J. Albrecht Eulers

Versuch

die Figur der Erden durch Beobachtungen des Monds zu bestimmen.

Als die Pariserakademie der Wissenschaften den höchstrühmlichen Entschluß faßte, die Parallaxe des Monds auf das genaueste zu bestimmen, so wurden zu diesem Ende zwey ihrer geschicktesten Mitglieder (*) an zwey weit von einander entfernte und (so viel als es möglich war) auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegene Oerter verschicket, um daselbst die mittäglichen Höhen des Mondes auf das fleißigste zu beobachten. Es würde aber nichts destoweniger dieser beyden Mitglieder Mühe und Fleiß fruchtlos geblieben seyn, und die Akademie würde sich auch nicht geschmeichelt haben, die wahre Parallaxe des Mondes aus diesen ihren Beobachtungen herausbringen zu können, wenn sie sich vorhero nicht von der wahren Figur der Erde durch die bekannten Ausmessungen versichert hätte. Wäre die Erde vollkommen kugelrund, so hätte die Bestimmung

der

(*) Die Herren de la Caille und de la Lande: ersterer war nach dem Vorgebürge der guten Hofnung und letzterer nach Berlin abgereiset; außer diesen hatte sich noch der verstorbene Professor Grischow mit Genehmhaltung der rußisch = kaiserlichen Akademie zu Petersburg nach der Insel Oesel begeben, um daselbst mit ersteren gemeinschaftlich die Mondshöhen zu beobachten.

der Parallaxe keine Schwierigkeit auf sich. Denn da alsdenn beyde Beobachter, an welchen Oertern des Mittagskreißes sie sich auch befänden, gleichweit von dem Mittelpunct der Erde entfernt wären, so würde durch ihre übereinstimmenden Beobachtungen die Entfernung des Monds durch eine und eben dieselbe Einheit, nämlich durch den Halbmesser der Erde bestimmt, und die Parallaxe des Monds leicht gefunden werden können.

Eine ganz andere Bewandtniß aber hat es hingegen, da die Erde in der That nicht genau kugelrund ist: dann weil in diesem Fall die Beobachter sich meistentheils in verschiedenen Entfernungen von dem Mittelpunct der Erde befinden, so ist eine genaue Känntniß dieser Verschiedenheit der Entfernungen und ihrer wahren Größe unumgänglich nöthig, um die wahre Entfernung des Monds von dem Mittelpunct der Erde, und seine Parallaxe aus den Beobachtungen schließen zu können.

Da es also unläugbar ist, daß die auf einem nnd eben demselben Mittagskreise beobachteten Mondshöhen von der Figur der Erde abhängen, und diese hinwiederum einen Einfluß in jene nothwendig haben müsse, so stehet mit allem Recht zu vermuthen, daß die Beobachtungen der mittäglichen Mondshöhen darzu dienen könnten, die Figur der Erde aus denselben zu bestimmen. Es müßten nämlich zu diesem Ende verschiedene Beobachter die mittäglichen scheinbaren Höhen des Monds an eben so viel verschiedenen aber auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegenen Oertern messen, und eine Vergleichung aller Höhen, so zu gleicher Zeit genommen worden sind, würde alsdenn die Figur des Mittagskreises geben, und folglich auch die ganze Figur der Erde, wenn sonsten dieselbe nicht gar zu unordentlich ist. Ob nun gleich diese Art die Figur der Erde zu bestimmen, allem Anscheine nach weit unter derjenigen zu setzen ist, deren sich die Pariserakademie bedienet hatte, und durch welche uns die Figur der Erde so genau bekannt geworden ist, als es nur immer möglich seyn kann, so möchte es dennoch in einer andern Absicht nicht undienlich seyn, theils zu erforschen, wie die bemeldten Beobachtungen angewandt werden müßten, um aus denselben die Figur der Erde zu erkennen, theils auch zu prüfen, in wie weit man sich auf diese Bestimmung der Figur der Erde verlassen könne.

Der sicherste und natürlichste Weg aber, um dieses Vorhaben auszuführen, möchte wohl derjenige seyn, den ich einer erlauchten Akademie der Wissenschaften hiermit vorzulegen die Ehre habe.

Es soll gegenwärtige Abhandlung die Auflösung zweyer Aufgaben in sich enthalten. In der ersten derselben werde ich die Figur eines Mittagskreises als bekannt annehmen und bestimmen, unter welcher Höhe der Mond an einem jeden Orte dieses Mittagskreises zu der Zeit erscheinen muß, wenn derselbe durch den Mittag, das ist, durch die Ebene des Mittagskreises gehet.

