzt werden kann.

Dagegen scheint die Annahme eines Anwachsens der Geschwindigkeit von 0 bis zu ihrem Endwerte recht willkürlich. Man wird eher geneigt sein, dem Elektron im Innern des instabilen Radiumatoms eine ursprüngliche intratomistische Geschwindigkeit zuzuschreiben und den Beschleunigungsvorgang nur als Erhöhung dieser Anfangsgeschwindigkeit auf die Größe der Austrittsgeschwindigkeit anzusehen. Wir haben zu betonen, daß bei dieser Auffassung an der Struktur und Symmetrie des  $\gamma$ -Strahls sehr wenig geändert wird, wenn die Austrittsgeschwindigkeit nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt. In der Tat rührt die Unsymmetrie nur von denjenigen Teilen des Beschleunigungsvorganges her (vgl. den Anfang von § 2), in denen die Geschwindigkeit mit  $c$  vergleichbar ist; auch ist die Ausstrahlungsenergie dieser Teile so überwiegend, daß eine Abänderung oder Fortlassung der Teile mit kleiner Geschwindigkeit für das Resultat belanglos ist. Dies kommt auch in unserer obigen Rechnung zum Ausdruck. In Gleichung (4) rührte der Term  $-1$  von dem Anfangszustande  $\beta=0$  her; dieser Term konnte aber in der Näherung (6) gegen den Beitrag des Endzustandes vollständig vernachlässigt werden. Es würde sich nichts daran ändern, wenn man statt  $\beta=0$  als Anfangsgeschwindigkeit etwa  $\beta_0 = \frac{1}{2}$  ansehen wollte. Der fragliche Term würde dann statt  $-1$  lauten:

$$-\frac{1}{(1 - \beta_0 \cos \varphi)^4}$$

und konsequenterweise ebenso zu vernachlässigen sein, wenn die Endgeschwindigkeit nahezu  $c$  ist. Ähnlich bei der Berechnung der gesamten Ausstrahlung  $E_\gamma$ . Bei der Anfangsgeschwindigkeit  $\beta_0$  wäre Gleichung (15) zu korrigieren in

$$E_\gamma = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} \left( \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \right).$$

Gleichung (19) in

$$\dot{v}_0 = \frac{c^2}{l} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \right).$$

Nehmen wir  $\beta_0 = \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{9}{10}$ , so würde das Zusatzglied eine verhältnismäßige Änderung von  $\frac{1}{4}$  bez.  $\frac{1}{2}$  des ganzen Wertes bewirken; nehmen wir  $\beta_0$  nicht so hoch oder  $\beta$  höher, so wird die Änderung noch kleiner. Gegenüber der Unsicherheit der von uns benutzten experimentellen Daten kommt daher die durch den Anfangszustand bedingte Willkür kaum in Frage.

Was endlich die Annahme einer gleichmäßigen Beschleunigung betrifft, so wurde im § 3 gezeigt, daß die Energieverteilung auf die einzelnen Azimute in den beiden Fällen (konstantes  $\dot{v}$  und konstantes  $\dot{v}_0$ ) wesentlich übereinstimmt. Wir dürfen daraus wohl weitergehend schließen, daß die besonderen Annahmen über die Art des Beschleunigungsvorganges überhaupt für die Struktur des  $\gamma$ -Strahls, soweit sie für die Schwankungsmessungen in Frage kommt, ziemlich belanglos ist. Größer ist der Einfluß des Beschleunigungsverlaufes auf die Größe der ausgestrahlten Gesamtenergie. In dieser Hinsicht haben wir uns damit begnügt, die nächstliegende Annahme konstanter Eigenbeschleunigung zahlenmäßig zu verfolgen.

Für unsere Theorie der Röntgenstrahlen ist die Annahme wesentlich, daß die ganze Energie des Kathodenteilchens in einem Zuge vernichtet wird, also nicht durch eine Folge von Absorptionsprozessen, wie sie sich bei einem Zickzackwege ergeben würde. Die entsprechende Annahme bei der Emission

der  $\gamma$ -Strahlen lag in der Natur der Sache und entsprach dem einmaligen Austritt des Elektrons aus dem Radiummolekül. Aber auch im Falle der Röntgenstrahlen läßt sie sich als notwendig nachweisen, allerdings nur dann, wenn wir uns auf den Standpunkt der Theorie des Wirkungsquantums stellen. Da dieser Punkt wesentlich ist, gehen wir auf ihn noch näher ein. Wir können dabei für die Zwecke der folgenden Abschätzung  $\beta^2$  als klein voraussetzen und mit den gewöhnlichen Formeln für die lebendige Kraft, den Impuls etc. rechnen.

