

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1944. Heft I/II

Sitzungen Januar-Juli

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Schiefe Kreiskegelschale unter Innen- oder Außendruck.

Von Ludwig Föppl in München.

Mit 4 Abbildungen

Vorgelegt am 14. Januar 1944.

Einleitung.

Während der Spannungszustand in Schalen bei symmetrischer Belastung schon seit langem erfolgreich bearbeitet worden ist, so daß eine große Zahl von Spannungsaufgaben dieser Art gelöst sind, gilt dies nicht von unsymmetrischen Schalen, selbst bei einfachster Belastung. Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zu diesem letzteren Aufgabenkreis. Es handelt sich um eine schiefe Kreiskegelschale, die unter gleichmäßigen innerem oder äußerem Dampf- oder Wasserdruck steht. Aus der praktischen Notwendigkeit heraus, den Spannungszustand in einer solchen Kegelschale zu ermitteln, ist vorliegende Arbeit entstanden.

§ 1. Die gerade Kreiskegelschale.

Zunächst sei an den Spannungszustand erinnert, der in einer geraden Kreiskegelschale unter gleichmäßigem Innendruck p entsteht.

In Bild 1 ist der Achsenschnitt eines geraden Kreiskegels vom Öffnungswinkel 2α dargestellt. Er sei in größerem Abstand von seiner Spitze durch einen Boden abgeschlossen und stehe unter dem inneren Überdruck p .

Das Gleichgewicht eines durch zwei benachbarte Erzeugende des Kegels und zwei benachbarte Breitschnitte abgegrenzten Elementes der Kegelschale in Richtung senkrecht zur Schale verlangt, daß die Tangentialspannung σ_t , die durch den inneren Überdruck p in der Kegelschale hervorgerufen wird,

$$\sigma_t = \frac{p}{\delta} \rho \quad (\text{Gl. 1})$$

beträgt, wenn die Wandstärke der Schale mit δ bezeichnet wird. In Gl. 1 bedeutet ρ den zweiten Hauptkrümmungsradius der Kegelschale (s. Bild 1). Der erste Hauptkrümmungsradius, nämlich der Krümmungsradius des Meridianschnittes, ist bei der Kegelschale unendlich groß.

Gl. 1 gilt aber auch für jede schiefe Kegelschale unter innerem Überdruck, da sie das Gleichgewicht am Schalenelement aus-

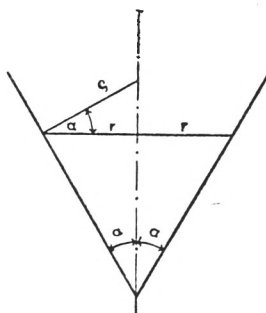


Bild 1.

drückt. Dabei ist zu beachten, daß auch hier das Schalenelement durch zwei benachbarte Erzeugende der Kegelschale und durch zwei benachbarte, auf den Erzeugenden senkrecht stehende Schnitte aus der Schale herausgeschnitten zu denken ist und daß wieder ρ den zweiten Hauptkrümmungsradius der Kegelschale bedeutet. Im Gegensatz zur geraden Kegelschale sind bei der schiefen Kegelschale diese Schnittrichtungen im allgemeinen keine Hauptrichtungen des ebenen Spannungszustandes der Schale, so daß neben den Normalspannungen noch Schubspannungen auftreten, die aber für das Gleichgewicht des Schalenelementes in Richtung senkrecht zur Schale keinen Beitrag liefern, ebensowenig wie σ_s , wie wir die Normalspannung in Richtung der Erzeugenden der Kegelschale bezeichnen wollen.

Für die gerade Kegelschale unter innerem Überdruck folgt für die in Richtung der Erzeugenden laufenden Normalspannungen σ_s aus dem Gleichgewicht eines durch eine Ebene senkrecht zur Achse abgeschnittenen Kegelschalenstumpfes:

$$\sigma_s = \frac{p}{\delta} \frac{r}{2 \cos \alpha} = \frac{p}{\delta} \frac{\rho}{2} = \frac{\sigma_l}{2}. \quad (2)$$

Die Längsspannung σ_s ist also bei der geraden Kreiskegelschale halb so groß wie die Tangentialspannung σ_t . Daher kommt es, daß für die Sicherheit die größte Spannung σ_t maßgebend ist und daß bei Überbeanspruchung einer solchen Schale das Aufreißen längs einer Erzeugenden erfolgt.

Für den Fall, daß die gerade Kegelschale in eine Kreiszyinderschale vom Radius r übergeht, gehen die Gl. (1) und (2) mit $\rho = r$ in die bekannten einfachen Formeln über für die Spannungen im Kreiszyinderkessel bei Überdruck p .