Die Auflösung dieser Aufgabe wäre allein schon hinreichend, um auch hinwiederum die Figur eines Mittagskreiss zu bestimmen, auf welchem wirklich die Mondshöhen genommen worden wären. Man müßte nämlich verschiedene Hypothesen annehmen, das ist, man müßte für die Figur des Mittagskreises verschiedene krumme Linien erwählen, und nach diesen Hypothesen die verschiedene mittägliche Mondshöhen berechnen; alsdenn aber diese Höhen mit denjenigen vergleichen, welche wirklich beobachtet worden sind; da es sich denn bald zeigen würde, welche Hypothese die wahre sey, das ist, mit welcher der angenommenen krummen Linien die wahre Figur des Mittagskreises übereinkäme.

 In

In der Auflösung der letztern Aufgabe werde ich aber zeigen, wie die unter verschiedenen Polhöhen eines Mittagskreises beobachtete mittägliche Mondshöhen zu der Bestimmung der Figur dieses Mittagskreises unmittelbar führen könne.

Erste Aufgabe.

Die Figur der Erde ist bekannt; man soll für einen jeglichen Ort eines Mittagskreises die mittägliche Höhe des Mondes finden.

Auflösung. Es sey l (1 Figur) der Mittelpunct der Erde, Bb die An, B der Nordpal, und BYA ein Theil des Mittagskreises, auf welchem die mittägliche Höhen des Mondes bestimmet werden sollen. Es sey aber ☾ der Ort des Mondes zur Zeit seines Durchganges durch diesen Mittagskreis. Man setze de Entfernung des Mittelpuncts des Mondes von dem Mittelpunct der Erde ☾C$=f$ und den Winkel BC☾$=\xi$, welcher die geocentrische Entfernung des Monds von dem Nordpol misset. Es sey nun Y ein Ort des Mittagskreises, für welchen die mittägliche Mondshöhe bestimmet werden soll, und CX$=x$; XY$=y$ die beyden Coordinaten, welche die Lage dieses Orts bestimmen. Man ziehe YN auf dem Mittagskreise in Y senkrecht, und verlängere dieselbe, bis sie der Axe Bb in N begegnet, so wird der Winkel BNY das Complement der Polhöhe des Orts Y andeuten. Es sey deser Winkel BNY$=\phi$ und also die Polhöhe des Orts Y$=90°-\phi$. Da nun NX$=\frac{-y\,dy}{dx}$ so wird $\frac{-dx}{dy}=$ tang ϕ und $\frac{-dy}{dx}$ der Tangens der Polhöhe in Y gleich seyn. Man verlängere die Perpendiculärlinie NY aufwärts, so wird dieselbe durch das Zeinth Z des Orts Y gehen. Man ziehe endlich Y☾ so giebt der Winkel ZY☾ die Entfernung des Monds von dem Zeinth

oder

oder das Complement der mittäglichen Mondshöhen. Es soll also dieser Winkel ZY☾ bestimmet werden.

Da der Winkel $Bl☾ = \xi$ und $BNY = \phi$ so wird der Winkel $CON = YO☾ = \xi - \phi$ und $CN = NR = \frac{-ydy}{dx} - x = -x + y$ cot. ϕ. Folglich in dem Dreyeck CNO

$$CQ = \frac{-x \sin\phi + y \cos\phi}{\sin(\xi - \phi)},\ NO = \frac{-x + y \cot.\phi}{\sin(\xi - \phi)} \times \sin\xi.$$

Da nun $NY = \frac{y}{\sin\phi}$ und in dem Dreyeck OY☾:

$$O☾ = C☾ - CO = f + \frac{x \sin\phi - y \cos\phi}{\sin(\xi - \phi)}$$

$$OY = NY - NO = \frac{y}{\sin\phi} + \frac{x - y \cot\phi}{\sin(\xi - \phi)} \times \sin\xi = \frac{x \sin\xi - y \cos\xi}{\sin(\xi - \phi)}$$

Der Winkel YO☾ aber $= \xi - \phi$ ist, so wird der gesuchte Winkel ZY☾ durch diese Formul bestimmt und berechnet werden können.

$$\text{tang. } ZY☾ = \frac{f \sin(\xi - \phi) + x \sin\phi - y \cos\phi}{f \cos(\xi - \phi) - x \cos\phi - y \sin\phi}.$$

Andere und weit kürzere Auflösung,

In welcher der Mittelpunct der Erden nicht in Betrachtung gezogen wird.

