Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1943

München 1944
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Die Fehler höherer Ordnung der optischen Instrumente.

Von C. Carathéodory.

Vorgelegt am 5. Februar 1943.

Einleitung.

1. Die Theorie der Fehler der optischen Instrumente ist nicht so sehr ein Problem der Mathematik, als ein solches der Rechenkunst. Vom Standpunkt des Mathematikers ist nämlich dieses Problem schon längst endgültig gelöst. Sobald man aber Glieder von höherer Ordnung berücksichtigen will, vermehrt sich gleich die Anzahl der Daten des Problems in solchem Maße, daß man Gefahr läuft, in einem Wald von Formeln stecken zu bleiben und jede Übersicht zu verlieren.

Aus diesem Grunde hat sich wohl kaum jemand[1] mit Fehlern von höherer als der fünften Ordnung ernsthaft beschäftigt. Und selbst für die Fehler fünfter Ordnung sind nicht alle Angaben, die sich in der Literatur vorfinden, immer korrekt. Eine einwandfreie Methode, um auch diese letzteren Fehler zu berechnen, hat M. Herzberger, und dies eigentlich nur in neuester Zeit, aufgestellt.[2] Aber Herzberger hat, um seine Formeln zu ordnen, die Tensorbezeichnung benutzt, welche für das in Frage stehende Problem keinen Vorteil bringt, weil die Invarianten, nach welchen die Entwicklung des Eikonals fortschreitet, sich bei Änderungen der Koordinaten nicht wie Tensoren verhalten. Deshalb scheint sich auch diese Methode mit der Betrachtung der Fehler fünfter Ordnung erschöpfen zu müssen.

2. Viel vernünftiger und sachgemäßer ist es sicher, wenn man das Eikonal nicht, wie es üblicherweise geschieht, nach den einfachen Potenzen dieser Invarianten entwickelt, sondern wenn

[1] Außer Petzval, dessen Rechnungen aber verschollen sind.

[2] M. Herzberger, Theory of the image errors of the fifth order in rotationally symmetrical systems. I. (Journ. of the optical Soc. of Amer. **29**, Nr. 9, Sept. 1939, p. 395–406.)

man diese Funktion als eine lineare Kombination von gewissen Polynomen ansieht, die aus diesen Invarianten gebildet und so gewählt werden, daß sich die Koeffizienten der Entwicklung, bei Änderung des Koordinatensystems in einfachster Weise, transformieren.

Diesen Gedanken verwirklicht man am bequemsten, indem man mit komplexen Zahlen rechnet. Durch die komplexe Bezeichnungsweise gewinnt man außerdem die Möglichkeit, je zwei Gleichungen zu einer einzigen zu verbinden, deren Gestalt so sehr viel einfacher ist als die der ursprünglichen, daß man wohl 75% der eigentlichen Rechenarbeit einsparen kann. Wichtiger aber als dieser rein materielle Gewinn ist der schon erwähnte Vorteil, mit Koeffizienten zu operieren, von denen jeder sein eigenes Gesicht bewahrt, und welche überdies aufs engste mit den zu errechnenden Fehlern der Abbildung zusammenhängen.

3. Man hat lange gestritten, ob man zwölf oder nur neun Fehler fünfter Ordnung berücksichtigen soll.[3] Durch unsere Ausführungen wird diese Frage endgültig geklärt. Der Widerstreit der Meinungen ist nämlich nur dadurch entstanden, daß die verschiedenen Autoren nicht immer dasselbe unter einem „Fehler" verstanden haben.

Bei den älteren Autoren wird die Fiktion aufrecht erhalten, daß die Fehler der verschiedenen Ordnungen immer alle nacheinander in ihrer natürlichen Reihenfolge durch geeignete Modifizierung der Linse korrigiert werden können und werden müssen. Bei dieser Auffassung bleiben genau neun Fehler fünfter Ordnung zu beheben übrig, sobald sämtliche fünf Fehler dritter Ordnung berücksichtigt worden sind. Diese neun Fehler fünfter Ordnung sollen im folgenden die Hauptfehler fünfter Ordnung genannt werden.

Ist man dagegen in seinen Ansprüchen bescheidener und hat man ein Objektiv zu untersuchen, bei welchem die Fehler dritter Ordnung zwar reduziert, aber nicht völlig aufgehoben sind, so ist die Sachlage eine ganz andere. Die übrigbleibenden Fehler dritter Ordnung induzieren zwölf verschiedene Fehler fünfter

[3] Vgl. hierzu Czapski-Eppenstein, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 3. Aufl. (Leipzig, Joh. Ambrosius Barth, 1921) S. 280.

Ordnung, die man berechnen muß, wenn man sich von der Güte des Instruments Rechenschaft geben will. Von diesen zwölf Fehlern haben die neun dieselbe Gestalt wie die Hauptfehler und können diesen zugerechnet werden. Aber drei neue Fehler sind hinzugekommen, die man nicht ändern kann, ohne gleichzeitig auch an den Fehlern dritter Ordnung zu rühren.

Im allgemeinen gibt es

$$\frac{n(n+3)}{2}$$

Hauptfehler $(2n-1)^{er}$ Ordnung und

$$n(n+1)$$

Fehler, welche durch die Fehler niedrigerer Ordnung induziert werden. Zur Behebung sämtlicher Fehler bis zur $(2n-1)^{er}$ Ordnung inklusive müssen aber bloß

$$\frac{(n-1)(n+3)(n+4)}{6}$$

Bedingungsgleichungen erfüllt werden.

4. Die Fundamentalgleichungen der Abbildung. In der Objektebene eines optischen Instruments sollen die beiden Achsen x_1 und x_2 mit der zur selben Ebene senkrechten Rotationsachse t des Instruments ein rechtwinkeliges kartesisches Koordinatenkreuz bilden. Jeder Strahl des Objektraumes, der nicht in der Objektebene liegt, wird durch die Koordinaten x_1, x_2 seines Schnittpunktes mit dieser Ebene und durch die Projektionen y_1, y_2 auf die x_1- bzw. die x_2-Achsen eines orientierten Einheitsvektors, den er enthält, gekennzeichnet. Die vier Größen x_1, x_2, y_1, y_2 nennt man die kanonischen Koordinaten des Strahls. Ebenso werden die Strahlen des Bildraumes durch die kanonischen Koordinaten ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 bestimmt.[4]

Um die Beziehungen, welche beim Durchgang durch das Instrument zwischen den Strahlen des Objekt- und des Bildraumes entstehen, zu beschreiben, wollen wir ein gemischtes

[4] Hierbei braucht die Rotationsachse des Bildraumes nicht mit der t-Achse zusammenzufallen oder dieser Achse parallel zu sein.