Wir wollen noch feststellen, daß nach Gl. (1) die Tangentialspannungen σ_t proportional mit ρ und damit proportional mit dem Abstand s des betreffenden Punktes von der Kegelspitze anwachsen. Dies gilt ebenso für die Tangentialspannungen in der schiefen Kegelschale.

§ 2. Die schiefe Kreiskegelschale.

Die schiefe Kreiskegelschale sei durch die Flächengleichung

$$z = c \frac{x^2 + y^2}{x} \quad (3)$$

wiedergegeben.

Gl. (3) bezieht sich auf das von der Kegelspitze als Anfangspunkt der Koordinaten auslaufende rechtwinkelige Koordinatenkreuz x, y, z .

Die Konstante c hängt mit dem in die x, z -Ebene fallenden Öffnungswinkel β des Kreiskegels durch

$$c = \cot \beta \quad (4)$$

zusammen.

Wie aus Gl. (3) folgt, schneidet jede Ebene $z = \text{const} = h$ die Kegelschale in einem Kreis, dessen Projektion auf die x, y -Ebene lautet

$$x^2 + y^2 = \frac{h}{c} x$$

oder

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

wenn der Radius des Kreises mit r bezeichnet wird, wobei $r = \frac{h}{2c} = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \beta$ ist (s. Bild 2).

Wir nehmen hier, ebenso wie bei der geraden Kreiskegelschale von § 1 an, daß die Kegelschale in weitem Abstand von der Spitze einen Boden besitzt und daß im Inneren dieses geschlossenen Raumes der gleichmäßige Druck p herrscht. Wie schon in

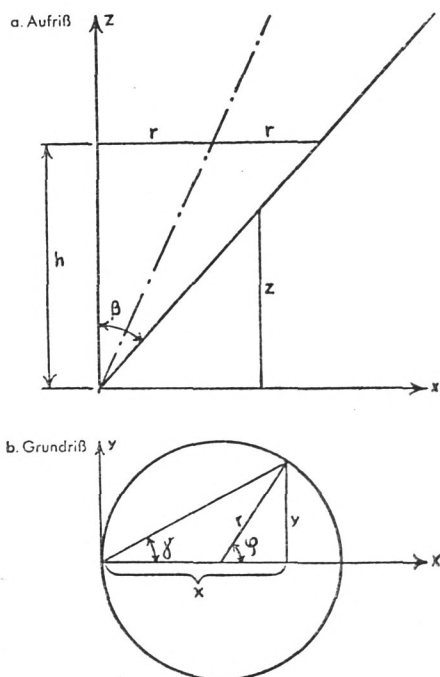


Bild 2.

§ 1 erwähnt, gilt auch für die schiefe Kreiskegelschale zur Berechnung der Tangentialspannung σ_t Gl. (1). Zur Anwendung dieser Gleichung ist der Krümmungsradius ρ erforderlich. Für ihn gilt die Formel¹

$$\rho = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t} \quad (5)$$

¹ Des Ingenieurs Taschenbuch „Hütte“, Bd. I, 27. Aufl., S. 161.

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x} = c \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \\ q &= \frac{\partial z}{\partial y} = 2c \frac{y}{x} \\ r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2c \frac{y^2}{x^3} \\ s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2c \frac{y}{x^2} \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2c}{x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Durch Einsetzen vorstehender aus Gl. (3) gewonnenen Ausdrücke in Gl. (5) erhält man nach einfachen Umformungen unter Benützung von Gl. (3) den folgenden Wert des Hauptkrümmungsradius ρ der schiefen Kreiskegelschale

$$\rho = \frac{x^2}{2z} \cdot \frac{\left(\frac{z^2}{x^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}{1 + c \frac{z}{x}}. \quad (7a)$$

Führt man in diese Bezeichnung statt $\frac{z}{x}$ den in Bild 2 b und 3 eingezeichneten Winkel γ ein, für den gilt

$$\cos^2 \gamma = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = c \frac{x}{z},$$

so erhält man aus Gl. (7a)

$$\rho = \frac{z}{2c^2} \cdot \frac{(c^2 + \cos^4 \gamma)^{\frac{3}{2}}}{c^2 + \cos^2 \gamma} \quad (7b)$$

Für das Folgende ist es zweckmäßig, den Ausdruck für ρ noch in anderer Abhängigkeit darzustellen.