Es sey BM (2 Fig.) die Axe der Erde, B der Nordpol: BYN der bewußte Mittagskreis, und ☾ der Ort des Monds zur Zeit seines Durchgangs durch diesen Mittagskreis. Man ziehe aus ☾ die grade Linie ☾G auf der verlängerten Axe MBG senkrecht und setze für den Ort des ☾ die Entfernungen $BG = g$: $G☾ = h$. Nun sey Y derjenige Ort des Mittagskreises, für welchen die mittägliche Höhe des Monds gesucht wird. Es werde gleichfalls aus Y die grade Linie YX auf der Axe Bb senkrecht gezogen, und die

Coordinaten oder Entfernungen $BX=x$, $XY=y$ genannt. Man ziehe durch Y die grade Linie YN auf dem Mittagskreis senkrecht, so wird dieselbe auf der einen Seite der Axe Bb in N begegnen, auf der andern Seite aber durch das Zenith Z desselben Orts Y gehen. Es deute wiederum ϕ das Complement der Polhöhe in Y an, so wird der Winkel $BNY=\phi$ und weil $XN=\frac{ydy}{dx}$ ist; $\frac{dx}{dy}$ $=\text{tang}\,\phi$ und $\frac{dy}{dx}=\cot\phi$ seyn: Es sind uns demnach g, h, x, y und ϕ gegeben. Nun ziehe man endlich die grade Linie YV der Axe Bb parallel, welche folglich dem Beobachter in Y den Ort des Nordpols am Himmel zeigen wird. Der Winkel VY☾ wird also die scheinbare Entfernung des Monds ☾ von dem Nordpol V messen, und die scheinbare Entfernung des Monds von dem Zenith, oder das Complement der gesuchten mittäglichen Mondshöhen wird gefunden werden, wenn man von diesem Winkel VY☾ den Winkel $VYZ=\phi$ (oder das Complement der Polhöhe) abzieht.

Es ist aber $YV=g+x$; V☾$=h-y$, folglich tang VY☾ $=\frac{h-y}{g+x}$: und die gesuchte mittägliche Höhe des Monds für den Ort Y $=90^\circ-$VY☾$+\phi$.

Zusätze.

1. Man setze die Entfernung des Monds von dem Nordpol oder den Winkel VY☾$=\psi$, und seine Entfernung von dem Zenith oder den Winkel ZY☾ $=\omega$; so ist $\psi=\phi+\omega$ und $\omega=\psi-\phi$. Wir haben aber gefunden tang $\psi=\frac{h-y}{g+x}$.

2. Wenn der Ort des Monds nicht bekannt, und folglich auch g und h nicht gegeben wären, so würden vor allen Dingen

gen zwey Beobachtungen erfordert werden, um zuerst dieser ihre Werthe berechnen zu können. Sind dieselben aber einmal gefunden worden, so wird die gegebene Formul auch für einen jeglichen andern Ort desselben Mittagskreises die scheinbare Höhe des Monds bey diesem seinem Durchgange durch den Mittagskreis geben.

3. Laßt uns also setzen, man hätte den Mond wirklich an zwey verschiedenen und auf einem Mittagskreise gelegenen Oertern zu gleicher Zeit beobachtet. Es wäre für den erstern Ort $x=p$; $y=q$ und man hätte durch die Beobachtung gefunden $\tan\psi = r$. Für den zweyten Ort aber wäre $x=P$; $y=Q$ und die Beobachtung hätte gegeben $\tan\psi = R$. Wir würden alsdann diese beyde Gleichungen erhalten

$r=\dfrac{h-q}{g+p}$ und $R=\dfrac{h-Q}{g+P}$ und hieraus hinwiederum folgende Werthe für h und g

$$g=\frac{Q-q+PR-pr}{r-R};\quad h=\frac{Qr-pR+(P-p)rR}{r-R}$$

4. Wenn die Erde vollkommen kugelrund und $CB=CM$ $=a$ der halbe Durchmesser derselben wäre, so würde $x=a-a\cos\phi$ und $y=a\sin\phi$, folglich

$\tan\psi=\dfrac{h-a\sin\phi}{g+a-a\cos\phi}$. Daraus wir dann, weil $\psi-\phi=\omega$ ist, folgende Gleichung ziehen