Wird die gesamte Energie  $E_k = \frac{m}{2} v^2$  des Kathodenstrahls in einem Zuge abgebremst, so folgt die Bremsdauer  $\tau$  aus

$$E_k \tau = h,$$

die Beschleunigung aus

$$\dot{v} \tau = v.$$

Für die ausgestrahlte Energie können wir nach (15) angenähert schreiben:

$$E_r = \frac{e^2 \dot{v} v}{6 \pi c},$$

also:

$$\frac{E_r}{E_k} = \frac{e^2 \dot{v} \tau v}{6 \pi c h} = \frac{e^2 v^2}{6 \pi c h}.$$

Wir setzen andererseits voraus, daß die Energie  $E_k$  in  $n$  gleichen Teilen  $E'$  abgebremst werde, wobei

$$E' = \frac{1}{n} E_k.$$

Die zugehörigen Bremsdauern  $\tau'$  werden dann ebenfalls untereinander gleich und jede  $n$  mal so groß wie die frühere. Denn es gilt

$$E' \tau' = h, \quad \text{also } \tau' = n \tau.$$

Ist  $v_1$  die Geschwindigkeit nach der ersten,  $v_2$  nach der zweiten Teilbremsung, so gilt

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_1^2) = \frac{1}{n} \frac{m}{2} v^2, \quad \frac{v_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$\frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{n} \frac{m}{2} v^2, \quad \frac{v_2}{v} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$$

— — — — — , — — — — —

$$\frac{m}{2} (v_{n-1}^2 - v_n^2) = \frac{1}{n} \frac{m}{2} v^2, \quad \frac{v_n}{v} = \sqrt{1 - \frac{n}{n}} = 0.$$

Die zugehörigen Beschleunigungen sind:

$$\dot{v}_1 \tau' = v - v_1$$

$$\dot{v}_2 \tau' = v_1 - v_2$$

— — — — —

$$\dot{v}_n \tau' = v_{n-1}$$

Ihnen entsprechen die ausgestrahlten Energiemengen:

$$E_{r1} = \frac{e^2 \dot{v}_1 (v - v_1)}{6 \pi c} = \frac{e^2 (v - v_1)^2}{6 \pi c \tau'}$$

$$E_{r2} = \frac{e^2 \dot{v}_2 (v_1 - v_2)}{6 \pi c} = \frac{e^2 (v_1 - v_2)^2}{6 \pi c \tau'}$$

— — — — —

$$E_{rn} = \frac{e^2 \dot{v}_n v_{n-1}}{6 \pi c} = \frac{e^2 v_{n-1}^2}{6 \pi c \tau'}$$

Die gesamte Ausstrahlung wird also:

$$E_r = \frac{e^2}{6 \pi c \tau'} \{ (v - v_1)^2 + (v_1 - v_2)^2 + \cdots + v_{n-1}^2 \}.$$

Division mit  $E'$  gibt wegen  $E' \tau' = h$  und  $E' = \frac{1}{n} E_k$ :

$$\frac{E_r}{E_k} = \frac{e^2 v^2}{6 \pi c h} N, \quad N = \frac{1}{n} \left\{ \left(1 - \frac{v_1}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{v} - \frac{v_2}{v}\right)^2 + \cdots + \frac{v_{n-1}^2}{v^2} \right\}.$$

Gegenüber der Bremsung in einem Zuge tritt also jetzt der Faktor  $N$  in der Formel für die verhältnismäßige Energie

der Röntgenstrahlen hinzu. Mit den angeführten Werten von  $\frac{v_1}{v}$ ,  $\frac{v_2}{v_1}$ , . . . ergibt sich durch direkte Ausrechnung für

