Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft III

Sitzungen Oktober-Dezember

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Eine Bemerkung zum Lehmerschen Problem.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 13. Oktober 1944.

1. Es bezeichne $A_1(n)$ die Anzahl der quadratfreien (positiven) Teiler der positiven ganzen Zahl n, $A_2(n)$ die Anzahl der kubusfreien Teiler von n, allgemein $A_g(n)$ die Anzahl der Teiler von n, die durch keine Potenz p^{g+1} einer Primzahl p teilbar sind; sinngemäß sei $A_0(n) = 1$ gesetzt. Sei $\mathfrak{S}$ irgend ein unendliches System von ganzen positiven Zahlen; für irgend ein $x \geqq 1$ sei

$$S_g(x) = S_{g,\mathfrak{S}}(x) = \sum_{n \varepsilon \mathfrak{S}}^{x} A_g(n), \tag{1}$$

wobei die Summe über alle jene Zahlen n zu erstrecken ist, die zum System $\mathfrak{S}$ gehören und $\leqq x$ sind.

Die im wesentlichen hier zu betrachtenden Systeme $\mathfrak{S}$ sind folgendermaßen gebildet. Es seien k verschiedene zu einer Zahl m teilerfremde Restklassen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ gewählt $(1 \leqq k \leqq h = \varphi(m))$; dann umfasse $\mathfrak{S}$ alle Zahlen n (einschließlich der Zahl $n = 1$), derart daß jeder Primfaktor von n einer der genannten Restklassen angehört.

Für solche Systeme $\mathfrak{S}$ hat im Jahre 1900 D. N. Lehmer[1] für den Fall[2] $g = 1$ die Frage nach dem asymptotischen Wachstum von $S_1(x)$ aufgeworfen und für den Fall $m = 3$, $k = 1$, $b_1 = 1$, desgleichen für den Fall $m = 4$, $k = 1$, $b_1 = 1$ (d. h. also für das System $\mathfrak{S}$ aller Zahlen, deren sämtliche Primfaktoren die Gestalt $3u + 1$ bzw. $4u + 1$ haben) den Nachweis erbracht, daß

---

[1] „Asymptotic Evaluations of certain Totient Sums", American Journal of Mathematics, Band XXII (1900), S. 293–335.

[2] Im Falle $g = 1$ ist $A_1(n) = 2^{\nu(n)}$, unter $\nu(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n verstanden.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S_1(x)}{x} \tag{2}$$

vorhanden und > 0 ist[3]. Im Jahre 1909 hat dann E. Landau[4], nachdem er vorher[5] die entsprechenden Feststellungen für die Fälle $m = 3$, $k = 1$, $b_1 = 2$; $m = 4$, $k = 1$, $b_1 = 3$; $m = 6$, $k = 1$, $b_1 = 5$ (also für die Progression $3u + 2$, bzw. $4u + 3$, bzw. $6u + 5$) gemacht hatte, einen wesentlich allgemeineren Satz aufgestellt und bewiesen, der die erwähnten Teilergebnisse nur als ganz spezielle Fälle mitenthält; nämlich den Satz, daß für jedes System $\mathfrak{S}$, das in der genannten Weise aus k teilerfremden Restklassen mod. m hergeleitet wird, stets

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S_1(x)}{x : (\log x)^{1 - \frac{2k}{h}}} \tag{3}$$

vorhanden und > 0 ist Damit war zugleich die ursprüngliche Lehmersche Vermutung, der Grenzwert (2) sei für jedes der betrachteten Systeme $\mathfrak{S}$ vorhanden und positiv, dahin berichtigt, daß diese Vermutung nur für $k = \frac{h}{2}$, somit im Falle einer einzigen Restklasse ($k = 1$) nur für $h = \varphi(m) = 2$, also nur für $m = 3$, 4 und 6 zutrifft.

In der gleichen Arbeit[6] wird für den Fall $g = 0$ (hier bedeutet $S_0(x)$ einfach die Anzahl aller Zahlen $n \leqq x$, die in $\mathfrak{S}$ enthalten sind, deren sämtliche Primfaktoren also den gewählten k Restklassen angehören) der Grenzwert

---

[3] Dabei hat Lehmer in jedem der beiden Fälle auch den Wert dieses Limes bestimmt. Da die fragliche Zeitschrift (mit vielen anderen) mir dermalen kaum mehr erreichbar ist, muß ich darauf verzichten, diese Limeswerte (wie im ursprünglichen Manuskript vorgesehen war) hier anzugeben.