$(g+a)\sin\psi - h\cos\psi = a\sin\omega$. Man setze nun wiederum, daß eine andere zu gleicher Zeit und auf eben demselben Mittagskreis gemachte Beobachtung diese Gleichung gegeben hätte

$(g+a)\sin\psi' - h\cos\psi' = a\sin\omega'$; so würde man durch die Vergleichung beyder Beobachtungen finden

$$g+a\frac{a(\sin\omega\cos\psi'-\sin\omega'\cos\psi)}{\sin(\psi-\psi')}\ \text{und}\ h=\frac{a(\sin\omega\sin\psi'-\sin\omega'\sin\psi)}{\sin(\psi-\psi')}.$$

Es giebt aber die Summa der beyden Quadraten $(g+a)^2+h^2$ das Quadrat der Entfernung des Mondes ☾ von dem Mittelpunct der Erden C. Es wird also diese Entfernung selbsten seyn

$$C☾ = \frac{a\sqrt{(\sin\omega.\sin\omega + \sin\omega^{\prime}.\sin\omega^{\prime} - 2\sin\omega.\sin\omega^{\prime}.\cos(\psi-\psi^{\prime}))}}{\sin(\psi-\psi^{\prime})}.$$

Oder da der Winkel $\psi-\psi^{\prime}$ allemal sehr klein ist, und folglich sein Cosinus ohne merklichen Fehler dem Halbmesser l gleich gesetzt werden kann, so wird sehr genau $C☾ = \frac{\sin\omega - \sin\omega^{\prime}}{\sin(\psi-\psi^{\prime})}a.$

5. Wir wollen anjetzo annehmen, die Erde wäre eine elliptische Spheroide; $CB=a$ wäre ihre halbe Axe und b der Halbmesser ihres Aequators. So werden wir erstlich für den Ort Y, dessen Zenith wir von dem Nordpol um den Winkel ϕ entfernt angenommen haben, erhalten

$$a-x = \frac{aa\cos\phi}{\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)}}$$

und $y = \frac{bb\sin\phi}{\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)}}.$

Und eine jede aus der Beobachtung geschlossene Entfernung des Monds von dem Nordpol, oder ein jeder Winkel ψ würde uns alsdann diese Gleichung geben

$$\tan\psi = \frac{h\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)} - bb\sin\phi}{(g+a)\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi + bb\sin\phi.\sin\phi)} - aa\cos\phi.}$$

Zwey zu gleicher Zeit auf einem Mittagskreise gemachte Beobachtungen werden aber wiederum die Werthe von $g+a$ und h geben, und die Formul $\sqrt{((g+a)^2+h^2)}$ wird alsdann die Entfernung des Monds von dem Mittelpuncte der Erde bestimmen. Wollte man endlich noch eine dritte Beobachtung zur Hülfe nehmen, so könnte man auch sogar im Stande seyn, die Verhältniß $a:b$ das ist die Gattung der Ellipsis zu bestimmen.

6. Um

6. Um diese Bestimmungen zu erleichtern und die gegebene Gleichung kürzer zu fassen, kann cot. $\phi = m$: tang. $\psi = n$; $b = va$: $g + a = ra$ und $h = sa$ gesetzt werden: Es wird aber alsdenn eine jegliche Beobachtung eine dergleichen Gleichung geben

$$n = \frac{s\sqrt{(mm+vv)}-vv}{r\sqrt{(mm+vv)}-m}$$: aus deren dreyen hernach die Werthe der unbekannten Größen r, s, und v bestimmet werden müssen.

Prüfung.

Man nehme den Ort des Mondes für bekannt an, und setze $r = 10$; $s = 60$ oder $g = 9a$: $h = 60a$, wo nämlich a die halbe Axe der Erde andeutet. Man nehme auch die Figur der Erde als bekannt an, und setze

1. Die Erde wäre eine vollkommene Kugel deren Halbmesser also $= a$ ist. Man berechne nach der gegebenen Formul die mittägliche Höhe des Monds für drey verschiedene Oerter eines und eben desselben Mittagskreises, und es seyen die Entfernungen dieser Oerter von dem Nordpol 30°, 80° und 120°, oder ihre Polhöhen 60°, 10° nördlich und 30° südlich: so wird für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$

30°. 80°. 120°.

Die scheinbare Entfernung des Monds von dem Nordpol, oder der Winkel $\psi' =$

81°.. 16'.. 21". 80°.. 32'.. 48". 79°.. 55'.. 54"

Folglich die mittägliche Höhe des Monds $90° + \phi - \psi$.

