

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1944. Heft I/II

Sitzungen Januar-Juli

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Stäckelschen Lückenzahlen nebst kleinen Randbemerkungen zur Verteilung der Primzahlen.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 3. März 1944.

1. In einer nachgelassenen Arbeit P. Stäckel's¹ werden Zahlen behandelt, die er als „Lückenzahlen“ bezeichnet². Das Studium dieser Zahlen, die mit Legendre's Beweisversuch des Satzes von den Primzahlen in einer teilerfremden arithmetischen Progression in engster Beziehung stehen, hat Stäckel zunächst im Hinblick auf das alte empirische Goldbachsche Theorem von der Darstellbarkeit gerader Zahlen als Summe zweier Primzahlen und auf verwandte Aussagen unternommen (worauf ja auch der Titel seiner Abhandlung hinweist). Er ist aber dabei zu empirischen Sätzen bzw. Vermutungen über das Auftreten von Primzahl-

¹ P. Stäckel-W. Weinreich, Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen, Abhandlungen der Heidelberger Akad. d. Wiss., Stiftung Heinrich Lanz, Math. naturwiss. Klasse, 10. Abhdlg. (1922), S. 1-55. Weinreich, dessen Mitarbeit Stäckel im Vorwort besonders hervorhebt, hat nach Stäckel's Tod (1920) die Veröffentlichung durchgeführt. In dieser Abhandlung gibt Stäckel von dem bereits in den Arbeiten „Die Lückenzahlen r -ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen, mit Beiträgen von W. Weinreich“, Teil I, II, III (Sitzber. der Heidelberger Akad., math. naturw. Kl., Jgg. 1917, 15. Abhdlg., Jgg. 1918, 2. Abhdlg., Jgg. 1918, 14. Abhdlg.) untersuchten Gegenstand eine neue einheitliche Darstellung. Vorausgegangen war eine Veröffentlichung „Über das Goldbachsche empirische Theorem“, Göttinger Nachrichten, Math. phys. Kl., 1896, S. 292. Wie bereits in der Mitteilung II, l. c.⁶ erwähnt, verdanke ich den Hinweis auf diese Stäckelschen Untersuchungen Herrn Kollegen Perron.

² Dabei sei auf die Fortführung der Stäckelschen Untersuchungen durch R. Haußner hingewiesen. Siehe Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 31 (1922), p. 115-124.

Zusatz bei der Korrektur: Diese Untersuchungen sind (vgl. l. c.^{7a}) von R. Haußner weitergeführt und verallgemeinert worden und es können die im folgenden § 1 besprochenen Zahlen füglich als „Stäckel-Haußnersche Lückenzahlen“ bezeichnet werden.

gruppen gekommen³ und damit auf allgemeine Fragen gestoßen, in denen das schon vorher verschiedentlich behandelte Problem der „Primzahlzwillinge“⁴ als spezieller Fall enthalten ist, — Fragen, auf die ich in anderer, vor Kenntnis der Stäckelschen Arbeit aufgestellter Formulierung⁵ kürzlich hingewiesen habe⁶. Wie die

³ Satz 1 und 2 der Abhandlung l. c. ¹, S. 38 und 44.

⁴ Der Name rührt wohl von Stäckel her. In der vorhergehenden Literatur wird von Primzahlpaaren (prime pairs) gesprochen. Aus dieser sei angeführt: L. Glaisher, An enumeration of prime pairs, Messenger of Math. (2) 8 (1878). V. Brun, Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Matematik og Naturvidenskab 24 (1915). Über den Brun'schen Satz über Primzahlzwillinge vgl. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, 3 Bände, Bd. I., Leipzig 1927, 2. Teil, Kap. 2, S. 71–78.

Weitere Literatur: G. H. Hardy-J. E. Littlewood, Some problems of „Partitio numerorum“: III. On expression of a number as a sum of primes, Acta math. 44 (1922) 1–70, zweiter Teil; Viggo Brun, Untersuchungen über das Siebverfahren des Eratosthenes, Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 33 (1925) p. 91; N. Pipping, Über Zwillingsprimzahlen und Goldbachsche Spaltungen, Commentationes Helsingfors 3, No. 2; C. S. Sutton, An investigation of the average distribution of twin prime numbers, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, t. 16, p. 1–42.

Wegen der Verallgemeinerung auf Primzahlpaare mit vorgegebener gerader Differenz vgl.: B. Segal, Généralisation du théorème de Brun, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, Nouvelle Série, Leningrad (1930) p. 501–507; K. Koutský, Časopis pro přestování matematiky a fysiky, Praha, 62, p. 5–7 sowie Rozpravy České-Akademie ved. II Trida, Praha 42, Nr. 30 und Bulletin international Acad. Bohême, 33, p. 155–163.

Zur gleichen Verallgemeinerung gelangt (vgl. Dickson, l. c. ⁶, vol. I, p. 425) empirisch bereits viel früher ein unbekannter Autor, Nouv. Ann. Math. 8 (1849), p. 428 und 14 (1855), p. 118. Denselben Satz erwähnt L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von K. Hensel, I (1901), S. 68.

⁵ Über das Problem endlicher Gruppen von Primzahlen mit vorgegebener gegenseitiger Lagerung I, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1944, Summarischer Bericht über die Sitzung vom 14. Jan. 1944, Punkt 1.

⁶ Bereits ein Jahrzehnt vor Stäckel hat Otto Meissner Fragestellungen dieser Art aufgeworfen in einer knappen Notiz (Archiv der Math. u. Physik, Bd. 9, 1905, S. 97, Frage 25), die von Stäckel unbemerkt geblieben ist und mir nur durch ihre Erwähnung in L. E. Dickson's fundamentaler „History of the theory of numbers“, Vol. I, Divisibility and Primality, Washington 1919 (auf S. 438) bekannt wurde (Die Zusammenhänge mit der Meissnerschen Notiz sind dargelegt in der Mitteilung „Über das Problem endlicher Gruppen

Fragen hier und dort zusammenhängen, ist durch diese Verschiedenheit der Formulierungen etwas verdeckt. Die folgenden Zeilen sollen zunächst (in § 1) diesen Zusammenhang⁷ darlegen, wobei der Begriff der Lückenzahlen in engerem Anschluß an die l. c.⁵ gegebene Darstellungsform und zugleich etwas allgemeiner als bei Stäckel entwickelt werden soll^{7a}.

Des weiteren möge eine Bemerkung Platz finden (§ 2) über den eingangs erwähnten Dirichlet'schen Satz über die unendlich vielen Primzahlen in einer teilerfremden arithmetischen Progression⁸, daß nämlich dieser Satz sich deckt mit der Aus-

von Primzahlen mit vorgegebener gegenseitiger Lagerung II⁴, Bayer. Sitz.-ber., Summarischer Bericht über die Sitzung am 4. Febr. 1944); und so ist es nicht ausgeschlossen, daß auch noch andere sich die gleichen oder ähnliche Probleme vorgelegt haben.

⁷ Diesen Zusammenhang habe ich in der Mitteilung II, l. c.⁶ — einen Tag, nachdem ich die Stäckelsche Arbeit unter den derzeit erschwerten Bibliotheksverhältnissen durch das Entgegenkommen von Herrn Kollegen Baldus zu Gesicht bekommen hatte — nur kurz erwähnen können.

