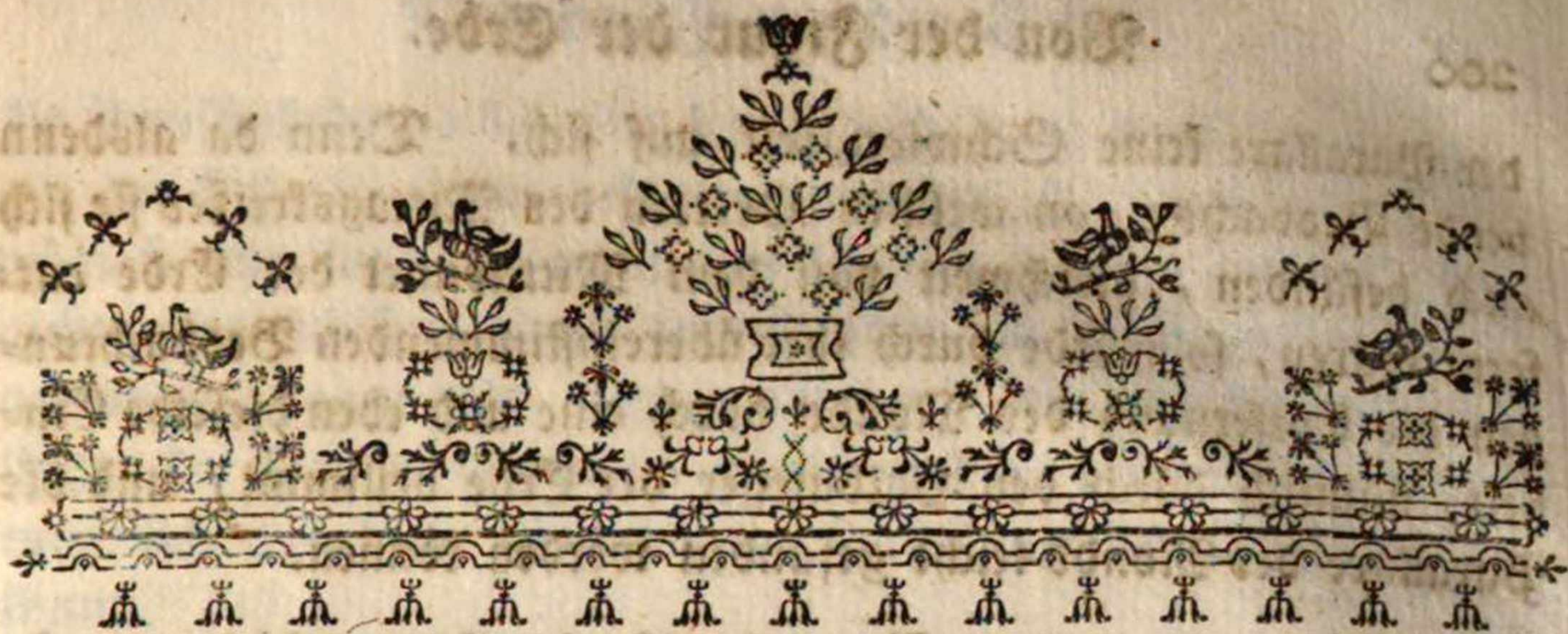


J. Albrecht Eulers

Versuch

die Figur der Erden durch Beobachtungen
des Mondes zu bestimmen.





Uls die Pariserakademie der Wissenschaften den höchst-


rühmlichen Entschluß faßte, die Parallaxe des Mondes
auf das genaueste zu bestimmen, so wurden zu diesem
Ende zwey ihrer geschicktesten Mitglieder (*) an zwey weit von
einander entfernte und (so viel als es möglich war) auf einem
und eben demselben Mittagskreise gelegene Oerter verschicket,
um daselbst die mittäglichen Höhen des Mondes auf das fleißig-
ste zu beobachten. Es würde aber nichts destoweniger dieser bey-
den Mitglieder Mühe und Fleiß fruchtlos geblieben seyn, und die
Akademie würde sich auch nicht geschmeichelt haben, die wahre
Parallaxe des Mondes aus diesen ihren Beobachtungen heraus-
bringen zu können, wenn sie sich vorhero nicht von der wahren
Figur der Erde durch die bekannten Ausmessungen versichert hätte.
Wäre die Erde vollkommen kugelrund, so hätte die Bestimmung
der