38°.. 43'.. 39". südlich 89°.. 27'.. 12" südlich. 49°.. 55'.. 54" nördlich.

2. Wenn wir aber nach den Ausmessungen der Pariserakademie annehmen, die Erde wäre eine Spheroide, deren Durchmesser um den 200sten Theil größer ist als die Axe; oder wenn wir

setzen

setzen $b = 1\frac{1}{200}a$, so werden wir durch unsere Formul folgende mittägliche Mondshöhen heraus bringen.

Für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$

30°. 80°. 120°.

Die scheinbare Entfernung des Monds von diesem Nordpol, oder der Winkel $\psi =$

81°.. 16'.. 12". 80°.. 32'.. 42". 79°.. 55'.. 57".

Folglich die mittägliche Höhe des Monds $90° + \phi - \psi$.

38°.. 43'.. 48" südlich 89°.. 23'.. 18" südlich 49°.. 55'.. 57" nördlich.

3. Endlich wenn wir die zwey erstere mittägliche Höhen des Monds, so wie wir dieselben in der ersten Voraussetzung gefunden haben, als wirkliche Beobachtungen betrachten, und überdem für die Figur der Erde annehmen $b = 1\frac{1}{200}a$; also daß $v = 1, 05$ so werden wir erhalten

Erstlich für den Ort des Mondes $r = \frac{109270}{10959} = 9, 9708$

und $s = \frac{656708}{10959} = 59, 9240$

zweytens für den dritten Ort, dessen Breite 30° südlich ist, die scheinbare Entfernung des Monds von dem Pol, oder den Winkel $\psi = 79°.. 56' 2'$, folglich die Höhe des Monds von Norden an gerechnet $= 49°.. 56'.. 2"$.

Schluß.

Aus dieser Prüfung erhellet ganz deutlich, in wie weit man sich auf diejenige Bestimmung der Figur der Erde verlassen könne, welche durch die Beobachtungen des Monds heraus gebracht werden kann, und wie genau diese Beobachtungen angestellt werden müß-

müßten, wenn man sicher seyn wollte, daß jene Bestimmung von der Wahrheit nicht gar zu beträchtlich abwiche. Denn so günstig wir auch zu unserm Vorhaben die Oerter der drey angeführten obgleich erdichteten Beobachter erwählet hatten, so sehen wir nunmehro dennoch, daß um die wahre Figur der Erde, aus derselben Beobachtungen zu schließen, nothwendig erfordert werde, daß man von diesen Beobachtungen bis auf eine Secunde gewiß sey: in wie weit dieses aber möglich sey, mögen geübte Beobachter urtheilen. Indessen könnte allemal eine große Menge von Beobachtungen diesen Mangel der Genauigkeit ersetzen, und wenn sich dermaleins drey oder mehrere Beobachter auf einem und eben demselben Mittagskreise befinden sollten, so möchte der gegenwärtige Entwurf nicht gänzlich ohne Nutzen ausgeführet werden können. Um dieser Ursachen willen werde ich mich auch nicht abschröcken lassen, die versprochene Auflösung der zweyten Aufgabe beyzusetzen; in welcher nämlich noch kürzlich gezeigt werden soll, wie die Figur der Erde unmittelbar aus den beobachteten mittäglichen Höhen des Monds bestimmet werden kann.

Letzte Aufgabe.

Die mittägliche Höhe des Monds ist an vielen auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegenen Oertern zu gleichen Zeiten beobachtet worden; man soll die Figur der Erde bestimmen.

Auflösung.

Ich setze hier vor allen Dingen voraus, daß die Polhöhe oder Breite eines jeden Orts bekannt ist; oder, welches auf eins heraus kömmt, daß man für einen jeden Ort den Winkel ϕ, welcher die Entfernung des Pols von dem Zenith andeutet, weis. Da nun auch für einen jeden dieser Oerter der Winkel ψ oder die Entfernung des Monds von demselben Pol aus der Beobachtung geschlossen wird; so kann eine aufmerksame Vergleichung dieser beyden Werthen von ϕ und ψ paarweis genommen, leicht zeigen, wie dieser Winkel ψ von jenem ϕ abhänge: das ist, man wird nicht ohne große Mühe diejenige Gleichung errathen können, welche auf eine allgemeine Art zwischen diesen beyden Winkeln ψ und ϕ Statt finden müßte; zumal da die Figur der Erde schon einigermaßen bekannt ist. Ich nehme also diese erwehnte Gleichung als bekannt an. Es sey nun Y derjenige Ort, dessen Zenith von dem Nordpol um den Winkel ϕ entfernt ist, und man setze für diesen Ort Y, die Coordinaten $BX = x$; $XY = y$. Man verlangt also eine Gleichung zwischen x und y. Da $\frac{dx}{dy} = \text{tang}\,\phi$: $\text{tang}\,\psi = \frac{h-y}{g+x}$: so wird aus dieser $y = h - (g+x)\,\text{tang}\,\psi$: folglich $dy = -dx\,\text{tang}\,\psi - \frac{(g+x)\,d\psi}{\cos\psi^2}$, und weil aus jener Gleichung $dy = \frac{dx}{\text{tang}\,\phi}$; so wird