^{7a} Wie ich inzwischen einem Referat im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 53, Jahrgang 1927 (1931), p. 135, entnehme, ist diese Verallgemeinerung schon von R. Haußner, „Untersuchungen über Lückenzahlen und den Goldbachschen Satz“, Journal f. Math. 158, p. 173–194, betrachtet worden. Vgl. ferner R. Haußner, „Über die Verteilung von Lückenzahlen und Primzahlen“, Journal f. Math. 167, p. 424–426 und 168, p. 192; „Sobre la distribución de los números primos“, Revista matemática hispano-americana, Madrid (2) 7, p. 225–230, sowie Boletín Seminario Mat. 3, p. 105 bis 110, (vgl. Jahrbuch über d. Fortschritte d. Math. Bd. 58^I, 58^{II} und 59^{II}). [Zusatz bei der Korrektur.]

⁸ Von Mertens rührt eine wesentliche Umarbeitung des Dirichletschen Beweises her (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. zu Wien, math.-naturw. Classe, Abt. II a, Bd. 106 (1897), S. 254–286), wobei gezeigt wird, daß für beliebiges ganzes $N > 0$ der Bereich $N+1, N+2, \dots, NK$ wenigstens eine Primzahl der Progression $kx + l$ mit $k > 2$, $(k, l) = 1$ enthält, wenn $K = 1 + E(e^{2B})$ mit

$$B = \varphi(k) \sum_q \frac{\log q}{q(q-1)} + \sum_p \frac{\log p}{p} + 1 + \\ + \sum_{i=1}^{\varphi(k)-1} \left(\frac{1}{2} \log 2 + \varphi(k) \left(\frac{1}{6} \log 3 + \frac{1}{2} \log 5 \right) \right) \cdot \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} f_i(\nu) \right|^{-1}$$

gesetzt ist; dabei ist die erste Summe über alle Primzahlen q , die zweite über alle in k aufgehenden Primzahlen p zu erstrecken; $E(x)$ bedeutet die größte

sage von der Existenz wenigstens einer Primzahl in jeder solchen Progression⁹. Schließlich (§ 3) wird im Anschluß an die bekannte Beobachtung des anzahlmäßigen Überwiegens der Primzahlen von der Gestalt $4n+3$ über jene von der Gestalt $4n+1$ eine Frage erwähnt, die sich — gestützt auf ein freilich nur recht beschränktes empirisches Material — auf wesentlich allgemeinere Fälle eines solchen Überwiegens bezieht.

§ 1. Lückenzahlen und kompatible Figuren.

2. Die im Folgenden auftretenden Zahlen sind durchwegs ganz rational. Unter einer „Figur“ $[a_1, \dots, a_k]$ verstehen wir eine endliche Menge verschiedener Zahlen a_λ , die wir in wachsender Anordnung

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

annehmen wollen. (Auch der Fall $k=1$ ist zugelassen, jedoch weiterhin meist trivial. Zwei Figuren gleicher Gliederzahl k

$$[a_1, \dots, a_k] \text{ und } [b_1, \dots, b_k] \quad (1)$$

sollen „kongruent mod. m “ heißen, wenn es eine Zahl h gibt, so daß

$$a_\lambda = b_\lambda + h m \text{ für } \lambda=1, \dots, k$$

gilt. Im Falle $m=1$ sagen wir statt „kongruent mod. 1“ auch¹⁰ einfach „kongruent“. Sind die Figuren (1) modulo m kongruent, so ist natürlich für jedes λ

$$a_\lambda \equiv b_\lambda \pmod{m}, \quad (2)$$

während im Falle $k > 1$ aus (2) nicht auf die Kongruenz mod. m der Figuren (1) geschlossen werden kann. Wohl aber gilt offenbar:

ganze Zahl $\leq x$ und die Funktionen $f_i(v)$ sind die vom Hauptcharakter verschiedenen Charaktere ($f_i(v) = 0$ für $(v, k) > 1$).

⁹ Wie man geneigt sein könnte, den alten Spruch Ben Akiba's oder Mephisto's Worte in Goethe's Faust II, 2. Aufzug (Vers 3 und 4 nach Baccalaureus' Abgang) zum Motto dieser Note zu wählen, so möchte man wohl annehmen, daß vielleicht auch die obige Bemerkung schon da und dort gemacht wurde.

¹⁰ Vgl. l. c. ⁵.

(a) Für zwei kongruente (nämlich mod. 1 kongruente) Figuren (1) folgt ihre Kongruenz modulo m aus dem Bestehen von (2) für einen einzigen Wert λ .

3. Ist l eine Primzahl, dann heiße die Figur $[a_1, \dots, a_h]$ „zulässig“ für die Primzahl l , wenn es wenigstens eine Zahl r gibt, sodaß keine der Kongruenzen $a_\lambda \equiv r \pmod{l}$ besteht; und wir nennen die Figur „ ρ -fach zulässig“ oder „zulässig vom Grad ρ “, wenn ρ die Anzahl der Restklassen mod. l ist, die unter den Zahlen $a_1, \dots, a_h$ nicht vertreten sind¹¹. Offenbar hat man:

(b) Bezüglich einer Primzahl l haben kongruente Figuren den gleichen Zulässigkeitsgrad ρ , sind also beide zulässig oder beide unzulässig.

4. Es gilt dann der¹²

Satz 1. Sei $g \geq 1$, seien $l_1, \dots, l_g$ verschiedene Primzahlen, sei ρ_γ der Zulässigkeitsgrad der Figur $[a_1, \dots, a_h]$ bezüglich l_γ ($\gamma=1, \dots, g$) und

$$l_1 \dots l_g = L, \quad \rho_1 \dots \rho_g = \rho.$$

Es gibt dann genau ρ zur Figur $[a_1, \dots, a_h]$ kongruente, unter einander mod. L inkongruente Figuren

$$[b_1^{(\nu)}, \dots, b_h^{(\nu)}] \quad (1 \leq \nu \leq \rho), \quad (3)$$

deren sämtliche Zahlen $b_\lambda^{(\nu)}$ zu L teilerfremd sind.

Der Beweis geschehe durch Induktion (von $g-1$ auf g), wobei alle $\rho_\gamma > 0$ vorausgesetzt werden dürfen, da die Behauptung klar ist, wenn unter den ρ_γ die Null vorkommt. — Ist $g=1$, so ist

$$[a_1 - h, \dots, a_h - h]$$

dann und nur dann eine Figur mit lauter zu l_1 teilerfremden Zahlen, wenn h einer jener $\rho = \rho_1$ Restklassen mod. l_1 angehört,

¹¹ Es ist $\rho = l - h$ für alle Primzahlen $l > a_h - a_1$ und überhaupt für alle Primzahlen $> p$, wenn p die größte Primzahl ist, die in einer der Differenzen $a_\lambda - a_\mu$ ($\lambda > \mu$) aufgeht; vgl. P. Stäckel, l. c. ¹, § 2, S. 10, wobei dort unter der Bezeichnung $V(l)$ unser $l - \rho$ auftritt, sonach $l - V(l)$ für unser ρ steht.