$n =$	2	3	4
$N =$	0,29	0,14	0,08
$N - \frac{1}{n^2} =$	0,04	0,03	0,02

Die letzte Zeile zeigt, daß  $N$  wie  $n^{-2}$  abnimmt,<sup>1)</sup> mithin für große  $n$  sehr klein wird. Da wir in § 4 die beobachtete (resp. die aus den Beobachtungen geschlossene) polarisierte Energie der Röntgenstrahlen in vorzüglicher Übereinstimmung fanden mit der aus dem Wirkungsquantum unter der Annahme einer Absorption in einem Zuge berechneten Energie, ergibt sich die unter der Annahme von  $n$  Teilbremsungen berechnete Energie zu klein. Jene Übereinstimmung kann also vom Standpunkte des Wirkungsquantums aus als Beleg dafür angesehen werden, daß die Erzeugung der Röntgenstrahlen ein intramolekularer Prozeß ist und in einem Zuge erfolgt.

Gibt man diesen Schluß zu, so verliert auch im Falle der Röntgenstrahlen die Annahme eines geradlinigen Bremsweges und der gleichmäßigen Beschleunigung den Anschein der Willkür.

### § 7. Berechnung der Ausstrahlung nach den Methoden der Relativitätstheorie.

Die große Vereinfachung, welche die Relativitätstheorie nicht nur für die physikalische Auffassung sondern auch für die mathematische Durchrechnung der elektromagnetischen Probleme gebracht hat, zeigt sich recht deutlich, wenn wir an die Ableitung der Ausstrahlungsformel (2) gehen. Ich knüpfe dabei an eine Arbeit<sup>2)</sup> an, in der ich die Minkowski-

<sup>1)</sup> Genauer wie  $n^{-2} (1 + \frac{1}{2} \log n)$ .

<sup>2)</sup> Annalen der Physik 33, 649, 1910.

schen Methoden durch reichlichere Verwendung vierdimensional-geometrischer Vorstellungen zu erläutern suchte. Dort ergab sich für den Sechservektor  $f$  des Feldes, dessen drei räumliche Komponenten gleich der magnetischen Feldstärke und dessen drei raumzeitliche Komponenten gleich  $-i$  mal der elektrischen Feldstärke sind, in Gleichung (30) der folgende Ausdruck:

$$(29) \quad 2\pi^2 f = \int \frac{[\mathfrak{R}P]}{R^3} d\Sigma.$$

$\mathfrak{R}$  ist der Vierervektor von dem Aufpunkte  $x_0 y_0 z_0 l_0$  nach dem Integrationspunkte  $xyz l$ , beide als „Weltpunkte“ aufgefaßt:  $\mathfrak{R} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0, l - l_0)$ ; die vierte Koordinate  $l$  bedeutet den „imaginären Lichtweg“  $l = ict$  bez.  $l_0 = ict_0$ .  $P$  ist der Vierervektor der im Integrationspunkte befindlichen Ladung  $q$  und Geschwindigkeit  $v$ :

$$P = \left( q \frac{v_x}{c}, q \frac{v_y}{c}, q \frac{v_z}{c}, iq \right).$$

$[\mathfrak{R}P]$  meint den aus den Vierervektoren  $\mathfrak{R}$  und  $P$  gebildeten Sechservektor, das Parallelogramm aus  $\mathfrak{R}$  und  $P$  nach Größe, Lage und Sinn, dessen  $xy$ -Komponente z. B. ist:

$$[\mathfrak{R}P]_{xy} = \mathfrak{R}_x P_y - \mathfrak{R}_y P_x.$$

$R$  ist die Länge des Vektors  $\mathfrak{R}$ :

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (l - l_0)^2$$

und  $d\Sigma$  das vierdimensionale Raumelement

$$d\Sigma = dx dy dz dl.$$

Das betrachtete elektrische System kann beliebig gestaltet und bewegt sein. Wird es insbesondere als punktförmig angesehen, so läßt sich nach den Gleichungen (29 b) und (29 c) der zitierten Arbeit der raumartige Teil der Integration ausführen und man erhält aus der vorstehenden Gleichung (29):

$$(30) \quad 2\pi^2 f = ie \int \frac{[\mathfrak{R}Q]}{R^3} d\tau.$$

Hier ist

$$\mathfrak{B} = \left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dl}{d\tau} \right)$$

der auf den Betrag  $ic$  normierte vierdimensionale Geschwindigkeitsvektor der punktförmig konzentrierten Ladung  $e$ ,  $d\tau$  das Element der „Eigenzeit“, welches gleich ist dem mit  $ic$  dividierten Weltlinienelement  $ds$ :

$$(31) \quad d\tau = \frac{1}{ic} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2}.$$