Zu diesem Zweck entnimmt man aus Bild 3 die folgenden Beziehungen, in die außer den bisherigen Größen der Ab-

stand s des Bezugspunktes B vom Anfangspunkt O sowie die Winkel ϵ und α der Strecke s mit der x - z -Ebene bzw. der z -Achse eingehen:

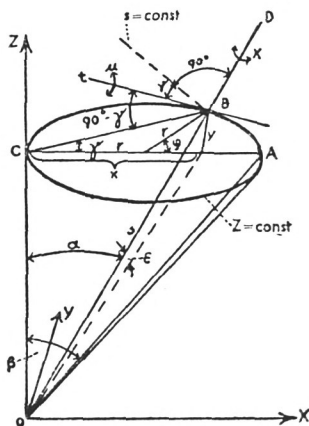


Bild 3.

$$\cot \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{c}{\cos \gamma}$$

oder

$$\cos \gamma = c \operatorname{tg} \alpha,$$

woraus

$$\cos^2 \alpha = \frac{c^2}{c^2 + \cos^2 \gamma}$$

folgt. Ferner ist

$$z = s \cdot \cos \alpha.$$

Damit geht Gl. (7b) über in

$$\rho = \frac{s}{2c} \left(\cos^2 \alpha + c^2 \cdot \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

Ferner entnimmt man aus Bild 3 die Beziehung

$$\sin \epsilon = \frac{y}{s} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{s} = \sin \gamma \cdot \sin \alpha \quad (8a)$$

und damit

$$\cos \epsilon = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha + c^2 \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos \varepsilon &= \sqrt{1 - \sin^2 \gamma (1 - \cos^2 \alpha)} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma \frac{c^2}{c^2 + \cos^2 \gamma}} = \sqrt{\frac{c^2 + \cos^4 \gamma}{c^2 + \cos^2 \gamma}},\end{aligned}\quad (8b)$$

so daß sich ρ nach Gl. (8) auch umschreiben läßt in

$$\rho = \frac{s}{2c} \cos^3 \varepsilon. \quad (9)$$

Nach Gl. (1) verteilt sich demnach die Tangentialspannung σ_t über die schiefe Kreiskegelschale gemäß

$$\sigma_t = \frac{p}{8} \frac{s}{2c} \cos^3 \varepsilon. \quad (10)$$

Darin sind die Punkte der Kreiskegelschale durch ihren Abstand s von der Kegelspitze und den Winkel ε des Strahles s gegen die x - z -Ebene festgelegt. Die Tangentialspannungen nehmen demnach auf einem Strahl durch die Kegelspitze proportional mit dem Abstand s von der Kegelspitze zu. Für die beiden Schnittstrahlen der x - z -Ebene mit dem Kegel wird $\varepsilon = 0$ und damit in Gl. (10) $\cos \varepsilon = 1$. Für den in Bild 2 b und 3 dargestellten Schnitt des Kegels mit einer Ebene, die senkrecht zur z -Achse steht, wird für die in Bild 3 mit A und C bezeichneten Schnittpunkte dieser Ebene mit der x - z -Ebene $\cos \varepsilon = 1$; da aber s für Punkt A größer ist als für Punkt C wie überhaupt für jeden anderen Punkt des Kreisschnittes, nimmt die Tangentialspannung σ_t für den Punkt A unter allen Punkten des Kreisschnittes den größten Wert an, und zwar

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{p}{8} \cdot \frac{z}{2c \cos \beta} = \frac{p}{8} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta}. \quad (11a)$$

Dagegen nimmt an der Stelle C , wie sich leicht mit Hilfe von Gl. (10) zeigen läßt, σ_t unter allen Punkten des Kreisschnittes $z = \text{const}$ seinen kleinsten Wert an, nämlich

$$(\sigma_t)_{\min} = \frac{p}{8} \frac{z}{2c} = \frac{p}{8} \frac{z}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta = (\sigma_t)_{\max} \cdot \cos \beta. \quad (11b)$$

Mit der durch Gl. (10) festgelegten Verteilung der Tangentialspannungen σ_t über die ganze Kegelschale sind aber aus Gleich-

gewichtsründen die übrigen Spannungen mitbestimmt, so daß der durch den gleichmäßigen inneren Überdruck p in der Kegelschale hervorgerufene Spannungszustand statisch bestimmt ist.