¹² Vgl. P. Stäckel, l. c. ¹, § 5, Formel (11), S. 13.

die unter den a_λ nicht vertreten sind. Das gibt genau ρ nach dem Modul $L = l_1$ inkongruente Figuren (3) der gewünschten Art. — Ist $g > 1$, dann werde die Gültigkeit der Behauptung für $g - 1$ anstatt g als richtig angenommen und es mögen, wenn

$$l_1 \dots l_{g-1} = L', \quad \rho_1 \dots \rho_{g-1} = \rho'$$

gesetzt wird,

$$[c_1^{(x)}, \dots, c_k^{(x)}] \quad (1 \leq x \leq \rho') \quad (4)$$

ein volles System zu einander mod. L' inkongruenter Figuren darstellen, alle zu $[a_1, \dots, a_k]$ kongruent und gebildet aus lauter Zahlen $c_\lambda^{(x)}$, die zu L' teilerfremd sind¹³. Eine Figur (3), die bezüglich aller g Primzahlen unseren Forderungen entspricht, muß nun offenbar mod. L' einer (und natürlich nur einer) der Figuren (4) kongruent und daher von der Gestalt

$$[c_1^{(x)} - L'x, \dots, c_k^{(x)} - L'x] \quad (5)$$

sein. Dabei muß, weil (5) bezüglich l_g zulässig sein soll,

$$L'x \equiv r \quad (\text{mod. } l_g)$$

sein, unter r eine Zahl aus einer jener ρ_g Restklassen mod. l_g verstanden, die unter den Zahlen der Figur $[c_1^{(x)}, \dots, c_k^{(x)}]$ nicht vertreten sind. Durch die (demgemäß auf ρ_g verschiedene Arten mögliche) Wahl von r ist demnach x modulo l_g , somit $L'x$ modulo $L'l_g = L$ völlig bestimmt. Figuren (5), die unseren Forderungen genügen und mod. L inkongruent sind, erhalten wir also bei festem x in der Anzahl ρ_g ; daher, wenn wir x von 1 bis ρ' laufen lassen, in der Anzahl $\rho' \rho_g = \rho$, womit Satz 1 bewiesen ist.

5. Eine leichte Erweiterung von Satz 1 gibt

Satz 1a. Unter den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 1 gibt es, wenn noch $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ positive ganze Zahlen bedeuten und

¹³ Gemäß (a) sind dabei für jedes λ die ρ' Zahlen $c_\lambda^{(x)}$ ($1 \leq x \leq \rho'$) untereinander mod. L' inkongruent. Es genügt also zur Kennzeichnung der einzelnen Figur (4) beispielsweise die Kenntnis der Restklasse mod. L' , in der $c_1^{(x)}$ liegt.

$K = l_1^{\alpha_1} \dots l_g^{\alpha_g} g = L M$, $\sigma = \rho M$ gesetzt ist, genau σ zur Figur $[a_1, \dots, a_k]$ kongruente, untereinander mod. K inkongruente Figuren

$$[c_1^{(\tau)}, \dots, c_k^{(\tau)}] \quad (1 \leq \tau \leq \sigma), \quad (6)$$

gebildet aus lauter zu K teilerfremden Zahlen $c_\lambda^{(\tau)}$.

Denn eine der gewünschten Figuren (6) muß mod. L einer der Figuren (3) des Satzes 1 kongruent und daher von der Gestalt

$$[b_1^{(v)} - Lt, \dots, b_k^{(v)} - Lt] \quad (7)$$

sein, wobei man ein volles System mod. K inkongruenter Figuren erhält, wenn (bei jedem einzelnen v) t ein volles Restsystem mod. M durchläuft.

6. Als Korollar folgt aus Satz 1:

Satz 2. Ist die Figur $[a_1, \dots, a_k]$ für jede der Primzahlen $l_1, \dots, l_g$ zulässig, dann gibt es (unendlich viele) zu $[a_1, \dots, a_k]$ kongruente Figuren $[b_1, \dots, b_k]$, deren sämtliche Zahlen b_λ zu $L = l_1 \dots l_g$ teilerfremd sind.

Satz 2 deckt sich im Wesentlichen mit dem Lehrsatz III bei Stäckel¹⁴, der sich allerdings auf den Fall beschränkt, den man erhält, wenn man unter $p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$ die Folge der ungeraden Primzahlen versteht, $g = r + 1$ setzt und für $l_1, \dots, l_g$ die Primzahlen $2, p_1, \dots, p_r$ nimmt. Die zu $L = l_1 \dots l_g = 2p_1 \dots p_v$ teilerfremden Zahlen¹⁵ werden dann als „Lückenzahlen r -ter Stufe“ bezeichnet¹⁶. Nennt man eine Figur $[a_1, \dots, a_k]$

¹⁴ Vgl. I. c. ¹, S. 9.

¹⁵ Die Bezeichnungen Stäckel's sind derart, daß die Primzahl 2 eine scheinbare Sonderstellung einnimmt (vgl. die Bemerkung von Weinreich, I. c. ¹, S. 7, Anm.).

¹⁶ Unter diesen Lückenzahlen befinden sich somit alle Primzahlen $> p_r$; da diese Zahlen bei fortgesetzter Anwendung des Sieb-Verfahrens des Eratosthenes dauernd stehen bleiben, wird hier das Wort „Lücke“ anders verwendet, als etwa bei einer Zahnreihe (Häuserreihe), wo man von Lücken gerade bei denjenigen Zähnen (Häusern) spricht, die nicht stehen geblieben sondern herausgezogen (zerstört) sind.

Abweichend von der im Text gegebenen Darstellung sind es die Differenzen $\delta_\lambda = b_{\lambda+1} - b_\lambda = a_{\lambda+1} - a_\lambda$, von denen bei Stäckel hauptsächlich die Rede ist („zulässige Differenzenfolgen“). Demgegenüber berücksichtigt die Betrachtung der „Figuren“ die Möglichkeit von Verallgemeinerungen von einer Dimension auf mehr Dimensionen (vgl. I. c. ⁵ die Schlußbemerkung).

„kompatibel“¹⁷, wenn sie für jede Primzahl l zulässig ist, dann gelangt man (durch Anwendung von Satz 2 auf das Produkt aller in m aufgehenden Primzahlen) zu:

(c) Ist die Figur $[a_1, \dots, a_k]$ kompatibel, dann gibt es zu jeder beliebigen ganzen Zahl m (unendlich viele) Figuren $[b_1, \dots, b_k]$, die zu $[a_1, \dots, a_k]$ kongruent und aus lauter zu m teilerfremden Zahlen b_i gebildet sind.

7. Hieran anschließend gelangt man zu der Frage nach der Existenz einer derartigen aus lauter Primzahlen gebildeten Figur $[b_1, \dots, b_k]$, die zu einer gegebenen kompatibeln Figur kongruent ist; des weiteren, ob unendlich viele solche Figuren $[b_1, \dots, b_k]$ existieren. Jeweils kann man noch zusätzlich verlangen, daß in der Folge der Primzahlen die Zahlen $b_1, \dots, b_k$ unmittelbar aufeinander folgen, oder man kann von dieser Forderung absehen. Stäckels Vermutungen (vgl. l. c.³) gehen nun dahin, daß alle diese Fragen zu bejahen sind. Die durch die eben genannte Zusatz-Forderung verschärfte Frage ist es, auf die l. c.⁵ hingewiesen wurde. Hingegen handelt es sich in der Notiz von O. Meissner, l. c.⁶, um Fragen ohne diese zusätzliche Forderung.

§ 2. Die Existenz von Primzahlen in einer teilerfremden arithmetischen Progression.

8. Mit $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \dots\}$ soll eine Menge ganzer positiver Zahlen bezeichnet werden von der Eigenschaft, daß sich zu jedem beliebigen Paar teilerfremder¹⁸ ganzer rationaler Zahlen a, b unter den Zahlen M_μ wenigstens eine durch a teilbare und zu b teilerfremde Zahl findet. Eine solche „vollständige Vielfachen-Menge“ werde kurz eine „ $\mathfrak{M}$ -Menge“ genannt¹⁹.

¹⁷ Vgl. l. c.⁵.