[4] „Lösung des Lehmerschen Problems", Americ. Journal of Math., Vol. XXXI (1909), S. 86–102. Siehe auch desselben Verfassers Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 2 (1909), 18. Teil, §§ 177–182, S. 649–668.

[5] „Bemerkungen zu Herrn D. N. Lehmers Abhandlung im Bd. 22 dieses Journals, S. 293–335", Americ. Journal of Math., Bd. XXVI (1904), S. 209–222, sowie „Über die Multiplikation Dirichletscher Reihen", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXIV (2. sem. 1907), S. 81–160.

[6] l. c.[4], Amer. Journ. XXXI, S. 101–102, bzw. Handbuch, § 183, S. 668–669.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S_0(x)}{x : (\log x)^{1-\frac{k}{h}}} \tag{4}$$

als vorhanden und > 0 nachgewiesen.

Mit den vorliegenden Zeilen[7] soll auf die Frage hingewiesen

[7] Die Beschäftigung mit dem Gegenstand geht ebenso wie bei der vorhergehenden Note auf die erste Hälfte des Jahres 1942 zurück, wo ich in einer für die Akademie und ihren Charakter nicht unkritischen Zeit als Vorsitzender der Abteilungs-Sitzungen auch vor der Aufgabe stand, nötigenfalls zum wissenschaftlichen Teil der Tagesordnung beizusteuern; wobei ich einmal auf eine alte Bemerkung über die Basiszahlen eines algebraischen Zahlkörpers zurückgegriffen und später daran anknüpfend den Fall eines reinen kubischen Körpers behandelt und einiges überhaupt für ungeraden Primzahlgrad bzw. beliebigen Grad ausgeführt habe. Andererseits habe ich damals im Anschluß an Vergleiche arithmetischer Progressionen auf ihren Primzahlgehalt (vgl. hierzu einige im letzten halben Jahr vorgelegte Arbeiten) zum ,,Handbuch" l. c.[4] gegriffen und während der Rekonvaleszenz nach einem Bronchialkatarrh, wie er seit einer Anfang 1918 im Feld bekommenen schweren Lungen-Rippenfellentzündung nicht allzu selten wiederkehrte, auch einen vormals vom Verfasser erhaltenen Sonderdruck der Arbeit l. c.[4] zur Hand genommen und mir daran anschließend jene Verallgemeinerung des Lehmerschen Problems vorgelegt, von der im Text die Rede ist. Im wesentlichen wurde dieser Text, wie er hier mitgeteilt wird (Nr. **1** und **3**), schon damals niedergeschrieben und in den österlichen Semesterferien sollte dann die Einarbeitung in die funktionentheoretische Seite der Aufgabe und gegebenenfalls die Lösung der Fragestellung und die Wertbestimmung der fraglichen Grenzwerte versucht werden. Aber ein Todesfall in der Familie mit durch die Eigenart der Umstände hervorgerufenen, sich länger hinziehenden brieflichen Auseinandersetzungen drängte dieses Beginnen gegen andere, leichter zum Abschluß zu bringende Arbeiten zurück, worüber ich mich um so eher trösten darf, als es mir bei der Neuartigkeit des Betätigungsfeldes zweifelhaft sein muß, wieweit ich ans Ziel gelangt sein möchte. Was den an Publikationen aus einem Nachlaß erinnernden fragmentarischen Charakter dermalen motivieren kann, habe ich kürzlich anderwärts gesagt (Über die Stäckelschen Lückenzahlen usw., Anm. 23, diese Sitzber., Jgg. 1944, S. 32).

Bei der Korrektur sei hiezu bemerkt: Der Gedanke an eine Weiterführung und Ausgestaltung, wie sie mir vor dreieinhalb Jahren vorschwebte und dann durch lange Korrespondenzen über ein seither durch den Lauf der Ereignisse, wie einigermaßen vorauszusehen, belanglos gewordenes Testament unterbrochen wurde, mußte zur Zeit der Einreichung dieser Note als vermessen gelten. Inzwischen haben seit mehr als sieben Monaten Spreng- und Brandbomben aufgehört. Unter den obwaltenden Verhältnissen möchte es aber als eine noch trügerischere Illusion erscheinen, mit sich mindernden Kräften Pläne zu vertieften Untersuchungen zu fassen.

werden, inwieweit mit den gleichen Methoden wie in den vorgenannten Arbeiten das asymptotische Verhalten von $S_g(x)$ bei beliebigem g behandelt werden kann.

