Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1944. Heft I/II

Sitzungen Januar-Juli

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über symmetrische Funktionen von abzählbar unendlich vielen Argumenten.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 19. Mai 1944.

1. An anderer Stelle[1] gegebene Entwicklungen werden im Folgenden etwas weitergeführt.

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ eine unendliche Folge komplexer Zahlen, dabei $|x_\nu| = \xi_\nu$; es gebe ganze positive Zahlen μ, für welche $\Sigma\, \xi_\nu^{\mu}$ konvergiert, und es sei m die kleinste dieser Zahlen μ. Sei n eine ganze Zahl $\geqq 1$ und $\mathfrak{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ ein System nicht-negativer ganzer Zahlen, die den Bedingungen

$$b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq 0, \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = n \tag{2}$$

genügen. Es sei $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots$ eine Folge von Unbestimmten und

$$Y_{\mathfrak{B}}(t) = \Sigma\, t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n} \tag{3}$$

die (unendliche) Summe aller verschiedenen Potenzprodukte, die man aus $t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$ erhält, indem man für $t_1, \ldots, t_n$ irgend ein System $t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_n}$ von n verschiedenen Unbestimmten t_ν nimmt[2]. Für die unendlichen Reihen

---

[1] Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 48 (1939) S. 487–499 und 49 (1940), S. 1–52, „Über symmetrische Funktionen von endlich oder abzählbar unendlich vielen Veränderlichen", insbesondere § 10, Bd. 49, S. 49 ff.

[2] Dabei brauchen durchaus nicht verschiedene Systeme $t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_n}$ stets auch verschiedene Potenzprodukte zu ergeben. Beispielsweise wird eine Vertauschung von t_{ν_1} und t_{ν_2} an dem Potenzprodukt nichts ändern, wenn $b_1 = b_2$ ist. Auch wird, wenn beispielsweise $b_n = 0$ ist, stets dasselbe Potenzprodukt sich ergeben, wenn die Unbestimmten $t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_{n-1}}$ beibehalten werden, t_{ν_n} aber durch irgend eine andere (unter $t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_{n-1}}$ nicht vorkommende) Unbestimmte ersetzt wird. Wesentlich ist, daß in (3) keine zwei Potenzprodukte vorkommen sollen, die sich (etwa nach Umstellung in der Reihen-

$$Y_{\mathfrak{B}} = Y_{\mathfrak{B}}(x) = \Sigma\, x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}, \tag{4}$$

die man erhält, wenn man jede Unbestimmte t_ν durch den Wert x_ν ersetzt, gilt dann der

Satz 1. Die Reihe (4) ist absolut-konvergent dann und nur dann, wenn im System $\mathfrak{B}$ jede von 0 verschiedene Zahl $b_\nu \geqq m$ ist.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ergibt sich nämlich einfach daraus, daß für jeden Wert $k > 0$, der unter den Zahlen b_ν vorkommt, eine Teilreihe von (4) von der Gestalt $C \sum\limits_{\lambda=p+1}^{\infty} x_\lambda^k$ existiert, unter C ein geeignet gewähltes Potenzprodukt von Zahlen x_ν verstanden[3], also eine Teilreihe, die gewiß nicht absolut konvergiert, wenn $k < m$ ist. Um andererseits das Hinreichen der Bedingung zu zeigen, genügt der Nachweis der absoluten Konvergenz jener Reihe Y^*, die man aus (4) erhält, wenn man alle Exponenten $b_\nu > 0$ durch m ersetzt. Die absolute Konvergenz von Y^* erkennt man aber, indem man jedes x_ν^m durch y_ν ersetzt, aus dem Satz[4], daß alle Potenzproduktsummen $\Sigma\, y_1 \ldots y_n$ (und übrigens überhaupt alle Reihen (4), darin die x durch die y ersetzt) stets absolut konvergent sind, wenn $\Sigma\, y_\nu$ absolut konvergiert.