¹⁸ Es sei also $(a, b) = 1$, unter (a, b) den größten gemeinsamen Teiler von a, b verstanden.

¹⁹ Beispiele: die Menge aller ganzen Zahlen über einer positiven Schranke G ; die Menge aller Quadratzahlen; die Menge aller Zahlen n^n ($n = 1, 2, \dots$). Vgl. auch die vorangehende Note „Über vollständige Vielfachen-Mengen“ in diesen Sitz.ber.

9. Dann gilt der Satz:

(A) Die Gültigkeit des Dirichletschen Satzes, daß in jeder teilerfremden arithmetischen Progression²⁰ $mx + r$ ($x = 1, 2, 3, \dots$) unendlich viele Primzahlen vorkommen, folgt unmittelbar, wenn für jede solche Progression, in der m einer bestimmten $\mathfrak{M}$ -Menge angehört, die Existenz wenigstens einer der Progression angehörenden Primzahl gesichert ist.

Hierin ist (indem man für $\mathfrak{M}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen nimmt) speziell der Satz enthalten:

(B) Der Dirichletsche Satz folgt aus der Existenz wenigstens einer Primzahl in jeder teilerfremden arithmetischen Progression.

10. Der Beweis von (A) wird sich (Nr. 11) aus den folgenden Hilfssätzen (C), (D) ergeben:

(C) Zu gegebenen ganzen Zahlen $C > 1$, m , r , für welche

$$0 \leq r < m, \quad (m, r) = 1 \quad (8)$$

ist, gibt es stets ganze positive Zahlen c_0 , x_0 derart, daß die Zahlen $M = c_0 m$ und $R = mx_0 + r$ den Bedingungen

$$C \leq R < M, \quad (9)$$

$$(M, R) = 1 \quad (10)$$

genügen und somit alle Zahlen der arithmetischen Progression $My + R$ ($y = 1, 2, \dots$) zugleich Zahlen der Progression $mx + r$ und dabei $\geq C$ sind.

(D) Die Bestimmung der Zahlen c_0 , x_0 in (C) ist im besonderen so möglich, daß M einer vorgegebenen „vollständigen Vielfachen-Menge“ $\mathfrak{M}$ (vgl. Nr. 8) angehört.

Um (C) nachzuweisen, braucht man nur die ganze positive Zahl x_0 so zu wählen, daß

$$R = mx_0 + r \geq C$$

ausfällt, und hierauf c_0 gleich einer Potenz m^h von m (oder gleich einer Zahl μ , die in einer Potenz m^h aufgeht,) und zugleich so groß, daß

²⁰ Für die Zahlen m , r soll also (8) gelten. Von dem trivialen Fall $m = 1$ abgesehen ist also natürlich $r > 0$.

$$M = c_0 m > R$$

wird²¹.

Um die Richtigkeit von (D) zu sehen, mögen x_0 und c_0 so wie eben besprochen gewählt werden und hierauf M als eine durch $c_0 m$ teilbare und zu R teilerfremde²² Zahl der gegebenen Menge $\mathfrak{M}$.

11. Die Richtigkeit von (A) leuchtet nun unmittelbar ein: Zu m, r (bei beliebiger Wahl von $C = C_0$) bestimmen wir $M = M_1$, $R = R_1$ gemäß (D), sodaß nach Voraussetzung eine Primzahl $p_1 = M_1 y_1 + R_1 \geq R_1 \geq C_0$ existiert. Nunmehr wählen wir $C_1 > p_1$ und ziehen wieder Satz (D) heran, darin m, r, C durch

²¹ Etwas allgemeiner kann man so verfahren: Man wählt die ganzen positiven Zahlen ξ, γ, x_0 so, daß

$$z = m \xi + r \geq C, \quad (11)$$

ferner

$$(\gamma, m) = 1$$

ausfällt (beispielsweise $\gamma = z$; nimmt man $\gamma = 1$, so erhält man den im Text behandelten Fall) und daß für $R = m x_0 + r$

$$(R, \gamma) = 1 \quad (12)$$

und

$$R \geq z \quad (13)$$

wird. Durch (12) wird dabei R auf die $\varphi(\gamma)$ zu γ teilerfremden Restklassen mod. γ beschränkt, sodaß auch für x_0 ebensoviel Restklassen mod. γ zur Verfügung stehen. Innerhalb einer solchen Restklasse ist dann x_0 nur gemäß (13) entsprechend groß zu wählen. Hierauf werde μ als Teiler einer Potenz m^h von m (beispielsweise $\mu = \text{einem } m^h$) und zugleich so groß gewählt, daß

$$\mu \gamma m > R \quad (14)$$

wird. Man setze dann $\mu \gamma = c_0$ und $M = \mu \gamma m$. Wegen (11), (13), (14) ist dann (9) erfüllt, desgleichen (10) wegen $1 = (m, R) = (m^h, R) = (\mu, R)$ und (12).

²² Wegen

$$1 = (r, m) = (R, m) = (R, m^h) = (R, c_0)$$

sind $c_0 m$ und R teilerfremd. — Analog ergibt sich (D) auf Grund des allgemeinen Verfahrens in Anm. 21: Hat man γ, x_0, μ gewählt, so nimmt man für M eine durch $\mu \gamma m$ teilbare und zu R teilerfremde Zahl der Menge $\mathfrak{M}$. Wegen (12) und $1 = (R, m^h) = (R, \mu)$ sind dabei $\mu \gamma m$ und R ersichtlich teilerfremd.

M_1, R_1, C_1 ersetzend. Wir gelangen so zu $M = M_2, R = R_2$ und zu einer Primzahl $p_2 = M_2 y_2 + R_2 \geq R_2 \geq C_1 > p_1$. Und so fort.

§ 3. Die Primzahlen in Untergruppen von Restzahlen nach einem gegebenen Modul.

12. Sei $m > 2$ und seien

$$r_1, \dots, r_h \quad (15)$$

die $h = \varphi(m) > 1$ zu m teilerfremden positiven Zahlen $< m$. Sei H die Gruppe der durch die Zahlen (15) dargestellten Restklassen bei ihrer Zusammensetzung durch Multiplikation und sei Γ eine echte Untergruppe von H ; sei g die Ordnung von Γ , also $h = g \cdot i$ mit $i > 1$ und sei $B = H - \Gamma$ die Gesamtheit der $g(i-1)$ nicht zu Γ gehörenden Restklassen.

Da alle Zahlen aus H sich multiplikativ aus den Primzahlen in H zusammensetzen, die Multiplikation von Zahlen aus Γ aber nicht aus Γ herausführt, so können offenbar nicht alle zu m teilerfremden Primzahlen zu Γ gehören, sodaß B nicht frei von Primzahlen sein kann. Darüber hinaus weisen einzelne — freilich in nicht sehr umfangreichem Maß ausgeführte — empirische Feststellungen in beschränktem Zahlbereich²³ auf die Möglich-