(*) Die Herren de la Caille und de la Lande: ersterer war nach dem Vor-
 gebürge der guten Hofnung und letzterer nach Berlin abgereiset; außer
 diesen hatte sich noch der verstorbene Professor Grischow mit Genehm-
 haltung der rufisch = kaiserlichen Akademie zu Petersburg nach der Insel
 Desel begeben, um daselbst mit ersteren gemeinschaftlich die Mondshöhen
 zu beobachten.

der Parallaxe keine Schwierigkeit auf sich. Denn da alsdenn beyde Beobachter, an welchen Orten des Mittagskreises sie sich auch befänden, gleichweit von dem Mittelpunct der Erde entfernt wären, so würde durch ihre übereinstimmenden Beobachtungen die Entfernung des Mondes durch eine und eben dieselbe Einheit, nämlich durch den Halbmesser der Erde bestimmt, und die Parallaxe des Mondes leicht gefunden werden können.

Eine ganz andere Bewandniß aber hat es hingegen, da die Erde in der That nicht genau kugelrund ist: dann weil in diesem Fall die Beobachter sich meistens in verschiedenen Entfernungen von dem Mittelpunct der Erde befinden, so ist eine genaue Kenntniß dieser Verschiedenheit der Entfernungen und ihrer wahren Größe unumgänglich nöthig, um die wahre Entfernung des Mondes von dem Mittelpunct der Erde, und seine Parallaxe aus den Beobachtungen schließen zu können.

Da es also unläugbar ist, daß die auf einem und eben demselben Mittagskreise beobachteten Mondshöhen von der Figur der Erde abhängen, und diese hinwiederum einen Einfluß in jene nothwendig haben müsse, so stehet mit allem Recht zu vermuthen, daß die Beobachtungen der mittäglichen Mondshöhen darzu dienen könnten, die Figur der Erde aus denselben zu bestimmen. Es müßten nämlich zu diesem Ende verschiedene Beobachter die mittäglichen scheinbaren Höhen des Mondes an eben so viel verschiedenen aber auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegenen Orten messen, und eine Vergleichung aller Höhen, so zu gleicher Zeit genommen worden sind, würde alsdenn die Figur des Mittagskreises geben, und folglich auch die ganze Figur der Erde, wenn sonst dieselbe nicht gar zu unordentlich ist. Ob nun gleich diese Art die Figur der Erde zu bestimmen, allem Anscheine nach weit unter derjenigen zu setzen ist, deren sich

die

die Pariserakademie bedienet hatte, und durch welche uns die Figur der Erde so genau bekannt geworden ist, als es nur immer möglich seyn kann, so möchte es dennoch in einer andern Absicht nicht undienlich seyn, theils zu erforschen, wie die bemeldten Beobachtungen angewandt werden müßten, um aus denselben die Figur der Erde zu erkennen, theils auch zu prüfen, in wie weit man sich auf diese Bestimmung der Figur der Erde verlassen könne.

Der sicherste und natürlichste Weg aber, um dieses Vorhaben auszuführen, möchte wohl derjenige seyn, den ich einer erlauchten Akademie der Wissenschaften hiermit vorzulegen die Ehre habe.

Es soll gegenwärtige Abhandlung die Auflösung zweyer Aufgaben in sich enthalten. In der ersten derselben werde ich die Figur eines Mittagskreises als bekannt annehmen und bestimmen, unter welcher Höhe der Mond an einem jeden Orte dieses Mittagskreises zu der Zeit erscheinen muß, wenn derselbe durch den Mittag, das ist, durch die Ebene des Mittagskreises geht.

Die Auflösung dieser Aufgabe wäre allein schon hinreichend, um auch hinwiederum die Figur eines Mittagskreises zu bestimmen, auf welchem wirklich die Mondshöhen genommen worden wären. Man müßte nämlich verschiedene Hypothesen annehmen, das ist, man müßte für die Figur des Mittagskreises verschiedene krumme Linien erwählen, und nach diesen Hypothesen die verschiedene mittägliche Mondshöhen berechnen; alsdenn aber diese Höhen mit denjenigen vergleichen, welche wirklich beobachtet worden sind; da es sich denn bald zeigen würde, welche Hypothese die wahre sey, das ist, mit welcher der angenommenen krummen Linien die wahre Figur des Mittagskreises übereinkäme.

In der Auflösung der letztern Aufgabe werde ich aber zeigen, wie die unter verschiedenen Polhöhen eines Mittagskreises beobachtete mittägliche Mondshöhen zu der Bestimmung der Figur dieses Mittagskreises unmittelbar führen könne.

