

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft III

Oktober- bis Dezembersitzung

München 1917

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über nichtnegative trigonometrische Polynome.

Von Otto Szász.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 1. Dezember 1917.

Den Ausgangspunkt meiner Untersuchung bildet der folgende in einer Arbeit des Herrn Fejér¹⁾ enthaltene bemerkenswerte Satz:

A. Es sei

$$\tau(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \cdots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geq 0 \\ (0 \leq t < 2\pi)$$

ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n -ter Ordnung, dann gibt es eine ganze rationale Funktion höchstens n -ten Grades

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n,$$

so daß für jedes reelle t

$$|\gamma(z)|_{z=e^{ti}}^2 = \tau(t).$$

Schon Herr Fejér, sodann Herr F. Riesz, Herr Fekete und der Verfasser haben verschiedene Anwendungen dieses Satzes gegeben²⁾. Ich fand mit Hilfe dieses Satzes einen Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Polynomen, die keinen negativen Wert annehmen, und zwischen gewissen Hermite-schen Formen. Auf Grund dieses Zusammenhanges konnte ich

¹⁾ L. Fejér, Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 146 (1915), S. 53–82], S. 55–59. Wie Herr Fejér bemerkt, wurde der vollständige Beweis erst von Herrn F. Riesz erbracht.

²⁾ Man vgl. O. Szász, Über harmonische Funktionen und L -Formen. Erscheint in der „Mathematischen Zeitschrift“.

einige, teils neue, teils bekannte Sätze über trigonometrische Polynome und harmonische Funktionen beweisen. Späterhin ist es mir gelungen, einige dieser Sätze auf kürzerem Wege direkt aus Satz A) abzuleiten. Ich habe daher in meiner oben zitierten Arbeit den ursprünglichen Beweis dieser Sätze unterdrückt, um hier in einer besonderen Note — mich auf das allein Notwendige beschränkend — den einfacheren Beweis mitzuteilen. Die Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Es sei

$$1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geq 0 \quad (1) \\ (0 \leq t < 2\pi),$$

dann ist

$$1. \quad |\lambda_r - \mu_r i| \leq 1 \quad \left(r = \left[\frac{n}{2} \right] + 1, \left[\frac{n}{2} \right] + 2, \dots, n \right),$$

$$2. \quad \sum_1^n |\lambda_s - \mu_s i| \leq n,$$

$$3. \quad \sum_1^{\left[\frac{n}{2} \right]} |\lambda_{2r} - \mu_{2r} i| \leq \left[\frac{n}{2} \right],$$

$$4. \quad \sum_0^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} |\lambda_{2r+1} - \mu_{2r+1} i| \leq \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2} \right] + 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Fälle, in denen hier einmal Gleichheit gilt, werden im Laufe der Untersuchung genau bestimmt.

Hieraus folgen entsprechende Ungleichungen für die Koeffizienten trigonometrischer Polynome ohne konstantes Glied.

§ 1.

Es werde $\mu_0 = 0$ gesetzt; ferner sei

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_s - \mu_s i = c_s \quad (s = 0, 1, \dots, n),$$

dann ist offenbar

$$\tau(t) = \Re \sum_0^n c_s e^{st i},$$

und der Inhalt des Satzes A kann so ausgesprochen werden:
Unter der Voraussetzung

$$1 + \Re \sum_1^n c_s e^{st} \geq 0 \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

lassen die c_ν folgende Darstellung zu:

$$1 = \sum_0^n |\gamma_s|^2, \quad c_\nu = 2 \sum_0^{n-\nu} \gamma_{\nu+s} \bar{\gamma}_s \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Hieraus folgt¹⁾

$$\begin{aligned} |c_\nu| &\leq 2 \cdot \sum_0^{n-\nu} |\gamma_{\nu+s} \gamma_s| \leq |\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + \dots + |\gamma_{n-\nu}|^2 \\ &\quad + |\gamma_\nu|^2 + |\gamma_{\nu+1}|^2 + \dots + |\gamma_n|^2; \end{aligned} \quad (3)$$

es ist also jedenfalls

$$|c_\nu| < 2 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Ist nun $n - \nu < \nu$, also $\nu > \left[\frac{n}{2}\right]$, so ist sogar

$$|c_\nu| \leq 1 \quad \left(\nu > \left[\frac{n}{2}\right] \right). \quad (4)$$

In (4) gilt offenbar dann und nur dann Gleichheit, wenn in (3) Gleichheit gilt, also wenn:

- 1) $\left| \sum_0^{n-\nu} \gamma_{\nu+s} \bar{\gamma}_s \right| = \sum_0^{n-\nu} |\gamma_{\nu+s} \gamma_s|$,
- 2) $|\gamma_s| = |\gamma_{\nu+s}| \quad (s = 0, 1, \dots, n - \nu)$,

und wenn

$$3) |\gamma_0|^2 + |\gamma_1|^2 + \dots + |\gamma_{n-\nu}|^2 = \frac{1}{2}.$$

Ich setze

$$\gamma_s = \varrho_s e^{i\vartheta_s} \quad (s = 0, 1, \dots, n), \quad (5)$$

ferner kann ich ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\vartheta_0 = 0$, also $\gamma_0 = \varrho_0 \geq 0$ ist. Die Bedingungen 1) — 3) gehen jetzt in die folgenden über:

¹⁾ Mit Hilfe der einfachen Ungleichung: $2ab \leq a^2 + b^2 \quad (a \geq 0, b \geq 0)$.

$$1') \vartheta_{r+s} - \vartheta_s \equiv \vartheta_r \pmod{2\pi} \quad (s = 1, 2, \dots, n-r),$$

$$2') \varrho_{r+s} = \varrho_s \quad (s = 0, 1, \dots, n-r),$$

$$3') \varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \dots + \varrho_{n-r}^2 = \frac{1}{2}.$$

Wählt man also $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$ und $\vartheta_r = \vartheta$ beliebig aber so, daß 3) erfüllt ist, so sind durch 1) und 2) $\gamma_r, \dots, \gamma_n$ eindeutig bestimmt, und zwar ist

$$\gamma_{r+s} = \gamma_s e^{\vartheta i} \quad (s = 0, 1, \dots, n-r).$$

Man erhält also

$$\sum_0^n \gamma_s z^s = \sum_0^{n-r} \gamma_s z^s + e^{\vartheta i} \sum_0^{n-r} \gamma_s z^{r+s} = \left(\sum_0^{n-r} \gamma_s z^s \right) (1 + e^{\vartheta i} z^r),$$

und hieraus

$$\left| \sum_0^n \gamma_s z^s \right|_{z=e^{it}}^2 = 2 \left| \sum_0^{n-r} \gamma_s z^s \right|_{z=e^{it}}^2 [1 + \cos(r t + \vartheta)].$$

Der erste Faktor ist offenbar ein beliebiges nichtnegatives trigonometrisches Polynom $n-r$ -ter Ordnung mit dem konstanten Gliede 1; es ist klar, daß jetzt $c_r = e^{\vartheta i}$ ist. Es gilt also der

Satz I. Ist

$$\tau(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geq 0$$

$$(0 \leq t < 2\pi), \quad (1)$$

so ist

$$|\lambda_r - \mu_r i| \leq 1 \quad \left(r > \left[\frac{n}{2} \right] \right), \quad (6)$$

und Gleichheit gilt nur, falls $\tau(t)$ die Form hat

$$\tau(t) = [1 + \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t + \dots + \alpha_{n-r} \cos(n-r)t + \beta_{n-r} \sin(n-r)t] [1 + \cos(r t + \vartheta)],$$

wo der erste Faktor ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom und ϑ beliebig ist¹⁾.

¹⁾ Für reine Kosinuspolynome vgl. Fejér, a. a. O., § 4.

§ 2.