²³ Die ersten vor ein paar Jahren gemachten Feststellungen bestanden in Stichproben derart, daß z. B. für $m = 30$ und jede der $\varphi(30) = 8$ teilerfremden Restklassen die Anzahl der Primzahlen $\leq$ einem bestimmten Wert N (etwa für $N = 480, 960, 1440$ und 1920) bestimmt wurde. Schon bei diesem Wettlauf der Restklassen bezüglich ihres Primzahlgehalts zeigte sich in den angegebenen Fällen, daß gewisse Restklassen r vorwiegend an der Spitze verblieben, andere aber, — insbesondere $r = 1$, aber auch $r = 19$ und $r = 29$ — am Schluß. Für die verschiedenen Untergruppen Γ der Gruppe H (nämlich $\Gamma = \{1\}$, $\Gamma = \{1, 19\}$, $\Gamma = \{1, 29\}$, $\Gamma = \{1, 11\}$, $\Gamma = \{1, 7, 13, 19\}$, $\Gamma = \{1, 17, 19, 23\}$, $\Gamma = \{1, 11, 19, 29\}$, wenn wir die einzelne Gruppe Γ kurz durch die in ihr vertretenen Reste < 30 kennzeichnen) ergaben sich bei den angegebenen Stellen N durchwegs positive Werte $\Delta(N)$. Ähnliche Stichproben bei einigen anderen Werten von m , — anfänglich vor allem für die Gruppe Γ der quadratischen Reste mod. m vorgenommen, — führten zu analogem Ergebnis. Einblick in den Werteverlauf von $\Delta(N)$ in beschränktem N -Bereich ergaben dann Tabellen, von denen eine als Muster am Schluß dieser Note mitgeteilt wird, andere unter dem Titel „Einzelne Tabellen zur Verteilung der Primzahlen auf Untergruppen der Gruppe der teilerfremden Restklassen nach gegebenem Modul“ in den Abhandlungen

keit hin, daß (unter Berücksichtigung des Verhältnisses $1:(i-1)$ der Anzahlen der in Γ und B vertretenen Restklassen) für die Anzahl $\pi_B(N)$ der zu B gehörenden Primzahlen $\leq N$ ein relatives Überwiegen über die Anzahl $\pi_\Gamma(N)$ der zu Γ gehörenden Primzahlen $\leq N$ statt hat²⁴. In manchen Fällen möchte man vielleicht zu der Annahme neigen, es gelte die Ungleichung

$$\pi_B(N) \geq (i-1) \pi_\Gamma(N) \quad (16)$$

(allenfalls mit gewissen zusätzlichen Bedingungen für N , etwa von einem gewissen N_0 an) oder anders geschrieben

$$\pi_H(N) \geq i \pi_\Gamma(N), \quad (17)$$

wenn $\pi_H(N) = \pi_\Gamma(N) + \pi_B(N)$ die Anzahl aller zu m teilerfremden Primzahlen $\leq N$ bedeutet. Nun zeigt schon das bekannte Beispiel $m = 4$ mit Γ bzw. B als Gesamtheit der Zahlen von der Gestalt $4x + 1$ bzw. $4x + 3$ (wobei $h = 2$, $g = 1$, $i - 1 = 1$ ist), — ein Beispiel, an das sich weitgehende theoretische Untersuchungen angeschlossen haben²⁵ — wie vorsichtig

der Bayer. Akad. d. Wiss. vorgelegt werden sollen. Ebendort sollen auch neuerdings, im Zusammenhang mit der Veröffentlichung der vorliegenden Note gerechnete Tabellen ($m = 262$ betreffend) mitgeteilt werden, wo sich bei einzelnen Gruppen Γ im gerechneten Bereich gerade umgekehrt ein Überwiegen negativer $\Delta(N)$ bekundet, was die weiter unten gemachten Bemerkungen, wie vorsichtig man mit unvollständigen Induktionen sein muß, eindringlich bestätigt. Das l. c. zusammengestellte Material (ein bis zwei Dutzend Tabellen), das wohl von den eigenartigen Schwankungen von $\Delta(N)$ ein gutes Bild gibt, ist aber gewiß zu wenig umfangreich, um irgendwelche Vermutungen über asymptotisches Verhalten ernstlich stützen oder entkräften zu können, sodaß jenes Material, früherer Übung entsprechend, in Abwartung fassbarer Ergebnisse ruhig im Schreibtisch verwahrt bleiben dürfte. Wo dormalen schon so manches Jahr allenthalben von heute auf morgen Schreibtisch und Bücherschrank in Schutt und Asche versinken, mag es verstattet sein, von jener löblichen einstigen Übung abzuweichen.

²⁴ Natürlich sind einem solchen Überwiegen auf alle Fälle Schranken gesetzt durch die Beziehung $\lim_{N \rightarrow \infty} (\pi_B(N) / \pi_\Gamma(N)) = i - 1$, die sich aus der

bekannten schon von Legendre (1808) vermuteten und erstmals 1896 von J. Hadamard und Ch. de la Vallée Poussin bewiesenen asymptotischen Gleichheit der Anzahl der Primzahlen in den einzelnen Restklassen (15) ergibt.

²⁵ Vgl. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. II, Leipzig u. Berlin, 1909, Kap. 65, §§ 198, 199, S. 699-704

man selbst bei sehr großem empirischen Material mit Behauptungen sein muß, die nur durch unvollständige Induktion gewonnen sind²⁶. Denn obwohl hier in einem sehr weiten Bereich²⁷ das Überwiegen der Primzahlen von der Gestalt $4x + 3$ über jene von der Gestalt $4x + 1$ im Sinne der Ungleichung (16) bzw. (17) festgestellt wurde, haben theoretische Untersuchungen gelehrt²⁸, daß im unbeschränkten Zahlbereich Ausschläge zu-

sowie die historische Einleitung, *ibid.* S. 646 f. über einen auf die genannten Primzahlen $4x + 1$ und $4x + 3$ bezüglichen, von Tschebyschef (1853) vermuteten und zuerst von E. Phragmén, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 48 (1891/92), dann von Landau, Math. Ann. 61 (1905) bewiesenen Satz. Mit den gleichen tiefliegenden analytischen Methoden werden *ib.* § 200, S. 704–711 allgemeinere Fälle behandelt, wobei es sich um den Vergleich handelt zwischen der Anzahl $\pi_{m,r}(N)$ der Primzahlen, die $\leq N$ und $\equiv r \pmod{m}$ sind, mit der entsprechenden Anzahl $\pi_{m,s}(N)$ für eine zweite Restklasse s ; dabei spielt die Anzahl λ_r bzw. λ_s der Lösungen von $x^2 \equiv r$ bzw. $x^2 \equiv s \pmod{m}$ eine Rolle. Übrigens besagen diese Sätze durchaus nicht etwa ein andauerndes Überwiegen der einen der beiden Zahlen $\pi_{m,r}(N)$, $\pi_{m,s}(N)$ über die andere, sondern vielmehr — etwa im Tschebyschef'schen Sonderfall $m = 4$, $r = 1$, $s = 3$ — ein immer wiederkehrendes Wachsen von $\pi_{4,3}(N) - \pi_{4,1}(N)$ über eine mit N ins Unendliche wachsende Schranke. Angeführt werde noch: V. Brun, La différence entre le nombre des nombres premiers des formes $4h + 3$ et $4h + 1$, exprimée par une formule exacte, Forhandlingar Norske Videnskabers Selskab, 1 (1929), p. 146–148.

²⁶ Man denke etwa an die im Bereich bis zu $N = 10,000,000$ bestätigte, und dennoch für beliebiges N durch theoretische Überlegungen widerlegte Vermutung, daß der die Anzahl $\pi(N)$ der Primzahlen $\leq N$ asymptotisch darstellende Integrallogarithmus $Li(x)$ stets $> \pi(N)$ sei. Vgl. Encyclopädie der math. Wiss., II. Bd., 3. Teil, 2. Hälfte, Artikel II C 8, Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie von H. Bohr und H. Cramér (1922), S. 722–849, Nr. 27, S. 791. So mag es überhaupt vermessen erscheinen, wenn ein Outsider leichthin Fragen aufwirft angesichts der weit ausgebauten, an eigenen schwierigen Problemen reichen Theorie, in die sich zu vertiefen und einzuarbeiten — selbst in anderen als den dermaligen mit beruflichen und persönlichen Sorgen und Mühen belasteten Zeiten — nur Wenigen gegeben ist.