2. Ehe wir in Nr. **3** einige erste Ansätze zur Inangriffnahme dieser Frage mitteilen, möge eine allgemeine Bemerkung eingeschaltet werden. Das Hauptinteresse an asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie hat sich naturgemäß auf den Bau der auftretenden Näherungsfunktionen verlagert, darüber hinaus etwa noch – bezüglich Abschätzung des Fehlers – auf Aussagen über den Wachstumscharakter des Fehlers, wie es z. B. für die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leqq x$ die Gleichung

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) + o\left(\frac{x}{(\log x)^{5/2}}\right) \tag{a}$$

leistet, wo $o(g(x))$ eine Funktion $f(x)$ bedeutet, die der Beziehung $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x):$ $:g(x)) = 0$ genügt; d. h. es ist, wenn

$$\frac{x}{\log x}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) = \beta(x)$$

gesetzt wird[7a],

$$|\,\pi(x) - \beta(x)\,| < \varepsilon\,\frac{x}{(\log x)^{5/2}} \text{ für } x > X(\varepsilon).$$

Indem man sich, wie es eben bei reinen Limes-Feststellungen allgemein geschieht, mit der bloßen Aussage begnügt, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $X(\varepsilon)$ existiert, dessen nähere Angabe man unterläßt oder unterdrückt, entzieht man der Limesrelation jede Möglichkeit einer numerischen Auswertung, so daß z. B., wenn man $\beta(300000) = 25673{,}93\ldots$ errechnet hat, sich allein daraus und aus (a) über die Anzahl der Primzahlen unter 300000 keine noch so grobe Schätzung entnehmen läßt; und wer ohne alle Theorie aus einer Primzahltafel durch einfache Auszählung $\pi(300000) = 25997$ feststellt, hat damit die genaue Anzahl und kann auf jede noch so interessante und tiefliegende, rein theoretische Abschätzung verzichten. Man könnte nun aber sehr wohl eine Ausgestaltung der Theorie ins Auge fassen, die – über die bloßen in den Limesrelationen liegenden Existenzaussagen hinausgehend – außerdem durch konkrete Aussagen über den Grad der Annäherung numerische Angaben gestattet. Es mag unerörtert bleiben, ob dabei eine Erweiterung in

---

[7a] Die gegenüber

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x\, e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right),\ \alpha \text{ eine Konstante} > 0, \tag{b}$$

(wo $Li(x)$ der Integrallogarithmus ist; wegen $O(g(x))$ vgl. Anm. 8) wesentlich schwächere (aus (b) unmittelbar herleitbare) Aussage (a) wurde – im Hinblick auf das unten ausgeführte numerische Beispiel – wegen der leichten Errechenbarkeit von $\beta(x)$ gewählt, zumal mir für $Li(x)$ augenblicklich keine Tafel zur Hand ist.

der Symbolik (über die Zeichen limes, $\sim$, $O(g(x))$, $o(g(x))$ hinaus) günstig und wie sie zu gestalten wäre, um auch anderen Gebieten, wo numerisch verwertbare Fehlerabschätzungen gewünscht werden (wie bei den Restformeln der Taylor-Reihe, bei der Trapezformel für Integrale u. dgl. m.), eine prägnante Ausdrucksform zu liefern.

Um die Tendenz dieser Bemerkung noch zu verdeutlichen, möge an ein geläufiges Beispiel einer numerisch verwertbaren Abschätzung angeknüpft werden: Unter Beschränkung auf eine ganzzahlig ins Unendliche wachsende Variable $x = n$ hat man, wenn $1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} = S(n)$ gesetzt wird, vermöge der groben Schätzung $e < \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 < 3$ und der Taylor-Restformel für die Exponentialreihe:

$$e = S(n) + R(n) \text{ mit } R(n) < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}; \tag{c}$$

diese Formel würde jede Brauchbarkeit für die numerische Berechnung von e verlieren, wenn wir ihren Inhalt in die Aussage[8] (vom gleichen Typus wie (b)):

$$e = S(n) + O\left(\frac{\alpha}{(n+1)!}\right), \ \alpha \text{ eine beliebige Konstante} \tag{d}$$

oder in die Aussage (vom gleichen Typus wie (a)):

$$e = S(n) + o\left(\frac{\alpha}{n!}\right) \tag{e}$$

abschwächen und damit für den Unterschied zwischen e und $S(n)$ nur theoretische Feststellungen über den funktionellen Charakter der Abnahme von $R(n)$ mit wachsendem n beibehalten würden. – Das in umgekehrter Richtung liegende – bislang bewußt beiseite gelassene[9] – Ziel, nämlich gewisse Abschätzungen der analytischen Zahlentheorie bis zu numerisch verwertbaren Aussagen auszugestalten und zu verschärfen, möchte freilich oft beträchtliche Bemühungen erfordern.