2. Die „symmetrischen ganzen Funktionen" $F(t)$ der unendlich vielen Unbestimmten t_ν, von denen wir hier sprechen wollen, sollen nun definiert sein durch eine unendliche Reihe

$$F(t) = \sum_{\mathfrak{B}} c_{\mathfrak{B}}\, Y_{\mathfrak{B}}(t), \tag{5}$$

in der die Summe sich auf alle den Bedingungen (1), (2) ge-

---

folge der Faktoren) als gleich erweisen. Vgl. auch l. c. [1], Monatshefte Bd. 49, S. 50, Anm. 93.

Zusatz: Wird auch der Fall $n = 0$ (also alle $b_\nu = 0$) einbezogen, so erhält man bei allen Vertauschungen der t_ν stets dasselbe Potenzprodukt $t_{\nu_1}^{b_1} \ldots t_{\nu_n}^{b_n} = 1$, sodaß in diesem Falle $Y_0(t) = 1$ zu setzen ist.

[3] Man kann dabei für $p+1$ die Anzahl der von 0 verschiedenen Exponenten b_ν nehmen und, je nachdem $p = 0$ oder > 0 ist, $C = 1$ oder $C = x_1^{c_1} \ldots x_p^{c_p}$ setzen, unter $c_1, \ldots, c_p$ die Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ nach Weglassung einer Zahl k und aller Nullen verstanden.

[4] Vgl. l. c. [1], S. 51, Nr. 53.

nügenden Exponentensysteme $\mathfrak{B}$ und dabei auf alle Werte $n = 0, 1, 2, \ldots$ erstreckt, hierbei $Y_{(0)}(t) = 1$ gesetzt[5]. Für ein bestimmtes, weiterhin festgehaltenes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ liefert dann Satz 1 die Bedingung

$$b_\nu \geqq m, \text{ falls } b_\nu \neq 0 \tag{6}$$

dafür, daß der einzelne Summand $c_{\mathfrak{B}}\, Y_{\mathfrak{B}}(x)$ der Reihe $F(x)$ selbst eine absolut-konvergente Reihe darstellt, sodaß wir von den komplexen Koeffizienten $c_{\mathfrak{B}}$ alle jene $= 0$ annehmen wollen, für welche sich im System $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl $b_\nu < m$ befindet. Auf die sich hier anschließende Frage, welchen Bedingungen bei gegebenen x_ν die $c_{\mathfrak{B}} \neq 0$ (bzw. welchen Bedingungen bei gegebenen $c_{\mathfrak{B}}$ die x_ν) genügen müssen, damit die Reihe (5) konvergiert, soll hier aber nicht eingegangen werden.

3. Vielmehr soll eine Frage behandelt werden, die l. c.[1] nur für den besonderen Fall $m = 1$ erörtert wurde. In diesem besonderen Fall (wo also alle $Y_{\mathfrak{B}}(x)$ konvergieren) gilt, daß durch die (bei unendlicher Anzahl der x_ν unendlich vielen) symmetrischen Grundfunktionen

$$\begin{aligned} f_1 = Y_1(x) = \Sigma\, x_1, f_2 = Y_{1\,1}(x) = \Sigma\, x_1 x_2, \ldots, f_\nu = \\ = Y_{1,\ldots,1}(x) = \Sigma\, x_1 \ldots x_\nu, \ldots . \end{aligned} \tag{7}$$

sich alle $Y_{\mathfrak{B}}(x)$ darstellen lassen, u. zw. als Polynome in den f_ν mit rationalen (und sogar ganzen rationalen) Koeffizienten, wobei die betreffenden Formeln sich mit denen für endlich viele x_ν decken. Hieraus folgt dann von selbst die Darstellbarkeit aller symmetrischen ganzen Funktionen $F(x)$ durch die f_ν. Wir wollen nun für ein beliebiges m nach einem System von Funktionen

$$g_1 = Y_{\mathfrak{B}_1}(x),\ g_2 = Y_{\mathfrak{B}_2}(x),\ \ldots,\ g_\nu = Y_{\mathfrak{B}_\nu}(x),\ \ldots \tag{8}$$

fragen, derart daß diese Funktionen (die wir von wachsender Gradzahl in den x denken) sämtlich der Konvergenzbedingung des Satzes 1 genügen und daß alle der Konvergenzbedingung des Satzes 1 genügenden $Y_{\mathfrak{B}}(x)$ sich als Polynome in den Funktionen g_ν darstellen lassen.