Aus (2) folgt

$$\sum_0^n |c_s| \leq \sum_0^n |\gamma_s|^2 + 2 \sum_1^n \sum_0^{n-r} |\gamma_{r+s} \gamma_s| = \left(\sum_0^n |\gamma_s| \right)^2,$$

und hieraus

$$\sum_0^n |c_s| \leq n + 1.$$

Benutzt man wieder die Bezeichnung (5), so sind offenbar für Gleichheit folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$1) \vartheta_{r+s} - \vartheta_s \equiv \vartheta_r \pmod{2\pi} \quad (s = 1, 2, \dots, n-r; \\ r = 1, 2, \dots, n),$$

$$2) |\gamma_0| = |\gamma_1| = \dots = |\gamma_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Aus 1) folgt für $s = 1$

$$\vartheta_{r+1} \equiv \vartheta_r + \vartheta_1 \pmod{2\pi} \quad (r = 1, 2, \dots, n);$$

schreibt man ϑ statt ϑ_1 , so ergibt sich

$$\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{s\vartheta i} \quad (s = 0, 1, \dots, n),$$

und die Bedingungen 1) und 2) sind jetzt erfüllt. Nun ist bekanntlich

$$\left| \sum_0^n e^{s(\vartheta+t)i} \right|^2 = n+1 + 2n \cos(\vartheta+t) + \dots + 2 \cos n(\vartheta+t),$$

und wir erhalten den

Satz II. Ist

$$\tau(t) = 1 + \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t + \dots + \lambda_n \cos nt + \mu_n \sin nt \geq 0 \\ (0 \leq t < 2\pi), \quad (1)$$

so ist

$$\sum_1^n |\lambda_s - \mu_s i| \leq n \quad (7)$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\begin{aligned}\tau(t) &= 1 + \frac{2n}{n+1} \cos(\vartheta + t) + \cdots + \frac{2 \cdot 1}{n+1} \cos n(\vartheta + t) \\ &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2}(\vartheta + t)}{\sin \frac{\vartheta + t}{2}} \right]^2,\end{aligned}\quad (8)$$

wo ϑ beliebig ist.

Hierin ist ein Satz des Herrn Fejér enthalten¹⁾, wonach $\tau(\vartheta) \leq n+1$ ist, und Gleichheit nur im Falle (8) gilt.

Aus (7) folgt insbesondere

$$\left| 1 + \sum_1^n c_s z^s \right| \leq n+1 \quad \text{für } |z| \leq 1.$$

Es sei jetzt

$$\tau(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom höchstens n -ter Ordnung, dessen konstantes Glied gleich Null ist. Es sei M sein Maximum und $-m$ sein Minimum; M und m sind positive Zahlen und geben die höchste „Steigung“ bzw. die tiefste „Senkung“ von $\tau(t)$ an.

Offenbar genügt das trigonometrische Polynom

$$\frac{\tau(t) + m}{m} = 1 + \frac{a_1}{m} \cos t + \cdots + \frac{b_n}{m} \sin nt$$

der Bedingung (1); also ist nach Satz II

$$\sum_1^n |a_s - b_s i| \leq n \cdot m,$$

und Gleichheit gilt nur für

$$a_s - b_s i = 2m \frac{n-s+1}{n+1} e^{s\vartheta i} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

¹⁾ Fejér, a) a. a. O. S. 307, 1), § 3. — b) Sur les polynomes harmoniques quelconques [Comptes rendus de l'académie des sciences, Paris t. 157 (1913, II), p. 506–509]. — c) Sur les polynomes trigonometriques [Ibidem, t. 157, p. 571–574].

Ebenso führt die Betrachtung des trigonometrischen Polynoms $\frac{M - \tau(t)}{M}$ zu der Ungleichung

$$\sum_1^n |a_s - b_s i| \leq n M,$$

und Gleichheit gilt nur für

$$a_s - b_s i = -2 M \frac{n-s+1}{n+1} e^{s\vartheta i} \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Es gilt also der

Satz III. Bezeichnen M und $-m$ das Maximum und Minimum eines beliebigen trigonometrischen Polynoms, dessen konstantes Glied gleich Null ist:

$$\tau(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

so ist

$$\frac{1}{n} \sum_1^n |a_s - b_s i| \leq m, \quad \frac{1}{n} \sum_1^n |a_s - b_s i| \leq M,$$

und das Gleichheitszeichen ist in einer dieser Ungleichungen nur für

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{2m}{n+1} \sum_1^n (n-s+1) \cos s(\vartheta+t) \\ &= \frac{m}{n+1} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2}(\vartheta+t)}{\sin \frac{\vartheta+t}{2}} \right]^2 - m \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} T_2(t) &= \frac{-2M}{n+1} \sum_1^n (n-s+1) \cos s(\vartheta+t) \\ &= -\frac{M}{n+1} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2}(\vartheta+t)}{\sin \frac{\vartheta+t}{2}} \right]^2 + M \end{aligned}$$

gültig.