---

[8] Unter dem, wohl auf Mertens zurückgehenden, von Landau nachdrücklich verwerteten Symbol $O(g(x))$ (in unserem Fall analog $O(g(n))$) ist eine Funktion $f(x)$ zu verstehen, für welche solche C und A existieren, daß $|f(x)| < Cg(x)$ für $x > A$ gilt. (Natürlich kann man gegen das Symbol mit der dabei üblichen einseitigen Verwendung des Gleichheitszeichens den Einwand erheben, daß zwar beispielsweise $x^4 + O(x^2) = x^4 + O(x^3)$, aber nicht $x^4 + O(x^3) = x^4 + O(x^2)$ ist.) Theoretisch schärfer als (e) ist natürlich (d).

[9] In etwas anderer Weise dient übrigens die von Mertens, Sitzber. d. Wiener Akad., Math.-naturw. Cl. 106, Abt. IIa, (1897), gegebene Umgestaltung des Dirichletschen Beweises für die Primzahlen einer arithmetischen Progression dem Bestreben, bloße Existenzaussagen zu ersetzen durch konkretere Feststellungen (vgl. hierüber die Angaben in einer früheren Note, diese Sitz.-ber., Jahrgang 1944, S. 23–24, Anm. 8).

3. Für $i \geqq 1$ bezeichne $\rho_{i+1}(n)$ die Anzahl aller Primzahlen p, sodaß n durch p^i, nicht aber durch p^{i+1} teilbar ist; ferner sei für $g \geqq 1$

$$\sigma_g(n) = \rho_{g+1}(n) + \rho_{g+2}(n) + \dots \tag{5}$$

die Anzahl aller Primzahlen, die in n mindestens in der g-ten Potenz aufgehen (also $\sigma_1(n)$ gleich dem früheren $\nu(n)$). Für $g \geqq 1$ ist dann[10]

$$\begin{aligned} A_g(n) &= 2^{\rho_2(n)}\, 3^{\rho_3(n)} \dots g^{\rho_g(n)} (g+1)^{\sigma_g(n)} = \\ &= (g+1)^{\sigma_g(n)} \prod_{i=2}^{g} i^{\rho_i(n)} \end{aligned} \tag{6}$$

und unter Beachtung von

$$\begin{aligned} & 1 + 2x + 3x^2 + \dots + g x^{g-1} + (g+1)(x^g + x^{g+1} + \dots) = \\ & = \frac{1 + x + \dots + x^g}{1-x} = \frac{1 - x^{g+1}}{(1-x)^2} \end{aligned} \tag{7}$$

sowie[11]

$$\begin{aligned} \log \frac{1 - z^{g+1}}{(1-z)^2} &= - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{(g+1)\nu}}{\nu} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu} = \\ &= 2\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^g}{g}\right) - \frac{g-1}{g+1} z^{g+1} + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

gilt daher (u. zw. offenbar auch im Falle $g = 0$) für $\sigma = \Re(s) = \Re(\sigma + it) > 1$

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \varepsilon \mathfrak{S}}}^{\infty} \frac{A_g(n)}{n^s} = \\ &= \prod_{p \varepsilon \mathfrak{S}} \left(1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \dots + \frac{g}{p^{(g-1)s}} + \frac{g+1}{p^{gs}} + \frac{g+1}{p^{(g+1)s}} + \dots\right) = \\ &= \prod_{p \varepsilon \mathfrak{S}} \left(\frac{1 - \dfrac{1}{p^{s(g+1)}}}{\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^2} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

und

---

[10] Für $g = 1$ entfällt in (6) das Produkt im letzten Ausdruck.

[11] Für $g = 0$ reduziert sich (8) auf $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$.

$$\log F(s) = \sum_{\varkappa=1}^{k} \log f_\varkappa(s) \text{ mit } \log f_\varkappa(s) = \log \prod_{p \equiv b_\varkappa} \frac{1 - \dfrac{1}{p^{s(g+1)}}}{\left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right)^2} =$$

$$= \sum_{p \equiv b_\varkappa} \left[2\left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \ldots + \frac{1}{g\,p^{gs}}\right) - \frac{g-1}{g+1} \cdot \frac{1}{p^{(g+1)s}} + \ldots \right] =$$

$$= c_1 \sum_{p \equiv b_\varkappa} \frac{1}{p^s} + c_2 \sum_{p \equiv b_\varkappa} \frac{1}{p^{2s}} + c_3 \sum_{p \equiv b_\varkappa} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots, \tag{10}$$