Bezeichnen wir die Normalspannung, die in einem Schnitt senkrecht zur Erzeugenden der Kegelschale auftritt und daher selbst in Richtung der Erzeugenden geht, mit σ_s und die Schubspannung mit τ , so lauten die Bedingungen für das Gleichgewicht eines Elementarteilchens in Richtung von s und senkrecht dazu ebenso wie für die längs einer Erzeugenden aufgeschnittenen und in die Ebene abgewinkelte Kegelschale, in der durch zwei benachbarte Strahlen durch o und Kreise um o das entsprechende Flächenteilchen herausgeschnitten wird. In diesem ebenen Spannungszustand sind die Tangentialspannungen σ_t nach Gl. (10) überall als bekannt anzusehen. Die beiden übrigen an den Begrenzungen des Flächenteilchens angreifenden Spannungen σ_s und τ folgen aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen, die auf das ebene Polarkoordinatensystem bezogen werden mit o als Anfangspunkt, s als Halbmesser und ψ als Neigungswinkel des Halbmessers gegen irgendeine festgelegte Richtung durch o , die als Nullachse gewählt wird. Wir wollen als Nullachse der ebenen Spannungsaufgabe den in die Ebene abgewinkelten Strahl OA wählen (s. Bild 3), so daß der Punkt B nach der Abwicklung die Polarkoordinaten s und ψ besitzen soll.

Die Gleichgewichtsbedingungen eines ebenen Spannungszustandes werden bekanntlich identisch durch die Einführung der Airyschen Spannungsfunktion F befriedigt, die mit den Spannungen folgendermaßen zusammenhängt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \\ \sigma_s &= \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} \\ \tau &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial \psi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Da σ_t nach Gl. (10) überall in der Ebene als bekannt anzusehen ist, folgt aus der ersten dieser 3 Gleichungen die Spannungsfunktion F und damit aus den beiden anderen die übrigen Spannungen σ_s und τ .

Die für gewöhnliche ebene Spannungszustände sonst gültige Differentialgleichung, der die Airysche Spannungsfunktion F genügen muß, $\Delta\Delta F = 0$ braucht hier nicht zu gelten, da es sich hier ja gar nicht um einen eigentlichen ebenen Spannungszustand handelt, sondern um den statisch bestimmten Spannungszustand in der Kegelschale, der als ebenfalls statisch bestimmter ebener Spannungszustand gedeutet werden kann.

Da die Kreise $s = \text{const}$ des ebenen Polarkoordinatensystems s, ψ auf den Strahlen durch den Nullpunkt o des Koordinatensystems senkrecht stehen, gehen sie beim Übergang zur schiefen Kreiskegelschale in die überall auf den Erzeugenden des Kegels senkrecht stehenden Linien über. Die sich aus den Gl. (12) ergebenden Spannungen σ_s, σ_t und τ beziehen sich demnach auf dieses orthogonale Netz der Linien der Kegelschale. Da aber die Schnitte $z = \text{const}$ der Kegelschale wegen der üblichen Begrenzungen der Schale von praktischer Bedeutung sind, müssen die in diesen Schnitten auftretenden Spannungen berechnet werden. Zur Umrechnung auf die Spannungen in den Schnitten $z = \text{const}$ ist der Neigungswinkel ν der Tangente an die Linien $s = \text{const}$ gegen die Tangente an den Kreis $z = \text{const}$ erforderlich, der durch den betrachteten Punkt der Kegelschale geht. Im Bild 3 ist dieser Winkel für den Punkt B eingezeichnet. Die Tangente t an den Kreisschnitt $z = \text{const}$ im Punkt B schließt demnach mit der Erzeugenden durch B den Winkel $\nu + 90^\circ$ ein. Um ν zu berechnen, betrachten wir die körperliche Ecke mit der Spitze in B , die aus den in B sich schneidenden Ebenen $z = \text{const}$, ferner der durch die Punkte O, B und C bestimmten Ebene, die auf ersterer senkrecht steht, und der den Kegel längs OB berührenden Tangentialebene besteht. Letztere enthält den gesuchten Winkel $\nu + 90^\circ$. Der ihm gegenüberliegende Winkel der Körperecke beträgt 90° . Mit den Bezeichnungen von Bild 3 lautet der Cosinus-Satz für das eben beschriebene sphärische Dreieck¹

$$\cos(\nu + 90^\circ) = \cos(90^\circ - \gamma) \cos(90^\circ + \alpha)$$

oder

$$\sin \nu = \sin \gamma \cdot \sin \alpha. \quad (13)$$

¹ Siehe „Hütte“, 27. Aufl., S. 95.

Hieraus folgt aber, wie der Vergleich mit Gl. (8a) zeigt, daß

$$\nu = \varepsilon \quad (14)$$

ist. Die Neigung der Erzeugenden des Kegels gegen die Symmetrieebene $\gamma = 0$ ist also ebensogroß wie die Neigung der Linie $s = \text{const}$ durch den betreffenden Punkt der Kegelschale gegen die Tangente an den Kreis $z = \text{const}$, der durch diesen Punkt gelegt werden kann. Für später benötigen wir den Winkel μ , den die Tangentialebene an die Kegelschale mit der Ebene $z = \text{const}$ einschließt. Dieser Winkel tritt in der oben betrachteten körperlichen Ecke an der Tangente t auf (s. Bild 3). Aus dem Sinussatz für die körperliche Ecke folgt¹ unter Berücksichtigung, daß der Körperwinkel längs BC 90° beträgt, $\sin \chi = \frac{\sin(90^\circ - \gamma)}{\sin(90^\circ + \varepsilon)} = \frac{\cos \gamma}{\cos \varepsilon}$, wenn mit χ der Körperwinkel längs OB bezeichnet wird. Ferner folgt aus dem Kosinussatz

$$\cos \mu = \sin \chi \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = - \frac{\cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \varepsilon}. \quad (14a)$$