Auch dieser Satz ist die Verallgemeinerung eines Fejér-schen Resultates¹⁾.

Man beachte, daß das trigonometrische Polynom (9) auch in der Form geschrieben werden kann:

$$T(t) = \sum_1^n |a_s - b_s i| \cos(st - t_s),$$

wo

$$\cos t_s = \frac{a_s}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}}, \quad \sin t_s = \frac{b_s}{\sqrt{a_s^2 + b_s^2}}.$$

$|a_s - b_s i| = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$ ist die Amplitude des Gliedes $|a_s - b_s i| \cos(st - t_s)$ oder auch des Binoms $a_s \cos st + b_s \sin st$ und wir können den Inhalt von Satz III auch so formulieren:

Die höchste Steigung und die tiefste Senkung des trigonometrischen Polynoms $\sum_1^n (a_s \cos st + b_s \sin st)$ ist mindestens so groß, wie das arithmetische Mittel der Amplituden der einzelnen Glieder.

Auf ähnlichem Wege findet man aus Ungl. (6) für $T(t)$ die Beziehungen:

$$\frac{1}{m} |a_r - b_r i| \leq 1, \quad \frac{1}{M} |a_r - b_r i| \leq 1 \quad \text{für } r > \left[\frac{n}{2} \right].$$

Also ist

$$|a_r - b_r i| \leq m, M \quad \left(r = \left[\frac{n}{2} \right] + 1, \dots, n \right),$$

und die Fälle, in denen Gleichheit gilt, lassen sich leicht bestimmen.

§ 3.

Aus (2) folgt

$$1 + \sum_1^{\left[\frac{n}{2} \right]} |c_{2\nu}| \leq \sum_0^n |\gamma_s|^2 + 2 \sum_1^{\left[\frac{n}{2} \right]} \sum_0^{n-2\nu} |\gamma_{2\nu+s} \gamma_s|. \quad (10)$$

¹⁾ Fejér, a. a. O. S. 312, 1 c) und S. 307, 1), hier ist für Kosinuspolynome mit positiven Koeffizienten auch schon das arithmetische Mittel der Koeffizienten als untere Schranke für m angegeben.

Es sei zunächst n ungerade: $n = 2\kappa + 1$; dann folgt aus (10)

$$\begin{aligned} 1 + \sum_1^{\kappa} |c_{2\nu}| &\leq \left(\sum_0^{\kappa} |\gamma_{2s}| \right)^2 + \left(\sum_0^{\kappa} |\gamma_{2s+1}| \right)^2 \\ &\leq (\kappa + 1) \sum_0^{\kappa} |\gamma_{2s}|^2 + (\kappa + 1) \sum_0^{\kappa} |\gamma_{2s+1}|^2 \leq \kappa + 1. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn

- 1) $|\gamma_0| = |\gamma_2| = \dots = |\gamma_{2\kappa}|$,
- 2) $|\gamma_1| = |\gamma_3| = \dots = |\gamma_{2\kappa+1}|$,
- 3) $\vartheta_{2\nu+s} - \vartheta_s \equiv \vartheta_{2\nu} \pmod{2\pi}$ ($s = 0, \dots, n - 2\nu$,
 $\nu = 1, \dots, \kappa$).

Hier ist $\gamma_s = \varrho_s e^{\vartheta_s i}$; sei nun 1) und 2) entsprechend

$$\gamma_{2s} = \xi e^{\vartheta_{2s} i}, \quad \gamma_{2s+1} = \eta e^{\vartheta_{2s+1} i} \quad (s = 0, 1, \dots, \kappa),$$

ferner gemäß 3)

$$\text{also} \quad \vartheta_{s+2} = \vartheta_s + \vartheta_2 \quad (s = 0, 1, \dots, n - 2),$$

$$\vartheta_4 = 2\vartheta_2, \quad \vartheta_6 = 3\vartheta_2, \quad \dots, \quad \vartheta_{2\kappa} = \kappa\vartheta_2,$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad \vartheta_5 = \vartheta_1 + 2\vartheta_2, \quad \dots, \quad \vartheta_{2\kappa+1} = \vartheta_1 + \kappa\vartheta_2,$$