Erste Aufgabe.

Die Figur der Erde ist bekannt; man soll für einen jeglichen Ort eines Mittagskreises die mittägliche Höhe des Mondes finden.

Auflösung. Es sey l (1 Figur) der Mittelpunkt der Erde, Bb die Ax, B der Nordpol, und BYA ein Theil des Mittagskreises, auf welchem die mittägliche Höhen des Mondes bestimmt werden sollen. Es sey aber C der Ort des Mondes zur Zeit seines Durchganges durch diesen Mittagskreis. Man setze die Entfernung des Mittelpuncts des Mondes von dem Mittelpunkt der Erde $CC=f$ und den Winkel $BC C = \xi$, welcher die geocentrische Entfernung des Mondes von dem Nordpol misst. Es sey nun Y ein Ort des Mittagskreises, für welchen die mittägliche Mondshöhe bestimmt werden soll, und $CX=x$; $XY=y$ die beiden Coordinaten, welche die Lage dieses Orts bestimmen. Man ziehe YN auf dem Mittagskreise in Y senkrecht, und verlängere dieselbe, bis sie der Axe Bb in N begegnet, so wird der Winkel BNY das Complement der Polhöhe des Orts Y andeuten. Es sey dieser Winkel $BNY = \phi$ und also die Polhöhe des Orts $Y = 90^\circ - \phi$. Da nun $NX = \frac{-y dy}{dx}$ so wird $\frac{-dx}{dy} = \text{tang } \phi$ und $\frac{-dy}{dx}$ der Tangens der Polhöhe in Y gleich seyn. Man verlängere die Perpendicularärlinie NY aufwärts, so wird dieselbe durch das Zenith Z des Orts Y gehen. Man ziehe endlich YC so giebt der Winkel ZYC die Entfernung des Mondes von dem Zenith oder

oder das Complement der mittäglichen Mondshöhen. Es soll also dieser Winkel ZYQ bestimmt werden.

Da der Winkel $B/Q = \xi$ und $BNY = \phi$ so wird der Winkel $CON = YOQ = \xi - \phi$ und $CN = NR = \frac{-ydy}{dx} - x = -x + y \cot. \phi$. Folglich in dem Dreyeck CNO

$$CQ = \frac{-x \sin \phi + y \cos \phi}{\sin (\xi - \phi)}, \quad NO = \frac{-x + y \cot. \phi}{\sin (\xi - \phi)} \times \sin \xi.$$

Da nun $NY = \frac{y}{\sin \phi}$ und in dem Dreyeck OYQ :

$$OQ = CQ - CO = f + \frac{x \sin \phi - y \cos \phi}{\sin (\xi - \phi)}$$

$$OY = NY - NO = \frac{y}{\sin \phi} + \frac{x - y \cot \phi}{\sin (\xi - \phi)} \times \sin \xi = \frac{x \sin \xi - y \cos \xi}{\sin (\xi - \phi)}$$

Der Winkel YOQ aber $= \xi - \phi$ ist, so wird der gesuchte Winkel ZYQ durch diese Formel bestimmt und berechnet werden können.

$$\text{tang. } ZYQ = \frac{f \sin (\xi - \phi) + x \sin \phi - y \cos \phi}{f \cos (\xi - \phi) - x \cos \phi - y \sin \phi}.$$

Andere und weit kürzere Auflösung,

In welcher der Mittelpunkt der Erden nicht in Betrachtung gezogen wird.

Es sey BM (2 Fig.) die Aye der Erde, B der Nordpol: BYN der bewußte Mittagskreis, und Q der Ort des Monds zur Zeit seines Durchgangs durch diesen Mittagskreis. Man ziehe aus Q die grade Linie QG auf der verlängerten Aye MBG senkrecht und setze für den Ort des Q die Entfernungen $BG = g$: $GQ = h$. Nun sey Y derjenige Ort des Mittagskreises, für welchen die mittägliche Höhe des Monds gesucht wird. Es werde gleichfalls aus Y die grade Linie YX auf der Aye Bb senkrecht gezogen, und die