Eikonal $U(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$ benutzen. Bekanntlich gelten dann die Gleichungen

$$y_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \tag{4. 1}$$

$$\xi_1 = \frac{\partial U}{\partial \eta_1}, \quad \xi_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta_2}, \tag{4. 2}$$

deren Behandlung unsere Hauptaufgabe bildet. Wir müssen nämlich aus diesen Gleichungen die Größen $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ als Funktionen von x_1, x_2, y_1, y_2 so berechnen, daß gewisse Eigenschaften dieser Funktionen klar hervortreten.

5. Rotationssymmetrie und Spiegelungssymmetrie. Aus der Rotationssymmetrie unseres Instruments folgt bekanntlich, daß man das Eikonal $U(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$ als Funktion der drei Verbindungen

$$A = x_1^2 + x_2^2, \quad B = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2, \quad C = \eta_1^2 + \eta_2^2 \tag{5. 1}$$

ausdrücken kann.

Nimmt man nun an, daß das Eikonal $U = \Phi(A, B, C)$ in der Umgebung der Achse regulär sein soll, d. h. als Potenzreihe in den vier Veränderlichen x_1, x_2, η_1, η_2 entwickelt werden kann, so folgt daraus noch nicht die Darstellbarkeit von Φ als Potenzreihe in A, B und C. Schon das einfache Polynom

$$D = \sqrt{AC - B^2} = x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1 \tag{5. 2}$$

kann nämlich durchaus nicht als Potenzreihe in A, B und C geschrieben werden. Dagegen läßt sich beweisen, daß man U immer in der Gestalt schreiben kann

$$U(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2) = \Omega(A, B, C) + D\,\Psi(A, B, C), \tag{5. 3}$$

wobei Ω und Ψ Potenzreihen in A, B und C bedeuten.[5]

Zwischen den drei Invarianten A, B, C einerseits und der Invariante D andererseits besteht nun ein fundamentaler Unterschied. Die ersteren bleiben unverändert, wenn man x_1 und η_1 festhält und x_2, η_2 durch $-x_2$, $-\eta_2$ ersetzt; die letztere wird in $-D$ transformiert.

---

[5] C. Carathéodory, Geometrische Optik (Ergebnisse der Mathem. und ihrer Grenzgeb. Bd. IV) Berlin, Springer. 1937, § 57.

Hieraus kann man leicht folgendes schließen: Ist in (5. 3) die Funktion $\Psi(A, B, C)$ identisch Null, so ist das Instrument nicht nur rotationssymmetrisch, sondern auch spiegelungssymmetrisch. D. h. zu jeder Ebene des Objektraumes, welche die Rotationsachse enthält, gibt es eine ebensolche Ebene des Bildraumes, so daß zwei Ausgangsstrahlen, welche durch Spiegelung an der ersteren dieser Ebenen ineinander übergehen, beim Durchgang durch das Instrument, in solche Strahlen des Bildraumes transformiert werden, welche bezüglich der zweiten Ebene symmetrisch sind. Umgekehrt muß bei einem spiegelungssymmetrischen Instrument die Funktion $\Psi = 0$ sein, falls die Achsen geeignet gewählt worden sind.

Dem Kenner der Strahlenoptik wird freilich diese Unterscheidung zwischen rotationssymmetrischen und spiegelungssymmetrischen Instrumenten als eine unnötige Spitzfindigkeit erscheinen. Denn jedes optische Instrument, welches rotationssymmetrisch ist, muß notwendig auch spiegelungssymmetrisch sein. Die älteren Autoren haben also ganz richtig gehandelt, wenn sie in der Gleichung (5. 3) die Funktion $\Psi(A, B, C)$ systematisch ignoriert haben. Die Betrachtung von Strahlenabbildungen, welche rotationssymmetrisch, aber nicht spiegelungssymmetrisch sind, wird trotzdem aus zwei verschiedenen Gründen gerechtfertigt. Erstens sind die Formeln, zu welchen wir gelangen werden, viel übersichtlicher, wenn man sie für Strahlenabbildungen aufstellt, welche nicht spiegelungssymmetrisch sind. Gewisse Eigenschaften dieser Formeln kommen erst bei einer solchen Schreibweise zum Vorschein. Auch verursacht die neue Schreibweise gar keine besondere Mühe, da man zu jeder Zeit mit einem einzigen Federstrich jede beliebige der erhaltenen Formeln in solche verwandeln kann, welche für spiegelungssymmetrische Instrumente gelten. Der zweite Grund ist aber der, daß man im Elektronenmikroskop ein Instrument besitzt, welches rotationssymmetrisch ist, aber wie Herr W. Glaser bemerkt hat, nicht spiegelungssymmetrisch zu sein braucht.[6]

---

[6] W. Glaser, Zur Bildfehlertheorie des Elektronenmikroskops, Ztschr. f. Physik **97** (1935) S. 177–201.

6. Einführung komplexer Koordinaten. Alle unsere Formeln werden unvergleichlich einfacher, wenn wir komplexe Zahlen benutzen. Wir bezeichnen also mit i die komplexe Einheit und setzen

$$x = x_1 + i x_2, \quad \bar{x} = x_1 - i x_2, \quad y = y_1 + i y_2, \quad \bar{y} = y_1 - i y_2 \tag{6. 1}$$

$$\xi = \xi_1 + i \xi_2, \quad \bar{\xi} = \xi_1 - i \xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i \eta_2, \quad \bar{\eta} = \eta_1 - i \eta_2. \tag{6. 2}$$

Da nun aus diesen Formeln folgt

$$x_1 = \frac{x + \bar{x}}{2}, \quad x_2 = \frac{x - \bar{x}}{2i}, \quad \eta_1 = \frac{\eta + \bar{\eta}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{\eta - \bar{\eta}}{2i}, \tag{6. 3}$$

kann man das Eikonal $U(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2)$ auch als Potenzreihe in den vier Veränderlichen x, $\bar{x}$, η, $\bar{\eta}$ entwickeln, deren Koeffizienten allerdings jetzt im allgemeinen komplexe Zahlen sein werden.