²⁷ Vgl. die in Anm. 32 erwähnten Feststellungen von A. Cunningham.

²⁸ Nach Littlewood gibt es nämlich für geeignet gewähltes K sowohl beliebig große N , für welche

$$\pi_{4,3}(N) - \pi_{4,1}(N) > K \frac{\sqrt{N}}{\log N} \log \log \log N,$$

als auch solche, für welche

gunsten der einen ebenso wie zugunsten der anderen Art von Primzahlen immer wiederkehren. Auch gibt es Fälle, wo die Differenz

$$\Delta(N) = \Delta_{\Gamma}(N) = \pi_H(N) - i\pi_{\Gamma}(N) \quad (18)$$

bereits innerhalb eines sehr beschränkten Bereiches²⁹ neben positiven auch negative Werte annimmt³⁰. Da aber diese negativen Werte von $\Delta(N)$ hinter den positiven Werten dem absoluten Betrag nach zurückzubleiben scheinen, so erhält man den Eindruck, es könnte eine (u. zw. wohl auch eine mit N unbeschränkt wachsende) Schranke $f(N) > 0$ geben, derart daß zwar für kein N_0 die Ungleichung

$$\Delta(N) < f(N) \text{ für } N \geq N_0 \quad (19)$$

gültig wäre (vielmehr immer wieder Werte N mit $\Delta(N) > f(N)$ auftreten), wohl aber die Ungleichung

$$\Delta(N) > -f(N) \quad (20)$$

dauernd erfüllt bleibt. Im übrigen sieht es so aus, als träten die genannten Erscheinungen am empirischen Material umso bemerkbarer hervor, je größer der Index i der Untergruppe Γ ist³¹. Den äußersten Fall in dieser Hinsicht erhält man, wenn

$$\pi_{4,3}(N) - \pi_{4,1}(N) < -K \frac{\sqrt{N}}{\log N} \log \log \log N$$

wird. Vgl. Enc. d. math. Wiss., I. c. ²⁶, S. 804, sowie die Originalarbeiten: J. E. Littlewood, Paris, Compt. rend. 158 (1914) p. 1869–1872; G. H. Hardy and J. Littlewood, Quart. Journ. 46 (1915), p. 215–219; Acta Math. 41 (1918), p. 119–196.

²⁹ Ein Bild über den Verlauf der Werte von $\Delta(N)$ bekommt man am besten aus einer Tabelle, wie sie am Schluß dieser Note beigelegt ist. Wie die der Tabelle vorausgeschickten Erläuterungen zeigen, genügt es dabei, sich mit den Argumenten N auf die zu Γ gehörigen Primzahlen zu beschränken. Vgl. auch die Tabellen I. c. ²³.

³⁰ Als Beispiel möge der Modul $m = 26$ und die aus den Restklassen 1, 5, 21, 25 bestehende Gruppe Γ der kubischen Reste mod. 26 betrachtet werden, wobei aus der in Anm. 29 genannten (100 Primzahlen aus Γ umfassenden) Tabelle nebst Erläuterungen der Verlauf von $\Delta(N)$ für $N \leq 2003$ zu erschen ist; u. zw. unter Beachtung nicht nur der vierten Rubrik, sondern auch der fünften für $\Delta^*(N)$.

³¹ Man kann für jedes N die verschiedenen Untergruppen Γ von H nach abnehmender Größe von $i\pi_{\Gamma}(N)$ geordnet denken. Mit wachsendem N er-

man zu beliebigem m für Γ diejenige Untergruppe E von H nimmt, die von der Restklasse $r_1 = 1$ gebildet wird, wobei $g = 1$, $i = h$ und

$$\Delta(N) = \pi_H(N) - \varphi(m) \pi_E(N) \quad (21)$$

wird. Es muß auch hier dahingestellt bleiben, in welchem Ausmaß ein Überwiegen der übrigen Restklassen über die Restklasse 1 im Sinne von Ungleichungen (19), (20) sich tatsächlich theoretisch bestätigt³²; und unsere frühere Bemerkung, daß B niemals primzahlfrei ist, besagt für den Fall $\Gamma = E$ zunächst auch nur die Existenz wenigstens einer zu m teilerfremden Primzahl, die nicht $\equiv 1 \pmod{m}$ ist. Dabei steht es in einem gewissen Gegensatz zu den Anzeichen für ein Überwiegen dieser letzteren Primzahlen, daß für die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einer teilerfremden Progression $mx + r$ gerade im Falle $r = 1$ ein elementarer Beweis vorliegt.³³

Erläuterungen zur nachfolgenden Tabelle. Zunächst sei von den ersten vier Kolonnen für N , $\pi_H(N)$, $i \pi_\Gamma(N)$ und $\Delta(N)$ gesprochen, wobei in die erste Kolonne für N nur die zu Γ gehörigen Primzahlen

$$q_1, q_2, \dots, q_\alpha, \dots, \quad (22)$$

im betrachteten Beispiel $m = 26$, $\Gamma = \{1, 5, 21, 25\}$ also die Primzahlen 5, 31, 47, 53, ... eingetragen sind, die mod. 26 einer

gibt das einen Wettlauf dieser Gruppen, bei welchem (innerhalb des herangezogenen empirischen Materials, so speziell für $m = 30$, $N = 290, 480, 960, 1440, 1920$) die Untergruppen mit großem Index i deutlich ins Hintertreffen zu kommen scheinen.

³² Wie ich aus Dickson's „History of the theory of numbers“, I. c.⁶, Vol. I, p. 417, entnehme, hat A. Cunningham, Proceedings London Math. Soc. (2) 10 (1911), p. 249–253, ein Überwiegen jeder anderen Restklasse r über die Restklasse 1 im Sinne der Ungleichung $\pi_{m,r}(N) - \pi_{m,1}(N) \geq 0$ für alle geraden $m < 1928$ und $N = 100,000$ und $500,000$ festgestellt (wegen $\pi_{m,r}(N)$ vgl. Anm. 25), woraus man durch Summierung über r für die gleichen Werte N auch (21) feststellt. Daß trotzdem (21) schon bei $m = 4$ nicht für alle N gelten kann, ergibt sich aus dem, was I. c.²⁸ angeführt wurde.

³³ Siehe E. Wendt, Crelle's Journal für Math. 115 (1895), S. 85–88.

der Zahlen 1, 5, 21, 25 kongruent sind. Die in die zweite Kolonne eingetragene Zahl $\pi_H(N)$ für ein solches $N = q$ ist dann einfach $= v - \mu(q)$, wenn in der Folge aller Primzahlen $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... die Primzahl q gleich p_v ist, also die Nummer v hat und wenn μ die Anzahl aller im Modul m aufgehenden (also nicht zu H gehörigen) Primzahlen ist, wenn ferner $\mu(q)$ die Anzahl derjenigen unter diesen μ Primzahlen ist, die $< q$ sind; ist dabei p^* die größte unter diesen in m aufgehenden Primzahlen, so ist $\pi_H(q) = v - \mu$ für $q > p^*$; in unserem Beispiel $m = 26$, $\mu = 2$ ist also $\pi_H(q) = v - 2$ für $q > 13$, somit für alle Zahlen $q \geq 31$; nur für $q = 5$, wo $\mu(q) = 1$ ist, erhält man $\pi_H(5) = v - 1 = 2$ entsprechend der Tatsache, daß $N = 5$ unter den zu $m = 26$ teilerfremden Primzahlen 3, 5, 7, 11, 17, ... die 2-te ist. (Wegen einfacher Feststellung von v vgl. unten den Schluß der Erläuterungen.) In die dritte Kolonne aber kommen, da $\pi_\Gamma(q_\alpha) = \alpha$ ist, einfach die Vielfachen $i\alpha$ des Gruppen-Index i , wobei in unserem Beispiel $i = 3$ ist. In der vierten Kolonne stehen dann die gemäß (18) gerechneten Zahlen $\Delta(q)$; für $N = 5$ mit $\pi_H(5) = 2$, $\pi_\Gamma(5) = 1$ ist beispielsweise $\Delta(5) = -1$.