---

[5] Natürlich kann man (vgl. l. c.[1], S. 49, Anm. 89) wesentlich allgemeinere „symmetrische Funktionen" einführen und dabei von Symmetrie-Eigenschaften ausgehen, statt — wie hier — von Formen der Herstellung.

Natürlich sind hiefür, wenn $m > 1$ ist, die symmetrischen Grundfunktionen (7), weil divergent, nicht brauchbar. Bleiben wir aber vorerst einen Augenblick beim Fall $m = 1$, so ist aus den Entwicklungen l. c. [1] leicht ersichtlich, dass alle $Y_{\mathfrak{B}}(x)$ auch als Polynome in den Potenzsummen

$$s_1 = Y_1(x) = \Sigma x_1, \; s_2 = Y_2(x) = \Sigma x_1^2, \ldots, s_\nu = \\ = Y_\nu(x) = \Sigma x_1^\nu, \ldots \tag{9}$$

darstellbar sind, u. zw. wieder als Polynome mit rationalen (wenn auch nicht durchwegs ganzen) Koeffizienten. Denn aus den dortigen Entwicklungen ist sofort zu sehen, daß die bekannten Formeln von Newton und Waring, die bei endlich vielen x_ν die Grundfunktionen f_ν mit den Potenzsummen s_ν verknüpfen, sich unverändert auf unendlich viele x_ν mit absolut-konvergenter Σx_ν übertragen.

Wir wollen nun zeigen, daß für beliebiges m die Gesamtheit derjenigen Potenzsummen (9), für welche $\nu \geqq m$ ist, ein System von Funktionen g_ν der verlangten Art darstellt, daß also $g_\nu = s_{\nu+m-1}$ $(\nu \geqq 1)$ genommen werden kann. Die Koeffizienten der Polynome in den s_ν $(\nu \geqq m)$, durch welche die $Y_{\mathfrak{B}}(x)$ darstellbar sind, werden sich dabei wieder als rational erweisen. Auf die Frage nach der Existenz eines Systems (8), für das die entsprechenden Koeffizienten ganz ausfallen — wie dies für $m = 1$ die Funktionen (7) leisten — soll nicht eingegangen werden.

4. Der Satz, den wir beweisen wollen und der alle diese Behauptungen in sich schließt, lautet nun:

Satz 2. Jede Potenzproduktsumme

$$Y_{\mathfrak{B}}(x) = \Sigma x_1^{b_1} \ldots x_h^{b_h}$$

mit einem Exponentensystem von $h\,(\geqq 1)$ durchwegs positiven Exponenten b_ν, die sämtlich $\geqq m$ sind, läßt sich als rationalzahliges Polynom der Potenzsummen

$$s_\nu = \Sigma x_1^\nu \qquad (m \leqq \nu \leqq n)$$

darstellen, wobei $n = b_1 + \ldots + b_h$ ist.

Statt bei der Formulierung dieses Satzes von nur positiven Exponenten b_ν zu reden, können wir auch, indem wir $n - h$ Nullen zu $\mathfrak{B}$ hinzunehmen, von einem den Bedingungen (1), (2), (6) genügenden System $\mathfrak{B}$ sprechen. Zum Beweis von Satz 2 ziehen wir nun für festes n alle den Bedingungen (1), (2), (6) genügenden Systeme nicht-negativer Exponenten $(b_1, \ldots, b_n)$ in Betracht, wobei $Q_m(n)$ die Anzahl dieser Systeme sei[6]. Ebensogroß ist natürlich die Anzahl aller Produkte von Potenzsummen

$$X_{\mathfrak{A}} = s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_n}, \tag{10}$$

wenn das Zahlensystem $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ dabei den gleichen Bedingungen (1), (2), (6), wie das System $\mathfrak{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ unterworfen und (im Einklang mit dem Zusatz in Anm. 2) $s_0 = 1$ gesetzt wird.