Aus der Vergleichung von (6. 1) und (6. 2) mit (4. 1) und (4. 2) folgt jetzt:

$$y = \frac{\partial U}{\partial x_1} + i \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \xi = \frac{\partial U}{\partial \eta_1} + i \frac{\partial U}{\partial \eta_2}. \tag{6. 4}$$

Nun beachte man die aus (6. 1) folgenden Gleichungen

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = i, \quad \frac{\partial x}{\partial x_1} + i \frac{\partial x}{\partial x_2} = 1 + i^2 = 0 \\ &\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2} = -i, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} + i \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2} = 1 - i^2 = 2. \end{aligned} \right. \tag{6. 5}$$

Mit Hilfe dieser Relationen erhält man aus (6. 4)

$$y = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}, \tag{6. 6}$$

und ebenso findet man

$$\xi = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{\eta}}. \tag{6. 7}$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein

$$V(x, \bar{x}, \eta, \bar{\eta}) = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{\eta}}, \quad W(x, \bar{x}, \eta, \bar{\eta}) = 2 \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}, \tag{6. 8}$$

mit welchen die letzten Gleichungen die einfache Gestalt

$$\xi = V(x, \bar{x}, \eta, \bar{\eta}), \quad y = W(x, \bar{x}, \eta, \bar{\eta}) \tag{6. 9}$$

annehmen, die unseren weiteren Überlegungen zugrunde gelegt werden soll.

7. Die Entwicklung des Eikonals. Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen können die Gleichungen (5. 1) und (5. 2) folgendermaßen geschrieben werden:

$$(7.\ 1)\qquad \begin{cases} A = x\bar{x}, & C = \eta\bar{\eta}, \\ B + iD = \bar{x}\eta, & B - iD = x\bar{\eta}. \end{cases}$$

Jedes beliebige Polynom in den vier Ausdrücken A, B, C und D kann daher auch als Polynom der vier Verbindungen $(x\bar{x})$, $(\eta\bar{\eta})$, $(\bar{x}\eta)$ und $(x\bar{\eta})$ geschrieben werden. Und umgekehrt ist jede der letzteren Verbindungen auch ein Polynom in A, B, C und D, das allerdings unter Umständen komplexe Koeffizienten besitzt.

Unser Eikonal U können wir daher in eine Summe von Gliedern entwickeln, von denen jedes einem mit einer reellen oder komplexen Zahl multiplizierten Ausdruck von der Gestalt

$$(7.\ 2)\qquad (x\bar{x})^{\varkappa'}\,(\eta\bar{\eta})^{\lambda'}\,(\bar{x}\eta)^{\mu'}\,(x\bar{\eta})^{\nu'}$$

gleich ist. Hierbei bedeuten die Exponenten $\varkappa'$, λ', μ', ν' ganze positive Zahlen oder die Null. Mit Benutzung der Identität

$$(7.\ 3)\qquad (x\bar{x})\,(\eta\bar{\eta}) = (\bar{x}\eta)\,(x\bar{\eta})$$

kann der Ausdruck (7. 2) auf eine der drei folgenden Normalformen gebracht werden: ist erstens $\mu' = \nu'$ und setzt man $\varkappa = \varkappa' + \nu'$, $\lambda = \lambda' + \nu'$, so ist (7. 2) gleich

$$(7.\ 4)\qquad (x\bar{x})^{\varkappa}\,(\eta\bar{\eta})^{\lambda}.$$

Ist zweitens $\nu' < \mu'$, so setze man $\varkappa = \varkappa' + \nu'$, $\lambda = \lambda' + \nu'$, $\mu = \mu' - \nu'$ und erhält an Stelle von (7. 2)

$$(7.\ 5)\qquad (x\bar{x})^{\varkappa}\,(\eta\bar{\eta})^{\lambda}\,(\bar{x}\eta)^{\mu}.$$

Ist endlich $\mu' < \nu'$, so findet man auf ähnlichem Wege für (7. 2) den äquivalenten Ausdruck

$$(7.\ 6)\qquad (x\bar{x})^{\varkappa}\,(\eta\bar{\eta})^{\lambda}\,(x\bar{\eta})^{\nu}.$$

Nachdem wir die rechte Seite von (5. 3) auf die soeben beschriebene Weise umgerechnet und jedes Glied auf seine Normalform gebracht haben, sammeln wir alle Glieder mit übereinstimmenden variablen Teil zu einem einzigen; dann müssen, da das Eikonal eine reelle Zahl darstellt, zwei Glieder, deren variable Teile konjugiert komplex sind, konjugiert komplexe Koeffizienten besitzen.

8. Wir schreiben jetzt

$$(8.\ 1)\qquad U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots,$$

wobei U_n die Gesamtheit der Glieder $2\,n^{ter}$ Ordnung des Eikonals bedeutet. Ferner bezeichnen wir mit

$$(8.\ 2)\qquad p_k^j \text{ oder ausführlicher mit } p_k^j(n)$$

ein System von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ komplexen Zahlen, welche für

$$(8.\ 3)\qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-j)$$

erklärt sind, und mit $\bar{p}_k^j$ bzw. $\bar{p}_k^j(n)$ die zu diesen konjugiert komplexen Zahlen. Dann soll $2\,U_n$ für $n \geqq 2$ als Summe über alle möglichen Ausdrücke der Gestalt

$$(8.\ 4)\qquad (x\bar{x})^{n-j-k}(\eta\bar{\eta})^k \left[p_k^j(\bar{x}\eta)^j + \bar{p}_k^j(x\bar{\eta})^j\right]$$

geschrieben werden. Man beachte, daß die Anzahl der reellen Koeffizienten, welche in dieser Summe vorkommen, gleich

$$(8.\ 5)\qquad (n+1) + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2$$

ist.