Zunächst drücken wir mit Hilfe der Gl. (12) die auf das rechtwinkelige Netz der Kegelschale bezogenen Spannungen σ_s , σ_t und τ aus, indem wir für σ_t etwa den Wert nach Gl. (10) einsetzen und dadurch die Airysche Spannungsfunktion F ermitteln.

$$F = \frac{\rho}{\delta} \cdot \frac{s^3}{12 c} \cdot \cos^3 \varepsilon. \quad (15a)$$

Beobachtet man Gl. (8b), so kann man für F auch schreiben

$$F = \frac{\rho}{\delta} \cdot \frac{s^3}{12 c} \cdot \left(\frac{c^2 + \cos^4 \gamma}{c^2 + \cos^2 \gamma} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (15b)$$

In den Ausdrücken (15a) und (15b) für F ist die Airysche Spannungsfunktion außer vom Radius s noch von dem Winkel ε bzw. γ abhängig. Wir brauchen aber ihre Abhängigkeit außer von s noch vom Winkel ψ , den der Strahl durch O bei der Abwicklung in die Ebene mit dem Nullstrahl OA einschließt, um mit Hilfe der Gleichungen (12) σ_s und τ berechnen zu können.

¹ Siehe „Hütte“ 27. Aufl., S. 95.

Dem Fortschreiten von Punkt B (s. Bild 3) auf der Linie $s = \text{const}$ um $s d\psi$ entspricht ein Fortschreiten auf dem Kreis $z = \text{const}$ um $2r d\gamma$, wobei zu beachten ist, daß dem Peripheriewinkel γ bei C der Zentriwinkel 2γ über dem gleichen Bogen zugeordnet ist. Es ist also

$$\frac{d\gamma}{d\psi} = \frac{s}{2r \cos \epsilon},$$

oder wegen

$$\begin{aligned} \frac{s}{2r} &= \frac{s}{z} \cdot \frac{z}{2r} = \frac{c}{\cos \alpha} = \sqrt{c^2 + \cos^2 \gamma}, \\ \frac{d\gamma}{d\psi} &= \frac{\sqrt{c^2 + \cos^2 \gamma}}{\cos \epsilon} = \frac{c^2 + \cos^2 \gamma}{\sqrt{c^2 + \cos^4 \gamma}} \end{aligned} \quad (16)$$

Aus Gl. (15 b) folgt demnach

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \psi} &= \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{d\psi} = \frac{p}{\delta} \cdot \frac{s^3}{12c} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{c^2 + \cos^4 \gamma}{c^2 + \cos^2 \gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \frac{-(c^2 + \cos^2 \gamma) 4 \cos^3 \gamma \sin \gamma + \sin 2\gamma (c^2 + \cos^4 \gamma)}{(c^2 + \cos^2 \gamma)^2} \cdot \frac{d\gamma}{d\psi}, \end{aligned}$$

woraus nach einfacher Umformung

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{p}{\delta} \cdot \frac{s^3}{12c} \cdot \sin 2\gamma \cdot \frac{2c^2 \sin^2 \gamma - (c^2 + \cos^4 \gamma)}{(c^2 + \cos^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}} \quad (17a)$$

folgt oder, wenn man wieder den durch Gl. (8b) gegebenen Zusammenhang zwischen den Winkeln γ und ϵ benützt:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = -\frac{p}{\delta} \frac{s^3}{4c} \sin \epsilon \sqrt{\cos^4 \epsilon - 4c^2 \sin^2 \epsilon}. \quad (17b)$$

Andererseits folgt aus Gl. (15 a) unmittelbar

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \cdot \frac{d\epsilon}{d\psi} = -\frac{p}{\delta} \cdot \frac{s^3}{4c} \cos^2 \epsilon \sin \epsilon \cdot \frac{d\epsilon}{d\psi}, \quad (17c)$$

woraus sich durch Vergleich mit Gl. (17b) ergibt

$$\frac{d\epsilon}{d\psi} = \frac{\sqrt{\cos^4 \epsilon - 4c^2 \sin^2 \epsilon}}{\cos^2 \epsilon}. \quad (18)$$

