

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1917

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über die Konvergenz periodischer und gewisser nicht-periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Juni 1917.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern sind zuerst von Stolz¹⁾, sodann mit einigen Vervollständigungen und auf einfachere Weise von mir selbst²⁾, späterhin nach einer dritten Methode auch von Herrn Perron³⁾ abgeleitet worden. Während die Endergebnisse dieser verschiedenen Bearbeitungen, abgesehen von unerheblichen formalen Abweichungen, im wesentlichen übereinstimmen, ist vor einigen Jahren Herr von Pidoll⁴⁾ auf einem anderen recht sinnreichen, aber etwas umständlichen Wege zu Bedingungsformen gelangt, welche mir als eine bemerkenswerte Verbesserung der bisher gefundenen erscheinen, da sie nicht, wie jene, von den (im allgemeinen) irrationalen Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung abhängen, sondern lediglich rationale und zugleich (durch ihre Eigenschaft als Näherungszähler und -Nenner von Teilkettenbrüchen des gegebenen) einfach zu charakterisierende Verbindungen der Kettenbruchglieder in Anspruch nehmen und überdies die in dem vorliegenden Zusammenhange bisher nicht ausdrücklich beachteten zwei Möglichkeiten der unbedingten und bedingten Konvergenz unmittelbar zum Ausdruck bringen.

¹⁾ Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. 2 (1886), S. 299.

²⁾ Dieser Berichte, Bd. 30 (1900), S. 463.

³⁾ Dieser Berichte, Bd. 35 (1906), S. 465.

⁴⁾ Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Inaugural-Dissertation, München 1912.

Wegen dieser Vorzüge schien mir eine einfachere und durchsichtigere Herleitung dieser Bedingungen wünschenswert, die, im wesentlichen auf der schon früher von mir benützten, inzwischen jedoch noch erheblich vereinfachten Methode beruhend, zugleich eine vollkommene Einsicht in den inneren Zusammenhang der verschiedenen Bedingungsformen gewährt. Die Durchführung dieser Absicht bildet den Inhalt des ersten Paragraphen der folgenden Mitteilung.

In einem zweiten Paragraphen behandle ich ein von Herrn van Vleck¹⁾ herrührendes, jedoch von ihm nicht vollständig bewiesenes Konvergenz-Kriterium, das sich auf Kettenbrüche mit lauter Teilzählern 1 und komplexen Teilnennern bezieht²⁾. Der fragliche Beweis ist zwar inzwischen in verbesserter Form erschienen, nämlich in der Neu-Ausgabe der Stolz'schen Vorlesungen über allgemeine Arithmetik³⁾. Doch geschieht diese Verbesserung zum Teil auf Kosten der Allgemeinheit des betreffenden Satzes, nämlich durch Hinzufügung gewisser ergänzender Voraussetzungen⁴⁾, die lediglich dazu dienen, das von Herrn van Vleck angewendete Beweisverfahren, das auf Heranziehung eines nach Art einer Majorante wirkenden Hilfskettenbruches beruht, zu retten, dagegen für die Gültigkeit des Satzes selbst nicht erforderlich sind. Das letztere gilt auch von etwas einfacheren Ergänzungs-Bedingungen, die Herr Jensen⁵⁾ an Stelle der bei Stolz-Gmeiner benützten angegeben hat.

¹⁾ Transact. Amer. Math. Soc. 2 (1901).

²⁾ A. a. O. S. 222 als Theorem 3 bezeichnet. Es handelt sich hier nicht um das bekanntere, gewöhnlich schlechthin als van Vlecksches oder auch als van Vleck-Jensensches bezeichnete Kriterium (a. a. O. S. 229, Theorem 6), dessen Beweis von Herrn Jensen (Festschrift til H. G. Zeuthen, 1909) vervollständigt und wesentlich vereinfacht wurde und das auch, im Gegensatz zu dem hier in Frage stehenden, in das Lehrbuch des Herrn Perron (Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1913, S. 264) übergegangen ist.

³⁾ O. Stolz und A. Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Abt. II, 1905, S. 546.

⁴⁾ Es sind das die a. a. O. mit 3a) und 3b) bezeichneten.

⁵⁾ A. a. O. (s. Fußn. 2), S. 84.

§ 1. Unbedingte und bedingte Konvergenz rein periodischer Kettenbrüche.

1. Der unendliche Kettenbruch:

$$(1) \quad \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty \equiv \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_r}{b_r} + \dots$$

sei rein periodisch mit der p gliedrigen Periode: $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p}$,
so daß also:

$$(2a) \quad \frac{a_{p+r}}{b_{p+r}} \equiv \frac{a_r}{b_r} \quad \text{für: } r = 1, 2, 3, \dots$$

anders geschrieben:

$$(2b) \quad \frac{a_{\lambda+\mu p}}{b_{\lambda+\mu p}} \equiv \frac{a_\lambda}{b_\lambda} \quad \text{für: } \begin{cases} \lambda = 1, 2, \dots, p \\ \mu = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

und möge nach Bedarf durch das Symbol:

$$\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p} \right]$$

bezeichnet werden. Die a_r, b_r können beliebige komplexe Zahlen sein, doch sollen die a_r als durchweg von Null verschieden angenommen werden.