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\psi\,\text{tang}\,\phi}{\cos\psi^2\,(1+\text{tang}\,\phi.\,\text{tang}\,\psi)} = \frac{-d\psi\,\sin\phi}{\cos\psi.\,\cos(\psi-\phi)} \text{ seyn.}$$

Man bringe nun den Winkel ω, der $= \psi - \phi$ ist, in die Rechnung, so wird, da ψ durch ϕ bekannt ist, auch ψ durch ω bestimmet werden können. Man wird also eine Gleichung zwischen ψ und ω erhalten. Es ist aber, wenn wir $\psi - \phi = \omega$ und $\phi = \psi - \omega$ setzen

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\psi\,\sin(\psi-\omega)}{\cos\psi\,\cos\omega} = \frac{-d\psi\,\sin\psi}{\cos\psi} + \frac{d\psi\,\sin\omega}{\cos\omega}$$

Folglich $l\,(g+x) = l\cos\psi + \int\frac{d\psi\,\sin\omega}{\cos\omega} + lC$

Da nun allemal $\int\frac{d\psi\,\sin\omega}{\cos\omega}$ durch die bekannte Gleichung zwischen

ψ und ω

ψ und ω gefunden werden kann, so sey $\int \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega} = l\Delta$: und wir werden erhalten $l(g+x) = l\cos\psi + l\Delta + lC$ das ist $g+x = C\Delta \cos\psi$; Folglich da $y = h - (g+x) \tang\psi$, so werden die gesuchte Werthe der Coordinaten x und y seyn
$x = -g + C\Delta \cos\psi$; $y = h - C\Delta \sin\psi$.

Zu einer noch größern Bequemlichkeit wollen wir die Coordinaten des Orts Y von dem Ort ☾ des Monds an rechnen, und also setzen ☾$V = h - y = Y$; $VY = g + x = X$; und wir werden erhalten $X = C\Delta \cos\psi$; $Y = C\Delta \sin\psi$, folglich $\cos\psi = \frac{X}{C\Delta}$; $\sin\psi = \frac{Y}{C\Delta}$. Man setze ferner die Entfernung des Monds von dem Orte Y oder die grade Linie Y☾ $= Z$; so wird $ZZ = XX + YY$ folglich $Z = C\Delta$. Da nun der Werth von Δ durch ψ bestimmet wird, da nämlich $l\Delta = \int \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega}$, und $\cos\psi = \frac{X}{Z}$ und $\sin\psi = \frac{Y}{Z}$ ist, so kann derselbe Werth vor Δ auch durch die Coordinaten X, Y, und $Z = \sqrt{(XX+YY)}$ bestimmet werden. Die Gleichung $Z = C\Delta$ wird aber alsdenn nur eine Gleichung zwischen X und Y seyn, durch welche wir folglich die gesuchte Figur des Mittagskreises, und hiemit auch die Figur der ganzen Erde erkennen werden.

Exempel.

Laßt uns setzen, die Beobachtungen des Monds hätten uns auf folgende Gleichung zwischen den Winkeln ψ und ϕ gebracht $\sin(\psi - \phi) = n \sin(\psi - \alpha)$, und welche uns hernach, da $\psi - \phi = \omega$ ist, diese Gleichung $\sin\omega = n\sin(\psi - \alpha)$ gegeben. Es deutet aber wie bewußt ψ den Winkel VY☾ oder die Entfernung des Monds von dem Nordpol, und ω den Winkel ZY☾ oder die Entfernung des Monds von dem Zenith an.