Coordinaten oder Entfernungen $BX = x$, $XY = y$ genannt. Man ziehe durch Y die grade Linie YN auf dem Mittagskreis senkrecht, so wird dieselbe auf der einen Seite der Axe Bb in N begegnen, auf der andern Seite aber durch das Zenith Z desselben Orts Y gehen. Es deute wiederum ϕ das Complement der Polhöhe in Y an, so wird der Winkel $BNY = \phi$ und weil $XN = \frac{ydy}{dx}$ ist; $\frac{dx}{dy} = \tan \phi$ und $\frac{dy}{dx} = \cot \phi$ seyn: Es sind uns demnach g, h, x, y und ϕ gegeben. Nun ziehe man endlich die grade Linie YV der Axe Bb parallel, welche folglich dem Beobachter in Y den Ort des Nordpols am Himmel zeigen wird. Der Winkel $VY\zeta$ wird also die scheinbare Entfernung des Mondes ζ von dem Nordpol V messen, und die scheinbare Entfernung des Mondes von dem Zenith, oder das Complement der gesuchten mittäglichen Mondshöhe wird gefunden werden, wenn man von diesem Winkel $VY\zeta$ den Winkel $VYZ = \phi$ (oder das Complement der Polhöhe) abzieht.

Es ist aber $YV = g + x$; $V\zeta = h - y$, folglich $\tan VY\zeta = \frac{h-y}{g+x}$: und die gesuchte mittägliche Höhe des Mondes für den Ort $Y = 90^\circ - VY\zeta + \phi$.

Zusätze.

1. Man setze die Entfernung des Mondes von dem Nordpol oder den Winkel $VY\zeta = \psi$, und seine Entfernung von dem Zenith oder den Winkel $ZY\zeta = \omega$; so ist $\psi = \phi + \omega$ und $\omega = \psi - \phi$. Wir haben aber gefunden $\tan \psi = \frac{h-y}{g+x}$.

2. Wenn der Ort des Mondes nicht bekannt, und folglich auch g und h nicht gegeben wären, so würden vor allen Dingen

gen zwey Beobachtungen erfordert werden, um zuerst dieser ihre Werthe berechnen zu können. Sind dieselben aber einmal gefunden worden, so wird die gegebene Formel auch für einen jeglichen andern Ort desselben Mittagskreises die scheinbare Höhe des Mondes bey diesem seinem Durchgange durch den Mittagskreis geben.

3. Laßt uns also setzen, man hätte den Mond wirklich an zwey verschiedenen und auf einem Mittagskreise gelegenen Orten zu gleicher Zeit beobachtet. Es wäre für den erstern Ort $x = p$; $y = q$ und man hätte durch die Beobachtung gefunden $\text{tang } \psi = r$. Für den zweyten Ort aber wäre $x = P$; $y = Q$ und die Beobachtung hätte gegeben $\text{tang } \psi = R$. Wir würden alsdann diese beyde Gleichungen erhalten

$$r = \frac{h - q}{g + p} \text{ und } R = \frac{h - Q}{g + P} \text{ und hieraus hinwiederum folgende}$$

Werthe für h und g

$$g = \frac{Q - q + PR - pr}{r - R}; \quad h = \frac{Qr - pR + (P - p)rR}{r - R}$$

4. Wenn die Erde vollkommen kugelförmig und $CB = CM = a$ der halbe Durchmesser derselben wäre, so würde $x = a - a \cos \phi$ und $y = a \sin \phi$, folglich

$$\text{tang } \psi = \frac{h - a \sin \phi}{g + a - a \cos \phi}. \text{ Daraus wir dann, weil } \psi - \phi = \omega \text{ ist,}$$

folgende Gleichung ziehen

$(g + a) \sin \psi - h \cos \psi = a \sin \omega$. Man setze nun wiederum, daß eine andere zu gleicher Zeit und auf eben demselben Mittagskreise gemachte Beobachtung diese Gleichung gegeben hätte

$(g + a) \sin \psi' - h \cos \psi' = a \sin \omega'$; so würde man durch die Vergleichung beyder Beobachtungen finden

$$g + a \frac{a(\sin \omega \cos \psi' - \sin \omega' \cos \psi)}{\sin(\psi - \psi')} \text{ und } h = \frac{a(\sin \omega \sin \psi' - \sin \omega' \sin \psi)}{\sin(\psi - \psi')}.$$

Es giebt aber die Summa der beyden Quadraten $(g+a)^2 + h^2$ das Quadrat der Entfernung des Mondes $\mathcal{C}$ von dem Mittelpunct der Erden C . Es wird also diese Entfernung selbst seyn

$$C\mathcal{C} = \frac{a\sqrt{(\sin \omega. \sin \omega + \sin \omega^1. \sin \omega^1 - 2 \sin \omega. \sin \omega^1. \cos(\psi - \psi^1))}}{\sin(\psi - \psi^1)}.$$

Oder da der Winkel $\psi - \psi^1$ allemal sehr klein ist, und folglich sein Cosinus ohne merklichen Fehler dem Halbmesser a gleich gesetzt werden kann, so wird sehr genau $C\mathcal{C} = \frac{\sin \omega - \sin \omega^1}{\sin(\psi - \psi^1)} a$.