In dieser letzten Darstellung von U_n sind die Koeffizienten $p_k^j(n)$ ganz willkürlich. Führt man nämlich hierin mit Hilfe von (7. 1) die Invarianten A, B, C und D wieder ein und eliminiert man die höheren Potenzen von D mit Hilfe der Identität $D^2 = AC - B^2$, so erhält man zum Schluß einen Ausdruck von der Gestalt (5. 3). Hierbei verschwindet das Polynom $\Psi(A, B, C)$, mit welchem D multipliziert wird, dann und nur dann, wenn die Koeffizienten p_k^j alle reell sind.

Die Koeffizienten der Glieder niedrigster Ordnung U_1 spielen im folgenden eine besondere Rolle und sollen deshalb mit anderen Buchstaben bezeichnet werden. Wir setzen:

$$(8.\ 6)\qquad 2\,U_1 = k x\bar{x} + l\eta\bar{\eta} + m(\bar{x}\eta + x\bar{\eta}),$$

wobei die Zahlen k, l und m alle reell sein sollen. Durch diese letzte Forderung wird die Stellung des Koordinatenkreuzes in der Bildebene eindeutig festgelegt, sobald das Koordinatenkreuz in der Objektebene gewählt worden ist. Unter diesen selben Umständen gilt auch der wichtige

Satz: Das betrachtete Instrument ist dann und nur dann spiegelungssymmetrisch, wenn für alle betrachteten Werte von k und j sämtliche Koeffizienten $p_k^j(n)$ reell sind, und wenn dies für alle $n \geqq 2$ stattfindet.

9. Entwickelung von V und W. Wir führen die Bezeichnung ein

$$V = V_1 + V_2 + \ldots, \quad W = W_1 + W_2 + \ldots, \tag{9. 1}$$

wobei

$$V_n = 2\frac{\partial U_n}{\partial \eta}, \qquad W_n = 2\frac{\partial U_n}{\partial x} \qquad (n = 1, 2 \ldots) \tag{9. 2}$$

die Glieder $(2n-1)^{er}$ Ordnung in jeder der Entwicklungen von V bzw. W bedeuten. Durch Ausmultiplikation von (8. 4) erhält man

$$p_k^j x^{n-j-k} \bar{x}^{n-k} \eta^{j+k} \bar{\eta}^k + \bar{p}_k^j x^{n-k} \bar{x}^{n-j-k} \eta^k \bar{\eta}^{j+k}. \tag{9. 3}$$

Daraus entnimmt man nach (9. 2), daß V_n gleich der Summe aller möglichen Glieder von der Gestalt

$$\left\{\begin{array}{l} k p_k^j x^{n-j-k} \bar{x}^{n-k} \eta^{j+k} \bar{\eta}^{k-1} + (j+k) \bar{p}_k^j x^{n-k} \bar{x}^{n-j-k} \eta^k \bar{\eta}^{j+k-1}, \\ j = 0, 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots, (n-j) \end{array}\right. \tag{9. 4}$$

ist. Ebenso erhält man W_n als Summe der Glieder

$$\left\{\begin{array}{l} (n-k) p_k^j x^{n-j-k} \bar{x}^{n-k-1} \eta^{j+k} \bar{\eta}^k + (n-j-k) \bar{p}_k^j x^{n-k} \bar{x}^{n-j-k-1} \eta^k \bar{\eta}^{j+k} \\ \qquad j = 0, 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots, (n-j). \end{array}\right. \tag{9. 5}$$

Der Ausdruck (9. 4) verschwindet für $j = k = 0$. Für $j = 0$, $k \neq 0$ kann man seine beiden Glieder zu einem einzigen Glied zusammenfassen und für $k = 0$, $j \neq 0$ verschwindet das erste Glied. Folglich besteht die Summe V_n für komplexe p_k^j aus

$$2n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n+1) \tag{9. 6}$$

verschiedenen Gliedern. Ist aber das Instrument spiegelungssymmetrisch, sind also alle p_k^j reell, so reduziert sich die Anzahl der linear unabhängigen Glieder auf

$$2n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}. \tag{9. 7}$$

10. Man beachte, daß die variablen Teile der beiden Ausdrücke V_n und W_n sich nur durch die Reihenfolge, in welcher sie auftreten, voneinander unterscheiden. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$[\alpha, \beta]_n = x^{n-\alpha} \bar{x}^{n-\beta-1} \eta^{\alpha} \bar{\eta}^{\beta}, \tag{10. 1}$$

so erhält man nach dem vorigen Paragraphen die Formeln:

$$V_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} \left\{ k p_k^j [j+k, k-1]_n + (j+k) \bar{p}_k^j [k, j+k-1]_n \right\} \tag{10. 2}$$

$$W_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \left\{ (n-k) p_k^j [j+k, k]_n + (n-j-k) \bar{p}_k^j [k, j+k]_n \right\} \tag{10. 3}$$

11. Die Auflösung der Fundamentalgleichungen durch Reihenentwickelung. Den Ausgangsstrahl, dessen Durchgang durch das Instrument berechnet werden soll, bestimmen wir mit Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896) durch die Lage zweier seiner Punkte. Es ist notwendig, die Koordinaten dieser Punkte noch von einem reellen Parameter ρ abhängen zu lassen, den man am Schluß der Rechnung gleich Eins zu setzen hat. Der erste der betrachteten Punkte soll in der Objektebene liegen und also die Koordinaten

$$\rho x_1, \ \rho x_2, \ 0 \tag{11. 1}$$

besitzen. Der zweite soll in einer zur Objektebene parallelen Ebene liegen, die von dieser den Abstand

$$t = \frac{1}{h} \tag{11. 2}$$

hat; seine Koordinaten seien

$$\rho z_1, \ \rho z_2, \ \frac{1}{h}. \tag{11. 3}$$

Nach dem § 4 werden dann die kanonischen Richtungskoordinaten y_1, y_2 dieses Strahls durch die Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\rho (z_1 - x_1)}{\sqrt{\frac{1}{h^2} + \rho^2 (z_1 - x_1)^2 + \rho^2 (z_2 - x_2)^2}}, \\ y_2 &= \frac{\rho (z_2 - x_2)}{\sqrt{\frac{1}{h^2} + \rho^2 (z_1 - x_1)^2 + \rho^2 (z_2 - x_2)^2}}. \end{aligned} \tag{11. 4}$$