dann sind die Bedingungen 1)–3) auch sämtlich befriedigt, und man erhält

$$\begin{aligned} \sum_0^{2\kappa+1} \gamma_s z^s &= \xi \sum_0^{\kappa} e^{s\vartheta_2 i} z^{2s} + \eta \sum_0^{\kappa} e^{\vartheta_1 + s\vartheta_2 i} z^{2s+1} \\ &= \left(\sum_0^{\kappa} e^{s\vartheta_2 i} z^{2s} \right) (\xi + \eta e^{\vartheta_1 i} z), \end{aligned} \quad (11)$$

wobei $(\xi^2 + \eta^2) = c_0 = 1$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_0^{2\kappa+1} \gamma_s z^s \right|^2 &= \left| \sum_0^{\kappa} e^{s\vartheta_2 i} z^{2s} \right|_{z=e^{ti}}^2 \left| \xi + \eta e^{\vartheta_1 i} z \right|_{z=e^{ti}}^2 \\ &= (\kappa + 1 + 2\kappa \cos(\vartheta_2 + 2t) + \dots + 2 \cdot \cos \kappa(\vartheta_2 + 2t)) \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\kappa + 1} + 2\xi\eta \cos(\vartheta_1 + t) \right]. \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\xi \sqrt{\varkappa + 1} = \cos \frac{\delta}{2}, \quad \eta \sqrt{\varkappa + 1} = \sin \frac{\delta}{2}, \quad \vartheta_2 = 2\vartheta,$$

so wird schließlich

$$\left| \sum_0^{2\varkappa+1} \gamma_s \mathcal{L}^s \right|_{z=e^{it}}^2 = \frac{1}{\varkappa+1} \left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)} \right]^2 \quad (12)$$

$$[1 + \sin \delta \cdot \cos(\vartheta_1 + t)].$$

Sei nun n gerade also $n = 2\varkappa$, und

$$\Re \sum_0^{2\varkappa} c_s e^{sti} \geq 0, \quad 0 \leq t < 2\pi;$$

setzt man

$$c_{2\varkappa+1} = 0,$$

so ist $\Re \sum_0^{2\varkappa+1} c_s e^{sti} \geq 0$, und nach unserem obigen Resultat

$$\sum_0^{\varkappa} |c_{2\nu}| \leq \varkappa + 1,$$

und damit Gleichheit gilt, muß unser trigonometrisches Polynom von der Form (12) und $c_{2\varkappa+1} = \gamma_{2\varkappa+1} \bar{\gamma}_0 = 0$ sein. Also muß nach (11) $\eta = 0$ sein, und man erhält

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1} \left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)} \right]^2.$$

Zusammenfassend lautet unser Resultat:

Satz IV. Unter der Voraussetzung $1 + \sum_1^n (\lambda_\nu \cos \nu t - \mu_\nu \sin \nu t) \geq 0$ für jedes t ist

$$\sum_1^{\left[\frac{n}{2}\right]} |\lambda_{2\nu} - \mu_{2\nu} i| \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1} \left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)} \right]^2 [1 + \sin \delta \cdot \cos(\vartheta_1 + t)] \quad (n = 2\varkappa+1)$$

$$\text{bzw.} \quad \tau(t) = \frac{1}{\varkappa+1} \left[\frac{\sin(\varkappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)} \right]^2 \quad (n = 2\varkappa),$$

hier sind $\vartheta, \vartheta_1, \delta$ beliebige Zahlen.

§ 4.

Aus (2) folgt unmittelbar

$$\left[\frac{n-1}{2} \right] c_{2\nu+1} \leq 2 \sum_0^{\left[\frac{n-1}{2} \right] n-2\nu-1} \sum_0^s |\gamma_{2\nu+s+1} \gamma_s|;$$

setzt man zur Abkürzung

$$\left[\frac{n-1}{2} \right] = \kappa_1, \quad \left[\frac{n}{2} \right] = \kappa_2,$$

so erhält man hieraus

$$\begin{aligned} \sum_0^{\kappa_1} |c_{2\nu+1}| &\leq 2 (|\gamma_0| + |\gamma_2| + \dots + |\gamma_{2\kappa_2}|) \\ &\quad (|\gamma_1| + |\gamma_3| + \dots + |\gamma_{2\kappa_1+1}|) \\ &\leq 2 \sqrt{(\kappa_1 + 1)(\kappa_2 + 1)} \left(\sum_0^{\kappa_2} |\gamma_{2s}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_0^{\kappa_1} |\gamma_{2s+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{(\kappa_2 + 1)(\kappa_1 + 1)}. \end{aligned}$$