5. Wir wollen anjehö annehmen, die Erde wäre eine elliptische Spheroide; $CB = a$ wäre ihre halbe Aye und b der Halbmesser ihres Aequators. So werden wir erstlich für den Ort Y , dessen Zenith wir von dem Nordpol um den Winkel Φ entfernt angenommen haben, erhalten

$$a - x = \frac{aa \cos \Phi}{\sqrt{aa \cos \Phi. \cos \Phi + bb \sin \Phi. \sin \Phi}}$$

$$\text{und } y = \frac{bb \sin \Phi}{\sqrt{aa \cos \Phi. \cos \Phi + bb \sin \Phi. \sin \Phi}}.$$

Und eine jede aus der Beobachtung geschlossene Entfernung des Mondes von dem Nordpol, oder ein jeder Winkel ψ würde uns alsdann diese Gleichung geben

$$\text{tang } \psi = \frac{h\sqrt{aa \cos \Phi. \cos \Phi + bb \sin \Phi. \sin \Phi} - bb \sin \Phi}{(g+a)\sqrt{aa \cos \Phi. \cos \Phi + bb \sin \Phi. \sin \Phi} - aa \cos \Phi}.$$

Zwey zu gleicher Zeit auf einem Mittagskreise gemachte Beobachtungen werden aber wiederum die Werthe von $g+a$ und h geben, und die Formel $\sqrt{(g+a)^2 + h^2}$ wird alsdann die Entfernung des Mondes von dem Mittelpuncte der Erde bestimmen. Wollte man endlich noch eine dritte Beobachtung zur Hülfe nehmen, so könnte man auch sogar im Stande seyn, die Verhältniß $a:b$ das ist die Gattung der Ellipsis zu bestimmen.

6. Um diese Bestimmungen zu erleichtern und die gegebene Gleichung kürzer zu fassen, kann $\cot. \Phi = m : \text{tang. } \Psi = n$; $b = va$; $g + a = ra$ und $h = sa$ gesetzt werden: Es wird aber alsdenn eine jegliche Beobachtung eine dergleichen Gleichung geben

$$n = \frac{s\sqrt{(mm + vv) - vv}}{r\sqrt{(mm + vv) - m}}$$

unbekannten Größen r , s , und v bestimmt werden müssen.

Prüfung.

Man nehme den Ort des Mondes für bekannt an, und setze $r = 10$; $s = 60$ oder $g = 9a$; $h = 60a$, wo nämlich a die halbe Axe der Erde andeutet. Man nehme auch die Figur der Erde als bekannt an, und setze

1. Die Erde wäre eine vollkommene Kugel deren Halbmesser also $= a$ ist. Man berechne nach der gegebenen Formel die mittägliche Höhe des Mondes für drey verschiedene Derter eines und eben desselben Mittagskreises, und es seyen die Entfernungen dieser Derter von dem Nordpol 30° , 80° und 120° , oder ihre Polhöhen 60° , 10° nördlich und 30° südlich: so wird für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\Phi =$

30° .

80° .

120° .

Die scheinbare Entfernung des Mondes von dem Nordpol, oder der Winkel $\Psi =$

$81^\circ.. 16'.. 21''$.

$80^\circ.. 32'.. 48''$.

$79^\circ.. 55'.. 54''$

Folglich die mittägliche Höhe des Mondes $90^\circ + \Phi - \Psi$.

$38^\circ.. 43'.. 39''$ südlich $89^\circ.. 27'.. 12''$ südlich. $49^\circ.. 55'.. 54''$ nördlich.

2. Wenn wir aber nach den Ausmessungen der Pariserakademie annehmen, die Erde wäre eine Spheroide, deren Durchmesser um den 200sten Theil größer ist als die Axe; oder wenn wir setzen

setzen $b = 1 \frac{1}{200} a$, so werden wir durch unsere Formel folgende mittägliche Mondshöhen heraus bringen.