Ferner erhält man aus Gl. (17b) bei nochmaliger Differentiation nach ψ mit Hilfe einfacher Umformungen:

$$\frac{d^2 F}{d\psi^2} = \frac{p}{8} \frac{s^3}{4c} (\sin \varepsilon \sin 2\varepsilon - \cos^3 \varepsilon + 8c^2 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon). \quad (19)$$

Setzt man die Werte für $\frac{dF}{d\psi}$ nach Gl. (17b) und für $\frac{d^2 F}{d\psi^2}$ nach Gl. (19) in die Gl. (12) ein und beachtet noch

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{p}{8} \frac{s^2}{4c} \cos^3 \varepsilon, \quad (20)$$

so erhält man

$$\sigma_s = \frac{p}{8} \frac{s}{4c} \sin \varepsilon (\sin 2\varepsilon + 8c^2 \operatorname{tg} \varepsilon) \quad (21a)$$

$$\tau = \frac{p}{8} \frac{s}{2c} \sin \varepsilon \sqrt{\cos^4 \varepsilon - 4c^2 \sin^2 \varepsilon}. \quad (21b)$$

Für die Schnitte OA und OC wird der Winkel $\varepsilon = 0$; daher verschwindet hier sowohl τ als auch σ_s . Da diese Schnitte in der Symmetrieebene der ganzen Anordnung gelegen sind, ist hier das Verschwinden der Schubspannung τ selbstverständlich; dagegen ist das Verschwinden von σ_s an dieser Stelle ein überraschendes Ergebnis. Es kommt diesem Ergebnis auch praktische Bedeutung zu, weil die bei A nach Gl. (11a) berechnete, im Horizontalschnitt $z = \text{const}$ größte Tangentialspannung $(\sigma_t)_{\max}$ keine die Anstrengung des Werkstoffes an dieser Stelle herabmindernde Längszugspannung σ_s vorfindet.

Nachdem durch die Gl. (10), (21a) und (21b) der Spannungszustand in der Kegelschale festliegt, muß zur Kontrolle für die Richtigkeit dieser Spannungsverteilung nur noch gezeigt werden, daß für einen Schnitt der Kegelschale mit einer Ebene $z = \text{const}$ die Resultierende der in diesen Schnitten auftretenden Spannungen gleich dem auf dem Schnittkreis vom Halbmesser r wirkenden Innendruck $p r^2 \pi$ sein muß.

Um diesen Nachweis zu erbringen, drücken wir die in den Schnitten $z = \text{const}$ auftretenden Spannungen σ'_z und τ'_z zunächst durch die oben angegebenen, auf das rechtwinklige Netz

der s, ψ Koordinaten bezogenen Spannungen σ_s, σ_t und τ aus. Diese Umrechnungsformeln lauten:

$$\sigma'_z = \sigma_s \cos^2 \varepsilon + \sigma_t \sin^2 \varepsilon + \tau \sin 2\varepsilon \quad (22a)$$

$$\tau'_z = \frac{\sigma_t - \sigma_s}{2} \sin 2\varepsilon + \tau \cos 2\varepsilon. \quad (22b)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Spannungen σ'_z und τ'_z sich auf den Schnitt beziehen, der auf der Tangentialebene an die Kegelschale senkrecht steht und zugleich den Kreis $z = \text{const}$ berührt. Die Spannungen σ'_z bilden daher mit der Ebene $z = \text{const}$ den Winkel μ , von dem in Gl. (14a) die Rede war. Der Winkel, den die jeweilige Tangentialebene an die Kegelschale mit der Ebene $z = \text{const}$ einschließt, ist stets größer als 90° , daher setzen wir

$$\mu = 90^\circ + \mu' \quad (23)$$

und damit folgt aus Gl. (14a)

$$\cos \mu = \cos (\mu' + 90^\circ) = - \frac{\cos \gamma \sin \alpha}{\cos \varepsilon}$$

oder

$$\sin \mu' = \frac{\cos \gamma \sin \alpha}{\cos \varepsilon}, \quad (24)$$

woraus

$$\cos \mu' = \frac{\sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha}}{\cos \varepsilon}$$

folgt, oder wegen Gl. (8a)

$$\cos \mu' = \frac{\sqrt{\cos^2 \varepsilon \sin^2 \gamma - \sin^2 \varepsilon \cos^2 \gamma}}{\cos \varepsilon \cdot \sin \gamma}$$

und wegen Gl. (8b)

$$\cos \mu' = \frac{\sqrt{(c^2 + \cos^4 \gamma) \sin^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos^4 \gamma}}{\sqrt{c^2 + \cos^4 \gamma} \cdot \sin \gamma} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \cos^4 \gamma}} \quad (25a)$$

und damit

$$\sin \mu' = \frac{\cos^2 \gamma}{\sqrt{c^2 + \cos^4 \gamma}}. \quad (25b)$$

Die aus den Normalspannungen σ_z nach Gl. (22a) sich errechnenden Kräfte $\sigma_z \cdot r d\varphi \cdot \delta$ sind gegen die Z -Achse unter dem Win-

kel μ' geneigt. Ihre Komponenten senkrecht zur Ebene $z = \text{const}$ werden daher erhalten durch Multiplikation mit $\cos \mu'$.