wo $c_1 = 1$ oder 2, je nachdem $g = 0$ oder $g \geqq 1$ ist. Führt man die zu den $h = \varphi(m)$ Charakteren $\chi_\lambda(n)$ gehörigen L-Reihen

$$L_\lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{\chi_\lambda(p)}{p^s}} \tag{11}$$

ein, so wird, wenn $a_\varkappa$ der Bedingung $a_\varkappa b_\varkappa \equiv 1 \pmod{m}$ entsprechend gewählt wird und daher $\chi_\lambda(a_\varkappa)\,\chi_\lambda(b_\varkappa) = 1$ ist,

$$\sum_{\lambda=1}^{h} \chi_\lambda(a_\varkappa) \log L_\lambda(s) = \sum_{\lambda=1}^{h} \chi_\lambda(a_\varkappa) \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_\lambda(p^j)}{j\,p^{js}} =$$

$$= \sum_{p \equiv b_\varkappa} \frac{h}{p^s} + \sum_p \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{\chi_\lambda(a_\varkappa p^j)}{j\,p^{js}}; \tag{12}$$

also, da die beiden Summationen $\sum\limits_p$ und $\sum\limits_j$ im letzten Glied wegen der absoluten Konvergenz vertauschbar sind:

$$h \sum_{p \equiv b_\varkappa} \frac{1}{p^s} = \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{1}{\chi_\lambda(b_\varkappa)} \log L_\lambda(s) - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_p \frac{1}{p^{js}} \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{\chi_\lambda(p^j)}{\chi_\lambda(b_\varkappa)}. \tag{13}$$

Somit:

$$\log f_\varkappa(s) = \frac{c_1}{h} \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{1}{\chi_\lambda(b_\varkappa)} \log L_\lambda(s) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_p \frac{1}{p^{js}} \left(-\frac{c_1}{hj} \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{\chi_\lambda(p^j)}{\chi_\lambda(b_\varkappa)} + c_j\,\delta_{b_\varkappa, p} \right), \tag{14}$$

wo $\delta_{b_\varkappa, p} = 1$ oder 0, je nachdem $p \equiv b_\varkappa$ oder $\not\equiv b_\varkappa \pmod{m}$.

Das gibt

$$\log F(s) = \frac{c_1}{h} \sum_{\lambda=1}^{h} \log L_\lambda(s) \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{\chi_\lambda(b_\varkappa)} +$$
$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{p} \frac{1}{p^{js}} \left(-\frac{c_1}{jh} \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{\chi_\lambda(p^j)}{\chi_\lambda(b_\varkappa)} + c_j \, \delta_{\mathfrak{S},\,p} \right), \tag{15}$$

wobei $\delta_{\mathfrak{S},\,p} = 1$ oder 0, je nachdem p einer der Restklassen $b_1, \ldots, b_h$ angehört, oder nicht. Für das Weitere ist zu bemerken: Wenn

$$-\frac{c_1}{jh} \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{h} \frac{\chi_\lambda(p^j)}{\chi_\lambda(b_\varkappa)} + c_j \delta_{\mathfrak{S},\,p} = B_{j,\,p}, \tag{16}$$

$$\frac{c_1}{jh} kh + |c_j| = \frac{c_1 k}{j} + |c_j| = C_j, \tag{17}$$

$$\sum_{p} \frac{|B_{j,\,p}|}{p^{j\sigma}} = G_j(\sigma) \tag{18}$$

gesetzt wird, ist

$$|B_{j,\,p}| \leqq C_j, \tag{19}$$

$$\left| \sum_{p} \frac{C_j}{p^{js}} \right| \leqq \sum_{p} \frac{C_j}{p^{j\sigma}} < C_j \sum_{n} \frac{1}{n^{j\sigma}}, \tag{20}$$

sodaß diese Reihen für $\sigma j > 1$ und somit sicher für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergieren. Sei $\sigma_0 > \frac{1}{2}$. Dann ist jede der Reihen $\sum_{p} \frac{B_{j,\,p}}{p^{js}}$ für $\sigma \geqq \sigma_0$ absolut konvergent und absolut $< G_j(\sigma_0)$. Für ein geeignet zu bestimmendes $c > 0$ betrachten wir dann den Bereich $t \geqq 3$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{(\log t)^c}$ der s-Ebene. Unter Benutzung von

$$|\log L_\lambda(s)| < c \log \log t \tag{21}$$

und

$$\left| \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{p} \frac{B_{j,\,p}}{p^{js}} \right| < \sum_{j=2}^{\infty} G_j(\sigma_0) \tag{22}$$

ist dann $|\log F(s)|$ abzuschätzen.