Für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$

30°. 80°. 120°.

Die scheinbare Entfernung des Mondes von diesem Nordpol, oder der Winkel $\psi =$

81°.. 16'.. 12". 80°.. 32'.. 42". 79°.. 55'.. 57".

Folglich die mittägliche Höhe des Mondes $90^\circ + \phi - \psi$.

38°.. 43'.. 48" südlich 89°.. 23'.. 18" südlich 49°.. 55'.. 57" nördlich.

3. Endlich wenn wir die zwey erstere mittägliche Höhen des Mondes, so wie wir dieselben in der ersten Voraussetzung gefunden haben, als wirkliche Beobachtungen betrachten, und überdem für die Figur der Erde annehmen $b = 1 \frac{1}{200} a$; also daß $v = 1, 05$ so werden wir erhalten

Erstlich für den Ort des Mondes $r = \frac{109270}{10959} = 9, 9708$

und $s = \frac{656708}{10959} = 59, 9240$

zweitens für den dritten Ort, dessen Breite 30° südlich ist, die scheinbare Entfernung des Mondes von dem Pol, oder den Winkel $\psi = 79^\circ.. 56' 2''$, folglich die Höhe des Mondes von Norden an gerechnet $= 49^\circ.. 56'.. 2''$.

Schluß.

Aus dieser Prüfung erhellet ganz deutlich, in wie weit man sich auf diejenige Bestimmung der Figur der Erde verlassen könne, welche durch die Beobachtungen des Mondes heraus gebracht werden kann, und wie genau diese Beobachtungen angestellt werden muß.

müßten, wenn man sicher seyn wollte, daß jene Bestimmung von der Wahrheit nicht gar zu beträchtlich abweiche. Denn so günstig wir auch zu unserm Vorhaben die Derter der drey angeführten obgleich erdichteten Beobachter erwählet hatten, so sehen wir nunmehr dennoch, daß um die wahre Figur der Erde, aus derselben Beobachtungen zu schließen, nothwendig erfordert werde, daß man von diesen Beobachtungen bis auf eine Secunde gewiß sey: in wie weit dieses aber möglich sey, mögen geübte Beobachter urtheilen. Indessen könnte allemal eine große Menge von Beobachtungen diesen Mangel der Genauigkeit ersetzen, und wenn sich dermaleins drey oder mehrere Beobachter auf einem und eben demselben Mittagskreise befinden sollten, so möchte der gegenwärtige Entwurf nicht gänzlich ohne Nutzen ausgeführet werden können. Um dieser Ursachen willen werde ich mich auch nicht abschrecken lassen, die versprochene Auflösung der zweyten Aufgabe beyzusetzen; in welcher nämlich noch kürzlich gezeigt werden soll, wie die Figur der Erde unmittelbar aus den beobachteten mittäglichen Höhen des Mondes bestimmt werden kann.

Letzte Aufgabe.

Die mittägliche Höhe des Mondes ist an vielen auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegenen Dertern zu gleichen Zeiten beobachtet worden; man soll die Figur der Erde bestimmen.

Auflösung.

Ich setze hier vor allen Dingen voraus, daß die Polhöhe oder Breite eines jeden Orts bekannt ist; oder, welches auf eins heraus kömmt, daß man für einen jeden Ort den Winkel ϕ , welcher die Entfernung des Pols von dem Zenith andeutet, weis. Da nun auch für einen jeden dieser Derter der Winkel ψ oder die Entfernung des Mondes von demselben Pol aus der Beobach-

tung geschlossen wird; so kann eine aufmerksame Vergleichung dieser beyden Werthen von Φ und Ψ paarweis genommen, leicht zeigen, wie dieser Winkel Ψ von jenem Φ abhängt: das ist, man wird nicht ohne große Mühe diejenige Gleichung errathen können, welche auf eine allgemeine Art zwischen diesen beyden Winkeln Ψ und Φ Statt finden müßte; zumal da die Figur der Erde schon einigermaßen bekannt ist. Ich nehme also diese erwähnte Gleichung als bekannt an. Es sey nun Y derjenige Ort, dessen Zenith von dem Nordpol um den Winkel Φ entfernt ist, und man setze für diesen Ort Y, die Coordinaten $BX = x$; $XY = y$. Man ver-

langt also eine Gleichung zwischen x und y . Da $\frac{dx}{dy} = \tan \Phi$:

$\tan \Psi = \frac{h-y}{g+x}$: so wird aus dieser $y = h - (g+x) \tan \Psi$: folglich