Die Integration ist in der komplexen  $\tau$ -Ebene auf einem im Uhrzeigersinne verlaufenden Umgang um denjenigen Punkt zu erstrecken, in dem  $R^2$  verschwindet; der betreffende  $\tau$ -Wert, der als  $\tau = 0$  gewählt werden kann, charakterisiert den zum Aufpunkte gehörigen auf der Weltlinie der Ladung gelegenen „Lichtpunkt“. Das Integral kann nach dem Cauchyschen Satz berechnet werden und liefert  $-2\pi i$  mal dem Residuum von  $\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]}{R^4}$  im Punkte  $\tau = 0$ , also, wenn letzteres durch  $\{ \}$  angedeutet wird:

$$(32) \quad \pi f = e \left\{ \frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]}{R^4} \right\}.$$

In der Umgebung des Punktes  $\tau = 0$  gilt die Entwicklung:

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{R}\mathfrak{B}]_0 + \tau([\mathfrak{R}'\mathfrak{B}]_0 + [\mathfrak{R}\mathfrak{B}' ]_0) + \dots,$$

$\mathfrak{B}$  ist der nach  $\tau$  genommene Beschleunigungsvektor

$$\mathfrak{B} = \left( \frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, \frac{d^2l}{d\tau^2} \right);$$

in gleicher Bedeutung ist  $\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$  und daher  $[\mathfrak{R}'\mathfrak{B}] = 0$ , also einfacher:

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{R}\mathfrak{B}]_0 + \tau[\mathfrak{R}\mathfrak{B}' ]_0.$$

Bei der Entwicklung von  $R^2$  ist zu beachten, daß  $R_0^2$  nach Definition des Lichtpunktes gleich Null ist; ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{dR^2}{d\tau} &= 2(x - x_0) \frac{dx}{d\tau} + 2(y - y_0) \frac{dy}{d\tau} + 2(z - z_0) \frac{dz}{d\tau} \\ &\quad + 2(l - l_0) \frac{dl}{d\tau} = 2(\Re \mathfrak{B}), \\ \frac{d^2 R^2}{d\tau^2} &= 2(\Re \mathfrak{B}) + 2(\Re \mathfrak{B}'). \end{aligned}$$

$(\Re \mathfrak{B})$  ist das skalare Produkt aus  $\Re$  und  $\mathfrak{B}$  und daher  $(\Re \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \mathfrak{B})$  das Quadrat des Betrages von  $\mathfrak{B}$ , welches nach obigem zu  $-c^2$  normiert war. Also:

$$\begin{aligned} R^2 &= 2\tau(\Re \mathfrak{B})_0 + \tau^2(-c^2 + (\Re \mathfrak{B}')_0) + \dots \\ \frac{1}{R^4} &= \frac{1}{4\tau^2(\Re \mathfrak{B}'_0)^2} \left( 1 + \tau \frac{c^2 - (\Re \mathfrak{B}')_0}{(\Re \mathfrak{B}'_0)} \right). \end{aligned}$$

Um das Residuum zu bestimmen, haben wir also in dem Ausdruck

$$\frac{[\Re \mathfrak{B}]_0 + \tau [\Re \mathfrak{B}']_0}{4\tau^2(\Re \mathfrak{B}'_0)^2} \left( 1 + \tau \frac{c^2 - (\Re \mathfrak{B}')_0}{(\Re \mathfrak{B}'_0)} \right)$$

den Faktor von  $\frac{1}{\tau}$  aufzusuchen. Dieser ist:

$$\frac{1}{4}(c^2 - (\Re \mathfrak{B}')_0) \frac{[\Re \mathfrak{B}]_0}{(\Re \mathfrak{B}'_0)^3} + \frac{1}{4} \frac{[\Re \mathfrak{B}']_0}{(\Re \mathfrak{B}'_0)^2},$$

oder bei Weglassung des nunmehr überflüssigen Index 0 als Wert des gesuchten Residuums:

$$\frac{c^2 [\Re \mathfrak{B}]}{4(\Re \mathfrak{B})^3} + \frac{1}{4} \frac{(\Re \mathfrak{B}) [\Re \mathfrak{B}'] - (\Re \mathfrak{B}') [\Re \mathfrak{B}]}{(\Re \mathfrak{B})^3}.$$