Zur Gleichheit sind offenbar folgende Bedingungen notwendig und auch hinreichend ($\gamma_s = \varrho_s e^{i\theta_s}$ gesetzt):

- 1) $\vartheta_{2\nu+s+1} - \vartheta_s \equiv \vartheta_{2\nu+1} \pmod{2\pi}$ ($s = 0, \dots, n - 2\nu - 1, \nu = 0, \dots, \kappa_1$),
- 2) $|\gamma_0| = |\gamma_2| = \dots = |\gamma_{2\kappa_2}|,$
- 3) $|\gamma_1| = |\gamma_3| = \dots = |\gamma_{2\kappa_1+1}|,$
- 4) $\sum_0^{\kappa_2} |\gamma_{2s}|^2 = \sum_0^{\kappa_1} |\gamma_{2s+1}|^2.$

Aus 1) folgt für $\nu = 0$:

$$\vartheta_{s+1} = \vartheta_s + \vartheta_1 \quad (s = 0, 1, \dots, n-1),$$

also

$$\vartheta_2 = 2\vartheta_1, \quad \vartheta_3 = 3\vartheta_1, \quad \dots, \quad \vartheta_n = n\vartheta_1;$$

und die so bestimmten ϑ_s befriedigen die Bedingung 1).

Sei nun 2) und 3) entsprechend

$$\begin{aligned} \varrho_{2s} &= \xi \quad (s = 0, 1, \dots, \kappa_2) \\ \varrho_{2s+1} &= \eta \quad (s = 0, 1, \dots, \kappa_1); \end{aligned}$$

schließlich sei

$$(\kappa_2 + 1) \xi^2 = (\kappa_1 + 1) \eta^2,$$

dann sind die Bedingungen 1)–4) sämtlich erfüllt. — Es muß auch

$$(\kappa_2 + 1) \xi^2 + (\kappa_1 + 1) \eta^2 = c_0 = 1$$

sein. Man setze daher

$$\xi \sqrt{\kappa_2 + 1} = \cos \frac{\delta}{2}, \quad \eta \sqrt{\kappa_1 + 1} = \sin \frac{\delta}{2};$$

jetzt wird, wenn man statt ϑ_1 einfach ϑ schreibt

$$\sum_0^n \gamma_s z^s = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\kappa_2 + 1}} \sum_0^{\kappa_2} e^{2s\vartheta i} z^{2s} + \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\kappa_1 + 1}} \sum_0^{\kappa_1} e^{(2s+1)\vartheta i} z^{2s+1}.$$

Ist n ungerade $n = 2\kappa + 1$, so ist offenbar

$$\kappa_1 = \kappa, \quad \kappa_2 = \kappa,$$

und man erhält

$$\sum_0^{2\kappa+1} \gamma_s z^s = \left(\frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\kappa + 1}} + \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{\kappa + 1}} e^{\vartheta i} z \right) \left(\sum_0^{\kappa} e^{2s\vartheta i} z^{2s} \right);$$

hieraus folgt

$$\left| \sum_0^{2\kappa+1} \gamma_s z^s \right|_{z=e^{ti}}^2 = \frac{1}{\kappa + 1} \left[\frac{\sin(\kappa + 1)(\vartheta + t)}{\sin(\vartheta + t)} \right]^2 [1 + \sin \delta \cdot \cos(\vartheta + t)].$$