$dy = -dx \tan \Psi - \frac{(g+x) d\Psi}{\cos \Psi^2}$, und weil aus jener Gleichung

$dy = \frac{dx}{\tan \Phi}$; so wird

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\Psi \tan \Phi}{\cos \Psi^2 (1 + \tan \Phi \cdot \tan \Psi)} = \frac{-d\Psi \sin \Phi}{\cos \Psi \cdot \cos (\Psi - \Phi)} \text{ seyn.}$$

Man bringe nun den Winkel ω , der $= \Psi - \Phi$ ist, in die Rechnung, so wird, da Ψ durch Φ bekannt ist, auch Ψ durch ω bestimmt werden können. Man wird also eine Gleichung zwischen Ψ und ω erhalten. Es ist aber, wenn wir $\Psi - \Phi = \omega$ und $\Phi = \Psi - \omega$ setzen

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\Psi \sin (\Psi - \omega)}{\cos \Psi \cos \omega} = \frac{-d\Psi \sin \Psi}{\cos \Psi} + \frac{d\Psi \sin \omega}{\cos \omega}$$

$$\text{Folglich } 1(g+x) = 1 \cos \Psi + \int \frac{d\Psi \sin \omega}{\cos \omega} + 1C$$

Da nun allemal $\int \frac{d\Psi \sin \omega}{\cos \omega}$ durch die bekannte Gleichung zwischen Ψ und ω

ψ und ω gefunden werden kann, so sey $\int \frac{d\psi \sin \omega}{\cos \omega} = l\alpha$: und wir

werden erhalten $l(g+x) = l\cos \psi + l\alpha + lC$ das ist $g+x = C\alpha \cos \psi$;

Folglich da $y = h - (g+x) \tan \psi$, so werden die gesuchte Werthe der Coordinaten x und y seyn

$$x = -g + C\alpha \cos \psi; y = h - C\alpha \sin \psi.$$

Zu einer noch größern Bequemlichkeit wollen wir die Coordinaten des Orts Y von dem Ort ϵ des Mondes an rechnen, und also setzen $\epsilon V = h - y = Y$; $VY = g + x = X$; und wir werden erhalten $X = C\alpha \cos \psi$; $Y = C\alpha \sin \psi$, folglich $\cos \psi = \frac{X}{C\alpha}$;

$\sin \psi = \frac{Y}{C\alpha}$. Man setze ferner die Entfernung des Mondes von

dem Orte Y oder die grade Linie $Y\epsilon = Z$; so wird $ZZ = XX + YY$ folglich $Z = C\alpha$. Da nun der Werth von α durch ψ be-

stimmet wird, da nämlich $l\alpha = \int \frac{d\psi \sin \omega}{\cos \omega}$, und $\cos \psi = \frac{X}{Z}$ und

$\sin \psi = \frac{Y}{Z}$ ist, so kann derselbe Werth vor α auch durch die Co-

ordinaten X , Y , und $Z = \sqrt{XX + YY}$ bestimmt werden. Die Gleichung $Z = C\alpha$ wird aber alsdenn nur eine Gleichung zwischen X und Y seyn, durch welche wir folglich die gesuchte Figur des Mittagskreises, und hiemit auch die Figur der ganzen Erde erkennen werden.

Exempel.

Läßt uns setzen, die Beobachtungen des Mondes hätten uns auf folgende Gleichung zwischen den Winkeln ψ und ϕ gebracht $\sin(\psi - \phi) = n \sin(\psi - \alpha)$, und welche uns hernach, da $\psi - \phi = \omega$ ist, diese Gleichung $\sin \omega = n \sin(\psi - \alpha)$ gegeben. Es

deutet aber wie bewußt ψ den Winkel $VY\epsilon$ oder die Entfernung des Mondes von dem Nordpol, und ω den Winkel $ZY\epsilon$ oder die Entfernung des Mondes von dem Zenith an.