Setzt man jetzt

(11. 5) $$z = z_1 + i z_2, \qquad \bar{z} = z_1 - i z_2,$$

so können nach (6. 1) die beiden Gleichungen (10. 3) durch folgende ersetzt werden:

(11. 6) $$y = \frac{\rho h (z - x)}{\sqrt{1 + \rho^2 h^2 (z - x)(\bar{z} - \bar{x})}}.$$

12. In den Gleichungen (6. 9) ersetzen wir die Variablen x, $\bar{x}$ durch ρx, $\rho \bar{x}$ und y durch die als Potenzreihe $y = \rho y' + \rho^3 y'' + \ldots$ geschriebene rechte Seite von (11.6). Dann gibt es Potenzreihen

(12. 1) $$\eta = \rho \eta' + \rho^3 \eta''' + \rho^5 \eta^V + \ldots,$$

(12. 2) $$\xi = \rho \xi' + \rho^3 \xi''' + \rho^5 \xi^V + \ldots,$$

welche in dieselben Gleichungen (6. 9) eingesetzt diese identisch befriedigen. Die Koeffizienten η', ξ', η''', ξ''', ... bestimmt man nacheinander auf folgende Weise.

Zuerst müssen die Gleichungen

$$\xi' = V_1 (x_1 \bar{x}_1 \eta' \bar{\eta}'), \qquad y' = W_1 (x_1 \bar{x}_1 \eta', \bar{\eta}')$$

befriedigt werden, welche nach (8. 6) (9. 2), und (11. 6) äquivalent sind mit folgenden:

(12. 3) $$\xi' = mx + l\eta', \qquad h(z - x) = kx + m\eta'.$$

Die Größe η' muß wegen der folgenden Ausführungen besonders hervorgehoben werden. Wir schreiben

(12. 4) $$\eta' = \zeta$$

und erhalten darauf aus (12. 3)

(12. 5) $$m\zeta = hz - (h + k)x$$

(12. 6) $$m\xi' = (m^2 - l(h + k))x + lhz.$$

Am bequemsten ist es nun, wenn man die weiteren Größen η''', ξ''', ..., die man zu berechnen hat, zunächst als Funktionen von x und ζ bestimmt und erst nachträglich mit Hilfe von (12. 5) die endgültigen Formeln in x und z aufstellt. Dazu muß man freilich die Gleichung (11. 6) für y durch eine andere ersetzen, welche von den Variablen x und ζ abhängt. Diese lautet

$$y = \frac{\rho\,(m\zeta + kx)}{\sqrt{1 + \rho^2\,(m\zeta + kx)\,(m\bar{\zeta} + k\bar{x})}}. \tag{12.7}$$

Entwickelt man die rechte Seite von (12. 7) nach Potenzen von ρ und schreibt man

$$y = \rho y' + \rho^3 y''' + \rho^5 y^{(5)} + \ldots, \tag{12.8}$$

so erhält man nacheinander

$$\left\{\begin{aligned} y' &= m\zeta + kx \\ y''' &= -\frac{1}{2}\,(m\zeta + kx)^2\,(m\bar{\zeta} + k\bar{x}) \\ y^{(5)} &= \frac{3}{8}\,(m\zeta + kx)^3\,(m\bar{\zeta} + k\bar{x})^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{12.9}$$

13. Wir bezeichnen mit $V_k^{(2n-1)}$ den Koeffizienten von $\rho^{(2n-1)}$, wenn wir im Polynom $V_k\,(x, \bar{x}, \eta, \bar{\eta})$ die Variablen $x, \bar{x}$ durch ρx, $\rho\bar{x}$ ersetzen und die Variablen $\eta, \bar{\eta}$ mit Hilfe von (12. 1) umrechnen. Eine ähnliche Bedeutung soll dem Symbol $W_k^{(2n-1)}$ zukommen. Mit dieser Bezeichnungsweise entnehmen wir dann aus (6. 9) das System von Gleichungen

$$\xi^{(2n-1)} = V_1^{(2n-1)} + V_2^{(2n-1)} + \ldots + V_n^{(2n-1)}, \tag{13.1}$$

$$y^{(2n-1)} = W_1^{(2n-1)} + W_2^{(2n-1)} + \ldots + W_n^{(2n-1)}. \tag{13.2}$$

Bei der Aufstellung dieser letzteren Gleichungen ist benutzt worden, daß die Ausdrücke $V_k^{(2n-1)}$ und $W_k^{(2n-1)}$ für $k > n$ identisch verschwinden. Nach (8. 6) hat man ferner

$$V_1 = mx + l\eta, \quad W_1 = kx + m\eta$$

und es ist daher für $n \geqq 2$

$$V_1^{(2n-1)} = l\eta^{(2n-1)}, \quad W_1^{(2n-1)} = m\eta^{(2n-1)}. \tag{13.3}$$

An Stelle der Gleichungen (13. 1) und (13. 2) kann man daher setzen:

$$(13.4)\quad \xi^{(2n-1)} - l\eta^{(2n-1)} = V_2^{(2n-1)} + \ldots + V_n^{(2n-1)},$$

$$(13.5)\quad -m\eta^{(2n-1)} = W_2^{(2n-1)} + \ldots + W_{n-1}^{(2n-1)} + (W_n^{(2n-1)} - y^{(2n-1)}).$$

Diese letzteren Gleichungen erlauben die Größen $\xi^{(2n-1)}$, $\eta^{(2n-1)}$ als Polynome von x, $\bar{x}$, ζ, $\bar{\zeta}$ für $n = 2, 3, \ldots$ nacheinander zu berechnen Hat man dies getan, so kann man mit Hilfe von (12, 5) die Variable ζ durch z ersetzen.

Diese Formeln werden sehr vereinfacht, wenn $l = 0$ und $k \neq 0$ ist und wenn außerdem $h = -k$ genommen wird. Dazu müssen Objekt- und Bildebene konjugiert im Sinne der Gausschen Dioptrik sein, die Eintrittspupille des Instruments muß von der Objektebene verschieden sein und mit der Brennebene des Objektraumes zusammenfallen.