Ist n gerade $n = 2\kappa$, so wird

$$\kappa_1 = \kappa - 1, \quad \kappa_2 = \kappa,$$

und aus (2)

$$c_{2\nu+1} = \frac{(\kappa - \nu) \sin \delta}{\sqrt{\kappa(\kappa + 1)}} e^{(2\nu+1)\vartheta i} (\nu = 0, 1, \dots, \kappa - 1)$$

$$c_{2\nu} = 2\xi^2(\kappa - \nu + 1) \cdot e^{2\nu\vartheta i} + 2\eta^2(\kappa - \nu) e^{2\nu\vartheta i}$$

$$= 2e^{2\nu\vartheta i} \left[(\kappa - \nu + 1) \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\kappa + 1} + \frac{\kappa - \nu}{\kappa} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right],$$

also

$$\Re \sum_0^{2\kappa} c_\nu e^{\nu t i} = 1 + \frac{\sin \delta}{V_{\kappa}(\kappa+1)} \sum_0^{\kappa-1} (\kappa - \nu) \cos(2\nu+1)(\vartheta+t) \\
+ 2 \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\kappa+1} \sum_1^{\kappa} (\kappa - \nu + 1) \cos 2\nu(\vartheta+t) \\
+ 2 \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{\kappa} \sum_1^{\kappa} \nu (\kappa - \nu) \cos 2\nu(\vartheta+t);$$

wir können somit den Satz aussprechen:

Satz V. Unter der Voraussetzung $1 + \sum_1^n (\lambda_\nu \cos \nu t + \mu \sin \nu t) \geq 0$ für jedes t ist

$$\left[\frac{n-1}{2} \right] \sum_0^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} |\lambda_{2\nu+1} - \mu_{2\nu+1} i| \leq \left(\left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2} \right] + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
\leq \begin{cases} \kappa+1 & \text{für } n = 2\kappa+1 \\ V_{\kappa}(\kappa+1) & \text{für } n = 2\kappa, \end{cases}$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = \frac{1}{\kappa+1} \left[\frac{\sin(\kappa+1)(\vartheta+t)}{\sin(\vartheta+t)} \right]^2 [1 + \sin \delta \cdot \cos(\vartheta+t)] \\
(n = 2\kappa+1)$$

bzw.

$$\tau(t) = 1 + \frac{\sin \delta}{V_{\kappa}(\kappa+1)} \sum_0^{\kappa-1} (\kappa - \nu) \cos(2\nu+1)(\vartheta+t) \\
+ 2 \frac{\cos^2 \frac{\delta}{2}}{\kappa+1} \sum_1^{\kappa} (\kappa - \nu + 1) \cos 2\nu(\vartheta+t) \\
+ 2 \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{\kappa} \sum_1^{\kappa} \nu (\kappa - \nu) \cos 2\nu(\vartheta+t).$$

Hier sind ϑ und δ beliebig.

In ähnlicher Weise wie die Sätze I und II lassen sich auch die Sätze IV und V auf trigonometrische Polynome ohne konstantes Glied übertragen.

Der Satz V gestattet folgende Erweiterung:

Es seien α, β zwei positive Zahlen

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

dann ist offenbar

$$\alpha \sum_0^{\left[\frac{n}{2}\right]} |c_{2\nu}| + \beta \sum_0^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} |c_{2\nu+1}| \leq \alpha \left[\frac{n}{2}\right] + \beta \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)^{\frac{1}{2}},$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa + 1} \left[\frac{\sin(\varkappa + 1)(\vartheta + t)}{\sin(\vartheta + t)} \right]^2 [1 + \sin \delta \cdot \cos(\vartheta + t)]$$

$$(n = 2\varkappa + 1)$$

bzw.

$$\tau(t) = \frac{1}{\varkappa + 1} \left[\frac{\sin(\varkappa + 1)(\vartheta + t)}{\sin(\vartheta + t)} \right]^2 \quad (n = 2\varkappa).$$

Es ist bemerkenswert, daß die extremen Fälle in den Sätzen II—V mit den arithmetischen Mitteln erster Ordnung der Partialsummen der Reihe

$$1 + 2 \cos \vartheta + 2 \cos 2 \vartheta + \dots$$

zusammenhängen, also mit

$$1 + \frac{2\nu}{\nu + 1} \cos \vartheta + \frac{2(\nu - 1)}{\nu + 1} \cos 2 \vartheta + \dots + \frac{2 \cdot 1}{\nu + 1} \cos \nu \vartheta$$

$$= \frac{1}{\nu + 1} \left[\frac{\sin(\nu + 1) \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \right]^2.$$