Da nun $\cos\omega = \sqrt{(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2)} = \sqrt{(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)}$, so wird $l\Delta = \int \frac{nd\psi \sin(\psi - \alpha)}{\sqrt{(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)}}$ folglich

$l\Delta = k(\sqrt{(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)} - n \cos(\psi - \alpha))$
und $\Delta = \sqrt{(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)} - n \cos(\psi - \alpha)$. Es ist aber $\Delta = \frac{Z}{C}$, also auch

$$\sqrt{(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)} - n \cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C} \text{ oder}$$

$$\sqrt{(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2)} - n \cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C};$$

$$\sqrt{(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2)} = \frac{Z}{C} + n \cos(\psi - \alpha).$$

Und nachdem das Wurzelzeichen weggebracht worden ist

$$\frac{ZZ}{CC} + \frac{2nZ}{C} \cos(\psi - \alpha) = 1 - nn$$

Weil nun $\cos(\psi - \alpha) = \cos\psi \cdot \cos\alpha + \sin\psi \cdot \sin\alpha = \frac{X \cos\alpha + Y \sin\alpha}{Z}$;

und $ZZ = XX + YY$, so wird

$XX + YY + 2nC(X \cos\alpha + Y \sin\alpha) = (1 - nn)CC$ und welche die gesuchte Gleichung für die Figur des Mittagskreises ist. Man schreibe $-a$ für die beständige Größe C , welche, da sie durch die Integration in der Rechnung gekommen ist, gänzlich von unserer Willkühr abhängt. So wird $XX + YY - 2na(X \cos\alpha + Y \sin\alpha) = (1 - nn)aa$; folglich

$$(X - na \cos\alpha)^2 + (na \sin\alpha - Y)^2 = aa.$$

Hieraus erhellet nun, daß die Figur des Mittagskreises BYN eine Zirkellinie ist, dessen Halbmesser $= a$ ist. Es sey C der Mit-

Mittelpunct dieser Zirkellinie und $CB = a$ desselben Halbmesser; so muß (weil $CX^2 + XY^2 = aa$;) $na \cos \alpha$ die Entfernung GC und $na \sin \alpha$ die Entfernung ϵG geben; der Buchstaben α drückt folglich den Winkel $GC\epsilon$ und na die Entfernung $C\epsilon$ des Mondes von dem Mittelpunct der Erde aus. Weil nun dieser Winkel α und diese Zahl n durch die Gleichung $\sin \omega = n \sin (\psi - \alpha)$ erkannt worden, so nehme man den Halbmesser der Erde a nach Belieben an, und mache $\epsilon G = na \sin \alpha$ und $GC = na \cos \alpha$; so wird der Punct C das Mittelpunct der Erde in Ansehung des Mondes geben, $BM = 2a$ aber wird desselben Aye seyn. Und auf diese Weise werden alsdann die Erscheinungen des Mondes auf dem Mittagskreise BYM denen Beobachtungen und der daraus geleiteten Gleichung $\sin \omega = n \sin (\psi - \alpha)$ vollkommen gemäß seyn: $\psi - \alpha$ aber deutet hier die Parallel der Höhe an.

Schluß.

Dieses Exempel ist hinreichend, um daraus zu erkennen, wie die angezeigte Methode, die Figur der Erde zu bestimmen, angewandt werden müsse. Und es erhellet auch zugleich, daß diese Aufgabe an und für sich selbst unbestimmt sey. Denn wie auch immer diejenige Figur des Mittagskreises beschaffen seyn mag, welche der Gleichung zwischen ψ und ϕ ein Genügen leistet; so wird eine jegliche andere Figur, so jener ähnlich ist, und auch in Ansehung des Mondes eine ähnliche Lage hat, derselben Gleichung gleichfalls ein Genüge leisten. Wenn man nur dieses dabey beobachtet, daß die Aye der Erde oder die Richtung ihrer beyden Polen auf die gerade Linie ϵG , welche durch den Mittelpunct des Mondes nach Belieben gezogen wird, senkrecht stehe.

Schließlich sieht man leicht ein, daß diese Methode die Figur der Erde zu bestimmen, größtentheils nur deswegen unsicher, und derjenigen hintan zu setzen sey, deren sich die Pariserakademie bedienet hatte, weil die Entfernung des Mondes in Ansehung der Axe der Erde sehr groß ist. Denn wenn der Mond der Erde weit näher wäre, oder wenn sich in der Nähe des Erbballs ein anderer Körper befände, den man dennoch an allen Orten eines Mittagskreises sehen könnte, so würde die hier angezeigte Methode, die Figur der Erde zu bestimmen, die allersicherste und gewiß weit bequemer seyn, als diejenige ist, welche sich auf die Ausmessung der verschiedenen Graden durch Dreyecke gründet. Die Bestimmung des Halbmessers der Erde würde aber, sobald die Figur dessen bekannt ist, von wenig Erheblichkeit seyn.