Nach (32) ergibt sich nunmehr:

$$(33) \quad \frac{4\pi}{e} (\Re \mathfrak{B})^3 f = c^2 [\Re \mathfrak{B}] + (\Re \mathfrak{B}) [\Re \mathfrak{B}'] - (\Re \mathfrak{B}') [\Re \mathfrak{B}].$$

Die beiden letzten Terme der rechten Seite lassen sich in einen zusammenziehen. Für beliebige Vierervektoren  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$  gilt nämlich:

$$(34) \quad (\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}),$$

geradeso wie bei gewöhnlichen dreidimensionalen Vektoren, nur daß man dort die links gemeinte Produktbildung aus einem Vektor erster Art  $\mathfrak{B}$  und einem Vektor zweiter Art  $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$  als Vektorprodukt zu schreiben und in eckige Klammern zu setzen gewohnt ist, während die formale Bildungsweise genau derjenigen des skalaren Produktes entspricht. Gleichung (34) läßt sich entweder analytisch durch Ausrechnung der Komponenten oder geometrisch<sup>1)</sup> beweisen. Aus (34) folgt weiter durch vektorielle Multiplikation mit einem beliebigen Vierervektor  $\mathfrak{A}$ :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{A}\mathfrak{N}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}](\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - [\mathfrak{A}\mathfrak{D}](\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \\ \quad \text{mit der Abkürzung} \\ \mathfrak{N} = (\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]). \end{array} \right.$$

Identifiziert man jetzt in der allgemeinen Formel (35) die Vektoren

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{C} \quad \mathfrak{D}$$

bez. mit

$$\mathfrak{N} \quad \mathfrak{N} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{B},$$

so hat man:

<sup>1)</sup> Die linke Seite von (34) bedeutet geometrisch das Parallelepiped aus  $\mathfrak{B}$  und der Ergänzung  $[\mathfrak{C}^*\mathfrak{D}^*]$  des Parallelogrammes  $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ , vgl. meine Arbeit „Zur Relativitätstheorie I“, Ann. d. Phys. 32, 749, 1910, § 3 B. Das Parallelepiped ist als dreidimensionales Raumstück ein Vektor dritter Art, welcher durch seine Ergänzung, einen Vektor erster Art  $\mathfrak{N}$ , ersetzt werden kann, welcher senkrecht auf dem das Parallelepiped enthaltenden Raum errichtet ist.  $\mathfrak{N}$  steht hiernach senkrecht auf  $\mathfrak{C}^*$  und  $\mathfrak{D}^*$  und liegt deshalb in der Ebene von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{D}$ . Daher hat man, wenn  $\alpha, \beta$  unbekannte Faktoren bedeuten:  $\mathfrak{N} = \alpha\mathfrak{C} + \beta\mathfrak{D}$ .

$\mathfrak{N}$  steht aber auch senkrecht auf  $\mathfrak{B}$ . Deshalb muß weiter  $(\mathfrak{B}\mathfrak{N}) = 0$  sein, d. h.

$$\alpha(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + \beta(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = 0; \quad \alpha = \gamma(\mathfrak{B}\mathfrak{D}); \quad \beta = -\gamma(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Der noch unbekannte Faktor  $\gamma$  ist eine reine von  $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  unabhängige Zahl und bestimmt sich bei spezieller Wahl dieser Vektoren leicht zu 1. Mithin folgt die Gleichung (34) des Textes:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

$$(36) \quad \begin{aligned} [\mathfrak{R} \mathfrak{N}] &= [\mathfrak{R} \mathfrak{B}] (\mathfrak{R} \mathfrak{B}) - [\mathfrak{R} \mathfrak{B}] (\mathfrak{R} \mathfrak{B}), \\ \mathfrak{N} &= (\mathfrak{R} [\mathfrak{B} \mathfrak{B}]). \end{aligned}$$