Wir wollen mit der Berechnung von σ'_z beginnen. Durch Einsetzen der Werte für σ_t nach Gl. (10) und für σ_s und τ nach Gl. (21 a) bzw. (21 b) erhält man aus Gl. (22 a)

$$\sigma'_z = \frac{\rho}{\delta} \cdot \frac{s}{2c} \sin \varepsilon \sin 2\varepsilon [\cos^2 \varepsilon + 2c^2 + \sqrt{\cos^4 \varepsilon - 4c^2 \sin^2 \varepsilon}]. \quad (26a)$$

Hier ist der Übergang von ε auf γ zweckmäßig. Unter Verwendung der Gl. (8 b) sowie der Beziehung

$$\sqrt{\cos^4 \varepsilon - 4c^2 \sin^2 \varepsilon} = \frac{c^2 \cos 2\gamma + \cos^4 \gamma}{c^2 + \cos^2 \gamma}$$

folgt nach einfacher Umrechnung aus Gl. (26 a) für σ'_z

$$\sigma'_z = \frac{\rho}{\delta} \cdot \frac{r}{c} \sin^2 2\gamma \sqrt{c^2 + \cos^2 \gamma},$$

wobei von der Beziehung

$$s \cdot \sin \varepsilon = y = r \sin 2\gamma,$$

die man aus Bild 2 b oder 3 ablesen kann, Gebrauch gemacht worden ist.

Führen wir statt des Peripheriewinkels γ den zugehörigen Zentriwinkel $\varphi = 2\gamma$ ein, so erhält man

$$\sigma'_z = \frac{\rho}{\delta} \cdot \frac{r}{c} \sin^2 \varphi \sqrt{c^2 + \cos^4 \frac{\varphi}{2}}. \quad (27)$$

Die Spannungen σ'_z sind symmetrisch zur Symmetrieebene $y = 0$ oder $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ angeordnet. Ihre Resultierende liegt in dieser Symmetrieebene. Um die Resultierende der Spannungen σ'_z längs des Kreisschnittes $z = \text{const}$ zu bilden, multiplizieren wir σ'_z mit dem Flächenelement $\delta \cdot r d\varphi$ und mit $\cos \mu'$ nach Gl. (25 a) und integrieren über φ . Wegen der Symmetrie zur Ebene $y = 0$ genügt es, die Integration von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ zu erstrecken und diesen Wert doppelt zu nehmen:

$$R_1 = 2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sigma'_z \cdot \cos \mu' \cdot \delta \cdot r d\varphi = 2 \frac{\rho}{\delta} \cdot \frac{r^2}{c} \cdot \delta \cdot c \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (2)$$

Da der Wert des Integrals $\frac{\pi}{2}$ beträgt, erhält man

$$R_1 = p \cdot r^2 \pi,$$

d. h. den Wert, den das Gleichgewicht gegenüber dem Innendruck verlangt.

Die Resultierende R_1 fällt in den Mittelpunkt des Kreisschnittes $z = \text{const}$, da die Anteile $\sigma'_z \cdot \cos \mu'$ nach Gl. (28) symmetrisch zu $\varphi = 90^\circ$ gelegen sind.

Die Spannungen σ'_z haben aber auch Komponenten, die in die Ebene $z = \text{const}$ fallen. Ihre Resultierende liegt auch in der Ebene $z = \text{const}$ und fällt in deren Schnittgerade mit der Symmetrieebene $y = 0$. Ihre Größe ist

$$\begin{aligned} R_2 &= 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \sigma'_z \sin \mu' \cdot \cos \varphi \cdot \delta \cdot r d\varphi = p \frac{r^2}{c} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi (1 + \cos \varphi) d\varphi \\ &= p \frac{r^2}{c} \left[\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Das erste Integral in der eckigen Klammer ist null und das zweite ist $\frac{\pi}{8}$, so daß

$$R_2 = p \frac{r^2 \pi}{8c} \quad (30)$$

wird.