Um die Übersicht über den Wertverlauf von $\Delta(N)$ zu erhöhen und zugleich die Möglichkeit von Rechen-Kontrollen zu gewinnen, kann man, wie in der folgenden Tabelle geschehen, noch eine fünfte Kolonne für die sogleich zu erklärenden Zahlen $\Delta^*(N)$ hinzunehmen. Wenn nämlich $N = q_\alpha$ und sonach $q_{\alpha+1}$ die kleinste über q_α liegende Primzahl aus Γ ist, dann sei $b^{(x)}$ die größte zu H gehörige, d. h. zu m teilerfremde Primzahl, die $< q_{\alpha+1}$ ist (wobei $b^{(x)}$ sowohl $> q_\alpha$, als auch $= q_\alpha$ sein kann). Mit $\Delta^*(N)$ werde dann der Wert von $\Delta(b^{(x)})$ bezeichnet. Demgemäß ist, wenn zwischen q_α und $q_{\alpha+1}$ genau λ (≥ 0) Primzahlen aus H liegen, die natürlich nicht zu Γ , sondern zu $B = H - \Gamma$ gehören, offenbar

$$\Delta^*(N) = \Delta(N) + \lambda, \quad (23)$$

da mit jeder dieser λ Primzahlen die Funktion $\pi_H(N)$ um eine Einheit wächst, dagegen $\pi_\Gamma(N)$ ungeändert bleibt und sonach jedesmal $\Delta(N)$ um eine Einheit zunimmt. Aus (23) und

$$\pi_H(q_{\alpha+1}) - \pi_H(q_{\alpha}) = \lambda + 1 \quad (24)$$

folgt dann die Formel

$$\Delta^*(N) = \Delta(N) + (\pi_H(q_{\alpha+1}) - \pi_H(q_{\alpha}) - 1), \quad (25)$$

die zur Berechnung der in die fünfte Kolonne aufgenommenen Zahlen $\Delta^*(N)$ dienlich ist. Jedesmal, wenn $\lambda > 0$ ist, findet also zwischen $N = q_{\alpha}$ und $N = q_{\alpha+1}$ bei den zu H , aber nicht zu Γ gehörigen Primzahlen ein Anwachsen von $\Delta(N)$ in Schritten von je einer Einheit, schließlich bis zum Wert $\Delta^*(N) = \Delta(b^{(\alpha)})$ statt (wobei freilich unsere Tabelle keine Auskunft über die Primzahl $b^{(\alpha)}$ gibt, die aus einer vollständigen Primzahltafel zu entnehmen wäre). Ist dagegen $\lambda = 0$ und demgemäß $b^{(\alpha)} = q_{\alpha}$, für $N = q_{\alpha}$ also $\Delta^*(N) = \Delta(b^{(\alpha)}) = \Delta(N)$, dann findet oberhalb q_{α} die nächste Änderung des Wertes der Funktion $\Delta(N)$ erst bei $N = q_{\alpha+1}$ statt. Ein Beispiel für $\lambda > 0$ erhalten wir, wenn wir für q_{α} und $q_{\alpha+1}$ die Zahlen 5 und 31 nehmen; aus unserer Tabelle ergibt sich $\pi_H(5) = 2$, $\pi_H(31) = 9$, gemäß (24) also $\lambda = 9 - 2 - 1 = 6$ als Anzahl der zwischen 5 und 31 liegenden zu 26 teilerfremden Primzahlen; bei diesen (in der Tabelle nicht aufgeführten) Primzahlen 7, 11, 17, 19, 23, 29 steigt somit $\Delta(N)$ vom Werte $\Delta(5) = -1$ bis zum Werte $\Delta^*(5) = \Delta(29) = -1 + 6 = 5$. Andererseits liegt ein Beispiel mit $\lambda = 0$ vor, wenn wir für q_{α} und $q_{\alpha+1}$ die Zahlen 47 und 53 nehmen; hier ergibt (24) den Wert $\lambda = \pi_H(53) - \pi_H(47) - 1 = 14 - 13 - 1 = 0$; zu $q_{\alpha} = 47$ gehört dementsprechend $b^{(\alpha)} = 47$ und für $N = 47$ fallen die Zahlen $\Delta(N) = \Delta(q_{\alpha}) = 4$ und $\Delta^*(N) = \Delta(b^{(\alpha)}) = 4$ zusammen.

Betrachten wir noch den Übergang von $N = b^{(\alpha)} (\geq q_{\alpha})$ zur nächsthöheren zu H (und dabei zugleich zu Γ) gehörigen Primzahl $q_{\alpha+1}$, so wächst dabei jede der Zahlen $\pi_H(N)$, $\pi_{\Gamma}(N)$ um eine Einheit, woraus wegen (18) sich $\Delta(q_{\alpha+1}) = \Delta(b^{(\alpha)}) - (i-1)$ oder

$$\Delta^*(N) = \Delta(q_{\alpha+1}) + (i-1) \quad (26)$$

ergibt, was eine einfache Kontrolle der Tabelle gestattet. Zusammengefaßt: Mit jeder nicht zu Γ gehörigen Primzahl aus H wächst $\Delta(N)$ um eine Einheit, zwischen q_{α} und $q_{\alpha+1}$ also um

den Betrag λ , sofern die aus (24) bestimmbare Anzahl $\lambda > 0$ ist; dagegen fällt $\Delta(N)$ mit jeder zu Γ gehörigen Primzahl um den Betrag $(i-1)$; der Wertverlauf von $\Delta(N)$ ist somit aus den Zahlen der vierten und fünften Kolonne unmittelbar ersichtlich: Überall, wo in der Tabelle für ein $N = q_\alpha$ ein Wert $\Delta^*(N) > \Delta(N)$ angegeben ist, liegen $\lambda = \Delta^*(N) - \Delta(N)$ Zahlen aus $B = H - \Gamma$ zwischen q_α und $q_{\alpha+1}$; bei jeder von ihnen nimmt $\Delta(N)$ um 1 zu und erreicht bei der letzten, $b^{(x)}$, den Wert $\Delta^*(N)$ und damit ein relatives Maximum, von dem aus der Wert von Δ bei $N = q_{\alpha+1}$ gemäß (26) um $(i-1)$ Einheiten sinkt. Zugleich sieht man, daß im betrachteten Fall $\Delta(N) < \Delta^*(N)$ die Funktion $\Delta(N)$ bei $N = q_\alpha$ (für $\alpha \geq 2$) ein relatives Minimum hat; denn die Funktion $\Delta(N)$ hat ja bei q_α selbst eine Abnahme um den Betrag $(i-1)$ erlitten, während sie nachher $\lambda (\geq 1)$ Zuwächse vom Betrag 1 erfährt. Wo jedoch für ein $N = q_\alpha$ in der Tabelle ein Wert $\Delta^*(N) = \Delta(N)$ angegeben ist, dort hat man weder ein Maximum noch ein Minimum vor sich und die betreffende Stelle $N = q_\alpha$ liegt auf einem absteigenden Ast der Funktion $\Delta(N)$; denn es ist offenbar $\Delta(q_\alpha - 1) = \Delta(q_\alpha) + (i-1)$ und andererseits tritt in diesem Falle oberhalb q_α die erste Änderung des Wertes von $\Delta(N)$ bei $N = q_{\alpha+1}$ ein, wobei $\Delta(q_{\alpha+1}) = \Delta(q_\alpha) - (i-1)$ ist.