Da nun $\cos\omega = \sqrt{(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2)} = \sqrt{(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)}$, so wird $l\Delta = \int \frac{nd\psi \sin(\psi - \alpha)}{\sqrt{(1 - nn + (nn\cos(\psi - \alpha)^2)}}$ folglich
$l\Delta = l(\sqrt{(1 - nn + nn\cos(\psi - \alpha)^2)} - n\cos(\psi - \alpha))$
und $\Delta = \sqrt{(1 - nn + nn\cos(\psi - \alpha)^2)} - n\cos(\psi - \alpha)$. Es ist aber $\Delta = \frac{Z}{C}$, also auch

$$\sqrt{(1 - nn + nn\cos(\psi - \alpha)^2)} - n\cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C} \text{ oder}$$

$$\sqrt{(1 - nn\sin(\psi - \alpha)^2)} - n\cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C};$$

$$\sqrt{(1 - nn\sin(\psi - \alpha)^2)} = \frac{Z}{C} + n\cos(\psi - \alpha).$$

Und nachdem das Wurzelzeichen weggebracht worden ist

$$\frac{ZZ}{CC} + \frac{2nZ}{C}\cos(\psi - \alpha) = 1 - nn$$

Weil nun $\cos(\psi - \alpha) = \cos\psi . \cos\alpha + \sin\phi . \sin\alpha = \frac{X\cos\alpha + Y\sin\alpha}{Z}$; und $ZZ = XX + YY$, so wird
$XX + YY + 2nC(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) = (1 - nn)\, CC$ und welche die gesuchte Gleichung für die Figur des Mittagskreises ist. Man schreibe $-a$ für die beständige Größe C, welche, da sie durch die Integration in der Rechnung gekommen ist, gänzlich von unserer Willkuhr abhängt. So wird $XX + YY - 2na(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) = (1 - nn)\,aa$; folglich

$$(X - na\cos\alpha)^2 + (na\sin\alpha - Y)^2 = aa.$$

Hieraus erhellet nun, daß die Figur des Mittagskreises BYN eine Zirkellinie ist, dessen Halbmesser $= a$ ist. Es sey C der