Dazu kommt noch die Resultierende der Schubspannungen τ'_z nach Gl. (22b). Zunächst werden wieder die Werte von σ_t , σ_s und τ eingesetzt, wodurch Gl. (22b) übergeht in

$$\begin{aligned} \tau'_z &= \frac{p}{\delta} \cdot \frac{s}{2c} [\cos^4 \varepsilon \sin \varepsilon - \sin^3 \varepsilon (\cos^2 \varepsilon + 4c^2) + \\ &\quad + \sin \varepsilon \cos 2\varepsilon \sqrt{\cos^4 \varepsilon - 4c^2 \sin^2 \varepsilon}] \end{aligned}$$

oder

$$\tau'_z = \frac{p}{2\delta c} r \sin \varphi \left[\left(\sqrt{\cos^4 \varepsilon - 4c^2 \sin^2 \varepsilon} + \frac{\cos 2\varepsilon}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right].$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } 2 \sqrt{\cos^4 \varepsilon - 4c^2 \sin^2 \varepsilon + \cos 2\varepsilon} &= \\ &= \frac{2c^2 \cos^2 \gamma + 2 \cos^4 \gamma + c^2 + \cos^4 \gamma - \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma}{c^2 + \cos^2 \gamma} = \\ &= 1 + 2 \cos 2\gamma = 1 + 2 \cos \varphi \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} \tau'_z &= \frac{p}{8\delta c} r \cdot \sin \varphi [(1 + 2 \cos \varphi)^2 - 1] = \\ &= \frac{p}{2\delta c} r \cdot \sin \varphi \cos \varphi (1 + \cos \varphi). \end{aligned} \quad (31)$$

Die Resultierende dieser Spannungen τ'_z fällt ebenso wie R_2 in die Schnittgerade der Ebenen $z = \text{const}$ und $y = 0$. Sie beträgt:

$$\begin{aligned} R_3 &= 2 \int_0^\pi \tau'_z \sin \varphi \cdot \delta \cdot r d\varphi = \\ &= \frac{p r^2}{c} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi (1 + \cos \varphi) d\varphi = p \cdot \frac{r^2 \pi}{8 c}. \end{aligned} \quad (32)$$

R_3 ist also ebenso groß wie R_2 , dagegen ist die Richtung der Resultierenden R_3 entgegengesetzt der von R_2 , so daß sich beide gegenseitig aufheben. Damit ist der Nachweis erbracht, daß die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Schnitt der Kegelschale mit einer Ebene $z = \text{const}$ erfüllt sind. Zugleich ist damit aber auch die Richtigkeit der oben angegebenen Spannungsverteilung nachgewiesen.

§ 3. Ein Beispiel.

Die Spannungen σ'_z nach Gl. (27) und τ'_z nach Gl. (31) sind in dimensionsloser Darstellung durch Bild 4 wiedergegeben. Sie

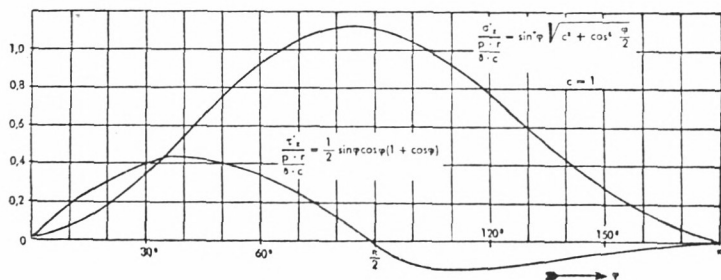


Bild 4.

beziehen sich auf einen Schnitt der Kegelschale $z = \text{const.}$ Es genügt aus Symmetriegründen, die eine Hälfte der Schale von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ zu untersuchen.

Dabei ist im Ausdruck für σ'_z für die Konstante $c = \cot \beta$ der Wert 1 angenommen worden, der einem Öffnungswinkel des Kegels von $\beta = 45^\circ$ entspricht. Die größten Spannungen σ'_z treten in der Nähe der Stelle $\varphi = \frac{\pi}{2}$ auf.

Ihr größter Wert ist

$$(\sigma'_z)_{\max} = 1,12 \frac{p r}{\delta}.$$

Wir wollen diesen Wert mit dem durch Gl. (11 a) wiedergegebenen Wert von $(\sigma_t)_{\max}$ vergleichen, der mit $\beta = 45^\circ$ und wegen

$$\frac{z}{2r} = \cos \beta = 1$$

übergeht in

$$(\sigma_t)_{\max} = \sqrt{2} \cdot \frac{p r}{\delta} = 1,41 \frac{p r}{\delta}.$$

Der Vergleich mit $\sigma'_{z\max}$ zeigt, daß die größte Beanspruchung durch die Tangentialspannungen im Symmetrieschnitt wiedergegeben wird.