Jedes Produkt (10) ist nun mit ganzen rationalen Koeffizienten $C_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ darstellbar in der Gestalt

$$X_{\mathfrak{A}} = \Sigma\, C_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\, Y_{\mathfrak{B}}, \tag{11}$$

die Summe erstreckt über alle $Q_m(n)$ den Bedingungen (1), (2), (6) genügenden Systeme $\mathfrak{B}$. Denn wenn wir zunächst nur mit einer endlichen Anzahl l $(\geqq n)$ von Zahlen x_ν rechnen, ist Folgendes klar: falls sämtliche a_ν, die $\neq 0$ sind, auch $\geqq m$ sind, dann können bei der Darstellung von $X_{\mathfrak{A}}$ durch die $Y_{\mathfrak{B}}$ nur solche Exponenten $b_\nu \neq 0$, die $\geqq m$ sind, bei den auftretenden $Y_{\mathfrak{B}}$ vorkommen. Die $C_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ sind aber von l unabhängig und bleiben beim Grenzübergang $l \to \infty$ unverändert. Betrachtet man nun das System von Gleichungen (11), das man erhält, wenn man $\mathfrak{A}$ alle $Q_m(n)$ den Bedingungen (1), (2), (6) genügenden Zahlensysteme $(a_1, \ldots, a_n)$ durchlaufen läßt, dann kommt es für den Beweis von Satz 2 nur darauf an zu zeigen, daß die

[6] Es ist also $Q_m(n)$ die Anzahl aller derjenigen Partitionen der Zahl n, bei denen alle Summanden $\geqq m$ sind. — An anderer Stelle, nämlich in den Noten „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln", diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1940, S. 23, Anm. 2 und „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmengen", ebenda, Nr. **54**, S. 119, trat umgekehrt neben der Anzahl $P(n)$ aller Partitionen von n noch die Anzahl $P_m(n)$ der Partitionen von n mit lauter Summanden $\leqq m$ auf. Natürlich ist $Q_1(n) = P_n(n) = P(n)$.

aus den Koeffizienten $C_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ gebildete $Q_m(n)$-reihige Determinante $\Delta_m(n) \neq 0$ ist. Dies aber erkennt man, wenn man — wieder auf eine endliche Anzahl l von Größen x_ν zurückgreifend — im Falle $m > 1$ zu den $Q_m(n)$ Gleichungen (11) noch alle jene $Q_1(n) - Q_m(n)$ Gleichungen $X_{\mathfrak{A}} = \Sigma\, C_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}\, Y_{\mathfrak{B}}$ hinzunimmt, bei denen unter den positiven Zahlen a_ν auch solche $< m$ auftreten und dementsprechend unter den positiven Exponenten b_ν in den Systemen $\mathfrak{B}$ auch solche $< m$ zugelassen sind. Das so erweiterte System ist nun sicher eindeutig nach den $Y_{\mathfrak{B}}$ auflösbar, weil diese sich nicht nur als ganzzahlige Polynome der f_ν $(\nu \leqq n)$ sondern, ebenso wie die f_ν, auch als rationalzahlige Polynome der s_ν $(\nu \leqq n)$ darstellen lassen. Demnach hat das erweiterte System eine Determinante $\Delta_1(n)$, die sicher $\neq 0$ ist. Dann muß aber auch $\Delta_m(n) \neq 0$ sein, weil diejenigen $Q_m(n)$ Zeilen der Determinante $\Delta_1(n)$, die den (1), (2), (6) genügenden Zahlensystemen $\mathfrak{A}$ zugehören, zunächst in ihren ersten $Q_m(n)$ Kolonnen die Haupt-Unterdeterminante $\Delta_m(n)$, in den übrigen $Q_1(n) - Q_m(n)$ Kolonnen aber nur Nullen enthalten, sodaß $\Delta_1(n)$ die Determinante $\Delta_m(n)$ als Faktor enthält. Es ist also tatsächlich $\Delta_m(n) \neq 0$.

Damit ist Satz 2 nebst dem am Schluß von Nr. **3** Gesagten nachgewiesen.