Statt (33) kann man also einfacher schreiben:

$$(37) \quad 4 \pi f = \frac{e}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3} [\mathfrak{R}, e^2 \mathfrak{B} - \mathfrak{N}].$$

Dies ist die invariante, typische Darstellung des Feldes durch Weltvektoren. Sie ist von der Wahl des Bezugssystems vollständig unabhängig und gilt ebensowohl für stationäre wie für quasistationäre Bewegungen, für longitudinale wie für transversale Beschleunigungen. Insbesondere wird für stationäre Bewegungen  $\mathfrak{B}$  und daher  $\mathfrak{N}$  gleich Null, also:

$$(37a) \quad 4 \pi f = \frac{e c^2 [\mathfrak{R} \mathfrak{B}]}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3}.$$

Diese Formel enthält in konziser Form alles, was über die Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraftlinien um ein gleichförmig bewegtes Elektron bekannt ist. Bei nicht stationärer Bewegung kommt zu diesem Ausdruck, dem „Geschwindigkeitsanteil“ des Feldes, ein „Beschleunigungsanteil“ hinzu, der seinerseits gegeben ist durch:

$$(37b) \quad 4 \pi f = - \frac{e [\mathfrak{R} \mathfrak{N}]}{(\mathfrak{R} \mathfrak{B})^3}, \quad \mathfrak{N} = (\mathfrak{R} [\mathfrak{B} \mathfrak{B}]).$$

In größerer Entfernung vom Elektron ist, wie man leicht nachrechnet, der Geschwindigkeitsanteil gegen den Beschleunigungsanteil zu vernachlässigen, so daß wir uns im folgenden nur mit letzterem zu befassen haben.

Zur Ausrechnung der rechten Seite von (37 b) haben wir uns der Bedeutung von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}$  zu erinnern. Es war:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \left( \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dl}{d\tau} \right), \\ \mathfrak{B} &= \left( \frac{d^2 x}{d\tau^2}, \frac{d^2 y}{d\tau^2}, \frac{d^2 z}{d\tau^2}, \frac{d^2 l}{d\tau^2} \right) \end{aligned}$$

Wir nehmen die dreidimensionale Geschwindigkeit  $v$  und Beschleunigung  $\dot{v}$  als gleichgerichtet an (longitudinale Beschleunigung) und zwar nach der  $x$ -Achse. Dann ist:

$$\mathfrak{B} = (v, 0, 0, ic) \frac{dt}{d\tau} = (v, 0, 0, ic) \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

da nach Definition (31)

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ist. Hieraus entsteht durch Differentiation nach  $t$  zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} &= \left( \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0, ic \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= \left( \frac{\dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^2 \dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, 0, \frac{i\beta \dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= (1, 0, 0, i\beta) \frac{\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

und daher

$$(38) \quad \mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = (1, 0, 0, i\beta) \frac{\dot{v}}{(1-\beta^2)^2}.$$

Der obige Wert von  $\mathfrak{B}$  kann geschrieben werden:

$$(38a) \quad \mathfrak{B} = (\beta, 0, 0, i) \frac{c}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus berechnet man den Sechservektor  $[\mathfrak{B}\mathfrak{B}]$ , indem man die zweireihigen Unterdeterminanten bildet, die nach Reihenfolge und Vorzeichen durch die folgenden Kombinationen der vier Indices  $x, y, z, l$  zu bilden sind:

$$(39) \quad yz, zx, xy, xl, yl, zl;$$

zum Beispiel:

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{xy} = \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{vc}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{B}\mathfrak{B}] &= (0, 0, 0, -i(1 - \beta^2), 0, 0) \frac{c\dot{v}}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= (0, 0, 0, -i, 0, 0) \frac{c\dot{v}}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Irgend eine Komponente  $j = xyz l$  des Vierervektors  $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}[\mathfrak{B}\mathfrak{B}])$  rechnet sich jetzt nach dem Schema:

$$\mathfrak{R}_j = \mathfrak{R}_x [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{jx} + \mathfrak{R}_y [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{jy} + \mathfrak{R}_z [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{jz} + \mathfrak{R}_l [\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{jl}.$$