Wegen $\pi_H(b^{(x)}) = \pi_H(q_{\alpha+1}) - 1$ und $\pi_\Gamma(b^{(x)}) = \pi_\Gamma(q_\alpha)$ gilt übrigens auch

$$\Delta^*(N) = \Delta(b^{(x)}) = \pi_H(q_{\alpha+1}) - i \pi_\Gamma(q_\alpha) - 1, \quad (27)$$

was eine weitere Kontrolle der Tabelle ermöglicht.

Was die Vorzeichen der $\Delta(N)$ -Werte im Beispiel der nachstehenden Tabelle betrifft, so tritt in der ersten Hälfte des betrachteten N -Bereichs, d. i. etwa bis $N = 1000$, worauf unsere Rechnungen sich zunächst beschränkt hatten, als einziger negativer Wert von $\Delta(N)$ der Wert -1 auf, und zwar außer für $N = 5$ noch für $N = 157$ und $N = 599$; im übrigen herrschen die positiven Werte von $\Delta(N)$ vor. In der zweiten Hälfte des betrachteten N -Bereiches, auf den die Rechnungen neuerdings ausgedehnt wurden, trifft man im ganzen Intervall $1093 \leq N \leq 1559$ auf Werte $\Delta(N) \leq 0$, während oberhalb 1559 wieder überwiegend positive Werte von $\Delta(N)$ auftreten. Was im be-

trachteten Bereich die absoluten Beträge $|\Delta(N)|$ anlangt, die von negativen Werten $\Delta(N)$ erreicht werden, so sind sie durchwegs ≤ 9 (es ist $\Delta(N) = -9$ nur für $N = 1487$), während die positiven Werte von $\Delta(N)$ bis zum absoluten Betrag 15 ansteigen, wenn nämlich N gleich der der Primzahl 811, bzw. 827, bzw. 853 unmittelbar vorhergehenden Primzahl ist (es sind dies bzw. die Primzahlen 809, 823 und 839).

Wie schließlich noch bemerkt sei, entnimmt man die oben genannte Nummer v einer Primzahl p_v leicht aus einer entsprechend angeordneten Primzahltafel, wie z. B. aus M. Kraitchik, *Recherches sur la théorie des nombres*, Paris 1924, Table I, p. 131—191, wo in jeder vertikalen Rubrik genau 50 Primzahlen verzeichnet sind. Dabei mag auf einen bei unseren Rechnungen bemerkten Druckfehler in dieser Tafel hingewiesen werden: Auf pag. 189 ist nach 283489 zweimal nacheinander die Primzahl 283511 angegeben, während es das erstemal 283501 heißen soll, wie aus dem Vergleich mit Derrick Norman Lehmer, *List of prime numbers from 1 to 10,006 721*, Washington, D. C., Carnegie Institution, Publication No. 165 (1914) pag. 5, hervorgeht. (Auf Grund von Berichtigungen, die Lehmer im Bull. Amer. Math. Soc. **38**, p. 902 und **42**, p. 560 mitgeteilt hat, hat es in diesen Tafeln 628051 bzw. 854647 statt 628151 bzw. 854651 zu heißen.) Aus diesen letzteren Tafeln läßt sich übrigens v aus p_v ziemlich unmittelbar ablesen, wobei nur zu beachten ist, daß dort — abweichend von der allgemeinen (und durch den Satz von der eindeutigen Primfaktorenzerlegung gebotenen) Übung — die Zahl 1 mit zu den Primzahlen gezählt ist.

Tabelle

für $m = 26$, Gruppe $\Gamma = \{1, 5, 21, 25\}$ der kubischen Reste, $i=3$.

N	$\pi_H(N)$	$i\pi_\Gamma(N)$	$\Delta(N)$	$\Delta^*(N)$
5	2	3	—1	5
31	9	6	3	6
47	13	9	4	4
53	14	12	2	6
73	19	15	4	4
79	20	18	2	2
83	21	21	0	3
103	25	24	1	2
109	27	27	0	2
131	30	30	0	3
151	34	33	1	1
157	35	36	—1	3
181	40	39	1	8
229	48	42	6	6
233	49	45	4	4
239	50	48	2	9
281	58	51	7	9
307	61	54	7	7
311	62	57	5	5
313	63	60	3	3
317	64	63	1	2
337	66	66	0	3
359	70	69	1	5
389	75	72	3	7
421	80	75	5	8

N	$\pi_H(N)$	$i\pi_\Gamma(N)$	$\Delta(N)$	$\Delta^*(N)$
443	84	78	6	9
463	88	81	7	7
467	89	84	5	8
499	93	87	6	8
521	96	90	6	7
541	98	93	5	5
547	99	96	3	6
571	103	99	4	4
577	104	102	2	3
593	106	105	1	1
599	107	108	—1	3
619	112	111	1	9
677	121	114	7	9
701	124	117	7	9
727	127	120	7	7
733	128	123	5	15
811	139	126	13	15
827	142	129	13	15
853	145	132	13	13
857	146	135	11	11
859	147	138	9	9
863	148	141	7	9
883	151	144	7	9
911	154	147	7	9
937	157	150	7	7

N	$\tau_H(N)$	$i\pi_\Gamma(N)$	$\Delta(N)$	$\Delta^*(N)$
941	158	153	5	7
967	161	156	5	7
983	164	159	5	7
1009	167	162	5	5
1013	168	165	3	3
1019	169	168	1	4
1039	173	171	2	4
1061	176	174	2	4
1087	179	177	2	2
1091	180	180	0	0
1093	181	183	-2	-2
1097	182	186	-4	-2
1117	185	189	-4	-4
1123	186	192	-6	-2
1171	191	195	-4	-1
1201	195	198	-3	-2
1217	197	201	-4	-4
1223	198	204	-6	-3
1249	202	207	-5	-3
1279	205	210	-5	-1
1301	210	213	-3	0
1321	214	216	-2	-2
1327	215	219	-4	-2
1373	218	222	-4	-3
1399	220	225	-5	-5

N	$\tau_H(N)$	$i\pi_\Gamma(N)$	$\Delta(N)$	$\Delta^*(N)$
1409	221	228	-7	-5
1429	224	231	-7	-4
1451	228	234	-6	-3
1481	232	237	-5	-5
1483	233	240	-7	-7
1487	234	243	-9	0
1559	244	246	-2	4
1607	251	249	2	3
1613	253	252	1	4
1637	257	255	2	3
1663	259	258	1	2
1669	261	261	0	4
1721	266	264	2	4
1741	269	267	2	2
1747	270	270	0	5
1789	276	273	3	7
1847	281	276	5	6
1867	283	279	4	4
1871	284	282	2	2
1873	285	285	0	0
1877	286	288	-2	5
1949	294	291	3	3
1951	295	294	1	5
1997	300	297	3	4
2003	302	300	2	