Für die Behandlung von mancherlei Fragen ist es aber notwendig, die Entwicklungen auch für allgemeine Werte von l und h an der Hand zu haben.

Wir wollen nun nach dieser Methode die Glieder dritter und fünfter Ordnung ausführlich hinschreiben.

14. Die Glieder dritter Ordnung. Nach dem § 10 erhält man die Ausdrücke V_2''' und W_2''', indem man in (10. 2) und (10. 3) die Zahl $n = 2$ nimmt und in (10. 1) die Größen η, $\bar{\eta}$ durch ζ, $\bar{\zeta}$ ersetzt. Es ist daher

$$(14.1)\quad \begin{aligned} V_2''' = {} & [p_1^0 + \bar{p}_1^0]\, x\bar{x}\zeta + [\;*\; + \bar{p}_0^1\, x^2\bar{x}] \\ & + [2p_2^0 + 2\bar{p}_2^0]\,\zeta^2\bar{\zeta} + [p_1^1\bar{x}\zeta^2 + 2\bar{p}_1^1\, x\zeta\bar{\zeta}] + 2\bar{p}_0^2\, x^2\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

$$(14.2)\quad \begin{aligned} W_2''' = {} & [2p_0^0 + 2\bar{p}_0^0]\, x^2\bar{x} + [2p_0^1 x\bar{x}\zeta + \bar{p}_0^1 x^2\bar{\zeta}] + 2p_0^2\bar{x}\zeta^2 \\ & + [p_1^0 + \bar{p}_1^0]\, x\zeta\bar{\zeta} + p_1^1\zeta^2\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Andererseits erhält man durch Entwicklung der zweiten Zeile von (12. 9)

$$(14.3)\quad \begin{aligned} -y''' = {} & \frac{1}{2}k^3x^2\bar{x} + [k^2mx\bar{x}\zeta + \frac{1}{2}k^2mx^2\bar{\zeta}] + \frac{1}{2}km^2\bar{x}\zeta^2 \\ & + km^2x\zeta\bar{\zeta} + \frac{1}{2}m^3\zeta^2\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$(14.4)\quad \begin{cases} P_0^0 = p_0^0 + \frac{1}{8} k^3, \; P_0^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} k^2 m, \; P_0^2 = p_0^2 + \frac{1}{4} k m^2 \\ P_1^0 = p_1^0 + \frac{1}{2} k m^2, \; P_1^1 = p_1^1 + \frac{1}{2} m^3, \end{cases}$$

so nehmen, da man offenbar die Koeffizienten p_0^0, p_1^0 und p_2^0 reell setzen kann, für $n = 2$ die Gleichungen (13. 4) und (13. 5) die Gestalt an:

$$(14.5)\quad \begin{aligned} \xi''' - l\eta''' &= \bar{p}_0^1 x^2 \bar{x} + 2 p_1^0 x \bar{x} \zeta + 2 \bar{p}_0^2 x^2 \bar{\zeta} \\ &+ [p_1^1 \bar{x} \zeta^2 + 2 \bar{p}_1^1 x \zeta \bar{\zeta}] + 4 p_2^0 \zeta^2 \bar{\zeta} \end{aligned}$$

$$(14.6)\quad \begin{aligned} -m\eta''' &= 4 P_0^0 x^2 \bar{x} + [2 P_0^1 x \bar{x} \zeta + \bar{P}_0^1 x^2 \bar{\zeta}] \\ &+ 2 P_0^2 \bar{x} \zeta^2 + 2 P_1^0 x \zeta \bar{\zeta} + P_1^1 \zeta^2 \bar{\zeta}. \end{aligned}$$

15. Aus diesen Gleichungen kann man auf einfachste Weise die Seidelsche Fehlertheorie ableiten. Dazu muß man alle Koeffizienten p_k^j ebenso wie x reell nehmen und bei variabler Lage der Blende die Größe $m\zeta$ durch die rechte Seite von (12. 5) ersetzen. Außerdem muß man, um die übliche Gestalt der Formeln zu erhalten, Polarkoordinaten einführen und

$$(15.1)\qquad z = r e^{i\vartheta}$$

nehmen.

Aus der Vergleichung der Koeffizienten von (14. 5) und (14. 6) entspringen wichtige Sätze. Aus der Bedingung $p_1^1 = 0$ folgt z. B. nach der Gleichung (14. 5), daß das Objektiv aplanatisch ist; aus der äquivalenten Relation $P_1^1 = \frac{1}{2} m^3$ entnimmt man durch eine elementare Rechnung, daß der Abbesche Sinussatz bestehen muß.

16. Die Glieder fünfter Ordnung. Wir schreiben zunächst $V_3^{(5)}$, $W_3^{(5)}$ auf solche Weise an, daß man die analogen Ausdrücke für die Glieder siebenter oder höherer Ordnung durch Betrachtung der vorhandenen Gesetzmäßigkeiten leicht bilden kann. Dabei setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise $p_k^j(3) = q_k^j$ und erhalten:

$$
(16.1)\quad \begin{cases} V_3^{(5)} = [q_1^0 + \bar{q}_1^0]\, x^2 \bar{x}^2 \zeta + [\quad * \quad + \bar{q}_0^1 x^3 \bar{x}^2] \\ \qquad + [2\, q_2^0 + 2\, \bar{q}_2^0]\, x \bar{x} \zeta^2 \zeta + [q_1^1\, x \bar{x}^2 \zeta^2 + 2\, \bar{q}_1^1\, x^2 \bar{x} \zeta \bar{\zeta}] + [\quad * \quad + 2\, \bar{q}_0^2 x^3 \bar{x} \zeta] \\ \qquad + [3\, q_3^0 + 3\, \bar{q}_3^0]\; \zeta^3 \zeta^2 + [2\, q_2^1\, \bar{x} \zeta^3 \zeta + 3\, \bar{q}_2^1\, x \zeta^2 \bar{\zeta}^2] + [q_1^2\, \bar{x}^2 \zeta^3 + 3\, \bar{q}_1^2\, x^2\, \zeta \zeta^2] + 3\, \bar{q}_0^3 x^3\, \bar{\zeta}^2 \end{cases}
$$