Man erhält also mit Rücksicht auf  $[\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{lx} = -[\mathfrak{B}\mathfrak{B}]_{xl}$

$$(40) \quad \mathfrak{R} = (-i\mathfrak{R}_l, 0, 0, i\mathfrak{R}_x) \frac{c\dot{v}}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man wie früher mit  $r$  den dreidimensionalen Abstand vom Orte des strahlenden Elektrons nach dem Aufpunkte, mit  $\varphi$  den Winkel zwischen der  $x$ -Achse und  $r$ , so hat man

$$\mathfrak{R}_x = x - x_0 = -r \cos \varphi$$

und wegen  $R^2 = 0$  (Definition des Lichtpunktes):

$$\mathfrak{R}_l = -ir.$$

Denkt man den Aufpunkt in der  $xy$ -Ebene des dreidimensionalen Koordinatensystems gelegen, so gilt hiernach für den Vektor  $\mathfrak{R}$ :

$$(41) \quad \mathfrak{R} = -(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, i)r.$$

Statt (40) kann man also auch schreiben:

$$(40a) \quad \mathfrak{R} = -(1, 0, 0, i \cos \varphi) \frac{c\dot{v}r}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bilden wir nun das Produkt  $[\mathfrak{R}\mathfrak{R}]$  aus (41) und (40a), so ergibt sich für die in der Reihenfolge (39) genommenen Komponenten:

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{R}] = (0, 0, -\sin \varphi, -i(1 - \cos^2 \varphi), i \sin \varphi \cos \varphi, 0) \frac{c\dot{v}r^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bilden wir andererseits das Produkt  $(\mathfrak{H} \mathfrak{B})$  aus (41) und (38 a), so kommt

$$(\mathfrak{H} \mathfrak{B}) = (1 - \beta \cos \varphi) \frac{r e}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Somit wird schließlich nach (37 b):

$$f = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r (1 - \beta \cos \varphi)^3} (0, 0, \sin \varphi, i \sin^2 \varphi, -i \sin \varphi \cos \varphi, 0).$$

Vergleichen wir hiermit den Aufbau des Feldvektors  $f$  aus magnetischer und elektrischer Feldstärke:

$$f = (\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z, -i \mathfrak{E}_x, -i \mathfrak{E}_y, -i \mathfrak{E}_z),$$

so folgt:

$$\mathfrak{H}_z = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r (1 - \beta \cos \varphi)^3}, \quad \mathfrak{E}_z = 0,$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{-e \dot{v}}{4 \pi c^2 r (1 - \beta \cos \varphi)^3}, \quad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r (1 - \beta \cos \varphi)^3}, \quad \mathfrak{H}_y = 0.$$

Für die resultierenden Feldstärken  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{E}$  ergibt sich also einfach:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H} = \mathfrak{E} = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r (1 - \beta \cos \varphi)^3} \\ \text{sowie die bekannte Regel} \\ \mathfrak{H} \perp \mathfrak{E} \text{ oder } (\mathfrak{H} \mathfrak{E}) = 0. \end{array} \right.$$

Die beiden letzten Aussagen haben eine besonders einfache vierdimensionale Bedeutung; sie besagen, daß die beiden Invarianten des Sechservektors  $(ff)$  und  $(ff^*)$  verschwinden, indem die erstere den Wert  $\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2$ , die letztere den Wert  $2(\mathfrak{H} \mathfrak{E})$  hat. In großer Entfernung von der Strahlungsquelle hat also das emittierte Feld die Struktur eines speziellen Sechservektors (einfaches Flächenstück,  $(ff^*) = 0$ ) von verschwindendem Flächeninhalt  $((ff) = 0)$ .

Der auf die Zeiteinheit bezogene Energiefluß  $\mathfrak{S}'$  durch eine senkrecht gegen  $r$  gestellte Flächeneinheit berechnet sich jetzt vermöge (41) einfach zu

$$\mathfrak{S}' = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16 \pi^2 c^3 r^2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^6},$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (2).

---