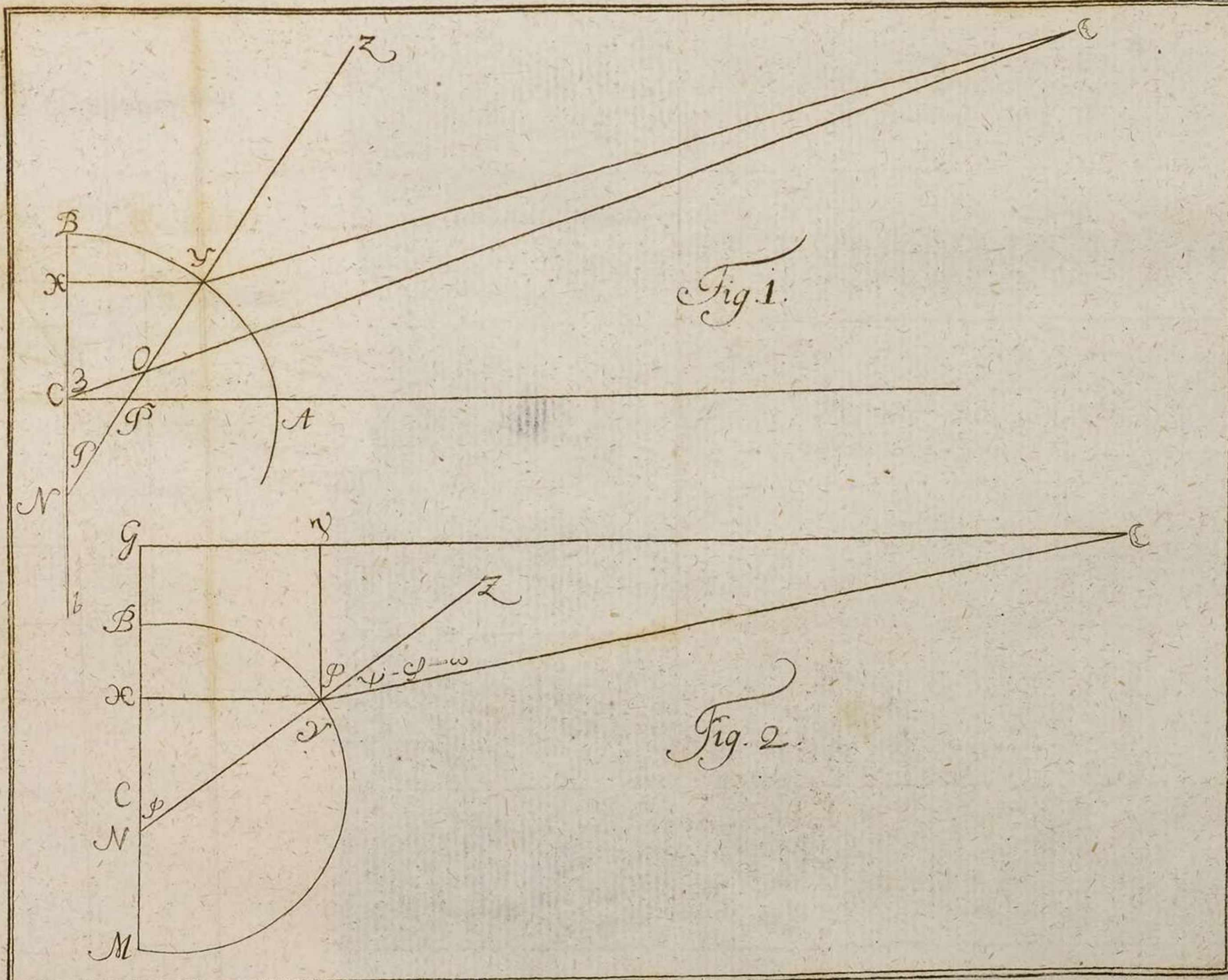
Mit-

Mittelpunct dieser Zirkellinie und $CB = a$ desselben Halbmesser; so muß (weil $CX^2 + XY^2 = aa$;) $na \cos\alpha$ die Entfernung GC und $na \sin\alpha$ die Entfernung ☾G geben; der Buchstaben α drückt folglich den Winkel GC☾ und na die Entfernung C☾ des Monds von dem Mittelpunct der Erde aus. Weil nun dieser Winkel α und diese Zahl n durch die Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ erkannt worden, so nehme man den Halbmesser der Erde a nach Belieben an, und mache ☾$G = na \sin\alpha$ und $GC = na \cos\alpha$; so wird der Punct C das Mittelpunct der Erde in Ansehung des Monds geben, $BM = 2a$ aber wird desselben Axe seyn. Und auf diese Weise werden alsdann die Erscheinungen des Monds auf dem Mittagskreise BYM denen Beobachtungen und der daraus geleiteten Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ vollkommen gemäß seyn: $\psi - \alpha$ aber deutet hier die Parallel der Höhe an.

Schluß.

Dieses Exempel ist hinreichend, um daraus zu erkennen, wie die angezeigte Methode, die Figur der Erde zu bestimmen, angewandt werden müsse. Und es erhellet auch zugleich, daß diese Aufgabe an und für sich selbsten unbestimmt sey. Denn wie auch immer diejenige Figur des Mittagskreises beschaffen seyn mag, welche der Gleichung zwischen ψ und ϕ ein Genügen leistet; so wird eine jegliche andere Figur, so jener ähnlich ist, und auch in Ansehung des Mondes eine ähnliche Lage hat, derselben Gleichung gleichfalls ein Genüge leisten. Wenn man nur dieses dabey beobachtet, daß die Axe der Erde oder die Richtung ihrer beyden Polen auf die gerade Linie ☾G, welche durch den Mittelpunct des Monds nach Belieben gezogen wird, senkrecht stehe.

Schließlich sieht man leicht ein, daß diese Methode die Figur der Erde zu bestimmen, größtentheils nur deswegen unsicher, und derjenigen hintan zu setzen sey, deren sich die Pariserakademie bedienet hatte, weil die Entfernung des Mondes in Ansehung der Axe der Erde sehr groß ist. Denn wenn der Mond der Erde weit näher wäre, oder wenn sich in der Nähe des Erdballs ein anderer Körper befände, den man dennoch an allen Orten eines Mittagskreises sehen könnte, so würde die hier angezeigte Methode, die Figur der Erde zu bestimmen, die allersicherste und gewiß weit bequemer seyn, als diejenige ist, welche sich auf die Ausmessung der verschiedenen Graden durch Dreyecke gründet. Die Bestimmung des Halbmessers der Erde würde aber, sobald die Figur dessen bekannt ist, von wenig Erheblichkeit seyn.


Z
☾
B
Y
H
Fig. 1.
O
C
3
P
A
P
N
b
G
Y
☾
Z
B
φ
ψ - φ = ω
H
Y
Fig. 2.
C
φ
N
M