$$
(16.2)\quad \begin{cases} W_3^{(5)} = [3\, q_0^0 + 3\, \bar{q}_0^0]\, x^3 \bar{x}^2 + [3\, q_0^1 x^2 \bar{x}^2 \zeta + 2\, \bar{q}_0^1 x^3 \bar{x} \zeta] + [3\, q_0^2\, x \bar{x}^2 \zeta^2 + \bar{q}_0^2 x^3 \zeta^2] + 3 q_0^3\, \bar{x}^2 \zeta^3 \\ \qquad + [2\, q_1^0 + 2\, \bar{q}_1^0]\, x^2 \bar{x} \zeta \zeta + [2\, q_1^1\, x \bar{x} \zeta^2 \zeta + \bar{q}_1^1\, x^2 \zeta \bar{\zeta}^2] + 2\, q_1^2\, \bar{x} \zeta^3 \zeta \\ \qquad + [q_2^0 + \bar{q}_2^0]\, x \zeta^2 \zeta^2 + q_2^1\, \zeta^3 \zeta^2. \end{cases}
$$

Den Ausdruck $(W_3^{(5)} - y^{(5)})$ finden wir, indem wir auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Koeffizienten q_k^i durch andere Q_k^i ersetzen, welche folgendermaßen definiert sind:

$$
(16.3)\quad \begin{cases} Q_0^0 = q_0^0 - \frac{1}{16} k^5,\; Q_0^1 = q_0^1 - \frac{3}{8} k^4 m,\; Q_0^2 = q_0^2 - \frac{3}{8} k^3 m^2,\; Q_0^3 = q_0^3 - \frac{1}{8} k^2 m^3 \\ Q_1^0 = q_1^0 - \frac{9}{16} k^3 m^2,\; Q_1^1 = q_1^1 - \frac{9}{8} k^2 m^3,\; Q_1^2 = q_1^2 - \frac{3}{8} k m^4 \\ Q_2^0 = q_2^0 - \frac{9}{16} k m^4,\;\; Q_2^1 = q_2^1 - \frac{3}{8} m^5. \end{cases}
$$

17. Die Bestimmung von $V_2^{(5)}$ und $W_2^{(5)}$ erfordert einige Rechnungen. Zuerst erhält man V_2 und W_2, indem man z. B. in (14. 1) und (14. 3) das Symbol ζ durch η ersetzt. Daraus folgt dann unmittelbar:

$$V_2^{(5)} = 2\bar{p}_0^2 x^2 \bar{\eta}''' + 2 p_1^0 x \bar{x} \eta''' + 2 p_1^1 \bar{x} \zeta \eta''' + 2 \bar{p}_1^1 x (\zeta \bar{\eta}''' + \bar{\zeta} \eta''')$$
$$+ 4 p_2^0 (2 \zeta \bar{\zeta} \eta''' + \zeta^2 \bar{\eta}''')$$

$$W_2^{(5)} = 2 p_0^1 x \bar{x} \eta''' + \bar{p}_1^0 x^2 \bar{\eta}''' + 4 p_0^2 \bar{x} \zeta \eta''' + 2 p_1^0 x (\zeta \bar{\eta}''' + \bar{\zeta} \eta''')$$
$$+ p_1^1 (2 \zeta \bar{\zeta} \eta''' + \zeta^2 \bar{\eta}''')$$

Diese Gleichungen werden folgendermaßen umgeschrieben:

$$V_2^{(5)} = \eta''' (2 p_1^0 x \bar{x} + 2 p_1^1 \bar{x} \zeta + 2 \bar{p}_1^1 x \zeta + 8 p_2^0 \zeta \bar{\zeta})$$
$$+ \bar{\eta}''' (2 \bar{p}_2^0 x^2 + 2 \bar{p}_1^1 x \zeta + 4 p_2^0 \zeta^2) \tag{17. 1}$$

$$W_2^{(5)} = \eta''' (2 p_0^1 x \bar{x} + 4 p_0^2 \bar{x} \zeta + 2 p_1^0 x \zeta + 2 p_1^1 \zeta \bar{\zeta})$$
$$+ \bar{\eta}''' (\bar{p}_0^1 x^2 + 2 p_1^0 x \zeta + p_1^1 \zeta^2) \tag{17. 2}$$

Die letzteren Gleichungen multiplizieren wir mit $-m$ und setzen an Stelle von $-m\eta'''$ die rechte Seite von (14.6) und an Stelle von $-m\bar{\eta}'''$ den zu $-m\eta'''$ konjugiert komplexen Ausdruck. Man erhält schließlich die endgültigen Formeln:

(17. 3)

$$\begin{aligned}
-m V_2^{(5)} = {} & x^3 \bar{x}^2\, 8 (\bar{p}_0^2 + p_1^0) P_0^0 \\
& + x^2 \bar{x}^2 \zeta [2 (\bar{p}_0^2 + 2 p_1^0) P_0^1 + 8 (p_1^1 + \bar{p}_1^1) P_0^0] \\
& + x^3 \bar{x} \bar{\zeta} [2 (2 \bar{p}_0^2 + p_1^0) \bar{P}_0^1 + 8 \bar{p}_1^1 P_0^0] \\
& + x \bar{x}^2 \zeta^2 [4 p_1^0 P_0^2 + 16 p_2^0 P_0^0 + 2 (2 p_1^1 + \bar{p}_1^1) P_0^1] \\
& + x^2 \bar{x} \zeta \bar{\zeta} [4 (\bar{p}_0^2 + p_1^0) P_1^0 + 32 p_2^0 P_0^0 + 2 (p_1^1 \bar{P}_0^1 + 2 \bar{p}_1^1 (P_0^1 + \bar{P}_1^0))] \\
& + x^3 \bar{\zeta}^2 [4 \bar{p}_0^2 \bar{P}_0^2 + 2 \bar{p}_1^1 \bar{P}_0^1] \\
& + \bar{x}^2 \zeta^3 [4 p_2^0 P_0^1 + 4 p_1^1 P_0^2] \\
& + x^2 \zeta \bar{\zeta}^2 [2 \bar{p}_0^2 \bar{P}_1^1 + 8 p_2^0 \bar{P}_0^1 + 4 \bar{p}_1^1 (\bar{P}_0^2 + P_1^0)] \\
& + x \bar{x} \zeta^2 \bar{\zeta} [2 p_1^0 P_1^1 + 8 p_2^0 (2 P_0^1 + \bar{P}_0^1) + 4 \bar{p}_1^1 (P_0^2 + P_1^0) + 4 p_1^1 P_1^0] \\
& + \bar{x} \zeta^3 \bar{\zeta} [8 p_2^0 (2 P_0^2 + P_1^0) + 2 p_1^1 P_1^1] \\
& + x \zeta^2 \bar{\zeta}^2 [8 p_2^0 (\bar{P}_0^2 + 2 P_1^0) + 2 \bar{p}_1^1 (P_1^1 + \bar{P}_1^1)] \\
& + \zeta^3 \bar{\zeta}^2\, 4 p_2^0 (2 P_1^1 + \bar{P}_1^1)
\end{aligned}$$

(17. 4)

$$
\begin{aligned}
-m\,W_2^{(5)} = {} & x^3\bar{x}^2\,4\,(2\,p_0^1+\bar{p}_0^1)\,P_0^0 \\
& + x^2\bar{x}^2\zeta\,[(4\,p_0^1+\bar{p}_0^1)\,P_0^1+8\,(2\,p_2^0+p_1^0)\,P_0^0] \\
& + x^3\bar{x}\bar{\zeta}\,[2\,(p_0^1+\bar{p}_0^1)\,P_0^1+8\,p_1^0\,P_0^0] \\
& + x\bar{x}^2\zeta^2\,[4\,p_0^1\,P_0^2+2\,(4\,p_0^2+p_1^0)\,P_0^1+4\,p_1^1\,P_0^0] \\
& + x^3\bar{\zeta}^2\,[2\,\bar{p}_0^1\,\bar{P}_0^2+2\,p_1^0\,\bar{P}_0^1] \\
& + x^2\bar{x}\zeta\bar{\zeta}\,[2\,(2\,p_0^1+p_0^1)\,P_1^0+4\,p_0^2\,\bar{P}_0^1+4\,p_1^0\,(P_0^1+\bar{P}_0^1)+8\,p_1^1\,P_0^0] \\
& + \bar{x}^2\zeta^3\,[8\,p_0^2\,P_0^2+p_1^1\,P_0^1] \\
& + x\bar{x}\zeta^2\bar{\zeta}\,[2\,p_0^1\,P_1^1+8\,p_0^2\,P_1^0+4\,p_1^0\,(P_0^2+P_1^0)+2\,p_1^1\,(2\,P_0^1+\bar{P}_0^1)] \\
& + x^2\zeta\bar{\zeta}^2\,[\bar{p}_0^1\,\bar{P}_1^1+4\,p_1^0\,(P_1^0+\bar{P}_0^2)+2\,p_1^1\,P_0^1] \\
& + \bar{x}\zeta^3\bar{\zeta}\,[p_0^2\,P_1^1+2\,p_1^1\,(2\,P_2^0+P_1^0)] \\
& + x\zeta^2\bar{\zeta}^2\,[2\,p_1^0\,(P_1^1+\bar{P}_1^1)+2\,p_1^1\,(P_0^2+2\,P_1^0)] \\
& + \zeta^3\bar{\zeta}^2\,p_1^1\,(2\,P_1^1+\bar{P}_1^1).
\end{aligned}
$$

Aus den Formeln dieses und des vorigen Paragraphen werden jetzt die Größen $\xi^{(5)}-l\eta^{(5)}$ und $-m\eta^{(5)}$ sehr einfach berechnet.

18. Die Angaben des § 3 der Einleitung, welche die Fehler fünfter Ordnung betreffen, können jetzt sehr leicht verifiizert werden. Zu diesem Zweck schreibe man

$$
\begin{aligned}
\xi^{(5)}-l\eta^{(5)} = {} & \varkappa_0^1 u^5+2\,\varkappa_1^0 u^4\zeta+2\,\varkappa_0^2 u^4\bar{\zeta}+3\,\varkappa_0^3 u^3\bar{\zeta}^2+4\,\varkappa_2^0 u^2\zeta^2\bar{\zeta}+6\,\varkappa_3^0\zeta^3\bar{\zeta}^2 \\
& + \varkappa_1^1 u^3\zeta\,(\zeta+2\,\bar{\zeta})+\lambda_1^1 u^3\zeta\,(\zeta-2\,\bar{\zeta}) \\
& + \varkappa_1^2 u^2\zeta\,(\zeta^2+3\,\bar{\zeta}^2)+\lambda_1^2 u^2\zeta\,(\zeta^2-3\,\bar{\zeta}^2) \\
& + \varkappa_2^1 u\,\zeta^2\bar{\zeta}\,(2\,\zeta+3\,\bar{\zeta})+\lambda_2^1 u\,\zeta^2\bar{\zeta}\,(2\,\zeta-3\,\bar{\zeta});
\end{aligned}
$$

ferner berechne man die neun Koeffizienten $\varkappa_k^j$ sowie die drei Koeffizienten λ_k^j mit Hilfe von (16. 1) und (17. 3), in welchen man alle vorkommenden Zahlen p_k^j und q_k^j reell zu setzen hat und $x=\bar{x}=u$ nimmt. Dann sind alle Koeffizienten $\varkappa_k^j$ gleich der Summe des Koeffizienten q_k^j, welcher dieselben Indizes besitzt mit einem Ausdruck, der in den p_k^j, P_k^j bilinear ist. Dagegen hängen die λ_k^j nicht von den Größen q_k^j ab. Diese letzteren Glieder sind gerade diejenigen, welche die induzierten Fehler fünfter Ordnung verursachen, die zu den Hauptfehlern hinzukommen und nur von den Seidelschen Koeffizienten p_k^i abhängen.

Die Betrachtung der ausführlich entwickelten Formeln der §§ 16 und 17 gibt Anlaß zu vielen weiteren Bemerkungen, die aber den Rahmen dieser Arbeit überschreiten würden und die ich für eine andere Gelegenheit aufsparen muß.