Ist der Kettenbruch überhaupt konvergent und wird sein Wert mit x bezeichnet, so hat man in bekannter Weise:

$$x = \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_p}{b_p} + \frac{x}{1}$$

also, wenn die Näherungsbrüche des Kettenbruches mit $\frac{A_r}{B_r}$ ($r = 1, 2, 3, \dots$) bezeichnet werden:

$$x = \frac{A_p + x A_{p-1}}{B_p + x B_{p-1}},$$

so daß der Wert x des Kettenbruches jedenfalls eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$(I) \quad B_{p-1} x^2 - (A_{p-1} - B_p) x - A_p = 0$$

sein muß. Dabei ist diese Gleichung, falls der Kettenbruch überhaupt konvergiert, allemal wirklich eine quadratische, d. h. es ist stets: $|B_{p-1}| > 0$. Man hat nämlich für jedes $q \geq 1$ und $\mu \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^{\mu p + q} &\equiv \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{\mu p}}{b_{\mu p}} + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_q}{b_q} \\ &= \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{\mu p}}{b_{\mu p}} + \frac{A_q}{B_q} \end{aligned}$$

und daher:

$$(3) \quad \begin{cases} A_{\mu p + q} = B_q A_{\mu p} + A_q A_{\mu p - 1} \\ B_{\mu p + q} = B_q B_{\mu p} + A_q B_{\mu p - 1}. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Formeln folgt für $q = p - 1$

$$(4) \quad B_{(\mu+1)p-1} = B_{p-1} B_{\mu p} + A_{p-1} B_{\mu p-1}$$

und hieraus speziell für $\mu = 1$:

$$B_{2p-1} = B_{p-1}(B_p + A_{p-1}).$$

Ist also: $B_{p-1} = 0$, so hat man auch: $B_{2p-1} = 0$, folglich mit Benützung von (4) durch vollständige Induktion für jedes μ : $B_{\mu p-1} = 0$. Hiernach besitzt aber im Falle $B_{p-1} = 0$ der Kettenbruch unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche und ist also divergent. Mithin ergibt sich:

Die Bedingung:

$$(A) \quad |B_{p-1}| > 0$$

ist eine *notwendige* für die Konvergenz des Kettenbruches (1).

Aus dieser Erkenntnis resultiert aber sofort eine ganze Folge von notwendigen Bedingungen für etwaige unbedingte Konvergenz des Kettenbruches. Soll nämlich der Kettenbruch (1) unbedingt konvergieren, so muß ja auch jeder der (gleichfalls rein periodischen) Kettenbrüche:

$$\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{\lambda+1}^{\infty} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

konvergieren. Dabei genügt es offenbar wegen der vor-

handenen Periodizität, λ auf die Werte $1, 2, \dots (p-1)$ zu beschränken.

Bezeichnet man nun die reduzierte Form (d. h. den letzten rein formal in bekannter Weise gebildeten Näherungsbruch) des Kettenbruches:

$$\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{\lambda+1}^{\infty} \quad \text{mit: } \frac{A_{\lambda, \lambda+e}}{B_{\lambda, \lambda+e}},$$

(so daß also, wenn man auch den Fall $\lambda = 0$ in diese Bezeichnungsweise einbezieht, $A_{0, \lambda+e} \equiv A_{\lambda+e}$, $B_{0, \lambda+e} \equiv B_{\lambda+e}$) so ergibt sich aus (A) als notwendige Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{\lambda+1}^{\infty}$ die Beziehung:

$$|B_{\lambda, \lambda+p-1}| > 0.$$

Diese muß dann, wenn der Kettenbruch (1) unbedingt konvergieren soll, außer der Bedingung (A) für $\lambda = 1, 2, \dots (p-1)$ erfüllt sein. Schreibt man noch $\lambda+1$ statt λ , so findet man (mit Benützung von Formel (a) der Fußnote):

Für die *unbedingte* Konvergenz des Kettenbruches (1) ist *notwendig*, daß zu der Bedingung (A) noch die folgenden hinzutreten:

$$(B) \quad \begin{cases} |B_{\lambda+1, \lambda+p}| > 0, \text{ anders geschrieben:} \\ |A_{\lambda, \lambda+p}| > 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots (p-2)). \end{cases}$$

¹⁾ Aus dieser Definition ergeben sich bei ganz beliebigen a_r, b_r die Beziehungen:

$$(a) \quad A_{\lambda, \lambda+e} = a_{\lambda+1} B_{\lambda+1, \lambda+e}$$

$$(b) \quad \begin{cases} A_{\lambda+e} = A_{\lambda} B_{\lambda, \lambda+e} + A_{\lambda-1} A_{\lambda, \lambda+e} \\ B_{\lambda+e} = B_{\lambda} B_{\lambda, \lambda+e} + B_{\lambda-1} A_{\lambda, \lambda+e} \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} A_{\lambda} B_{\lambda+e} - A_{\lambda+e} B_{\lambda} &= (A_{\lambda} B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_{\lambda}) A_{\lambda, \lambda+e} \\ &= (-1)^{\lambda-1} \cdot a_1 \dots a_{\lambda} \cdot A_{\lambda, \lambda+e}. \end{aligned}$$

Ferner im Falle einer p gliedrigen Periodizität:

$$\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{\lambda+1}^{\lambda+e} \equiv \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{\lambda+1+p}^{\lambda+e+p},$$

also:

$$(d) \quad \begin{cases} A_{\lambda, \lambda+e} = A_{\lambda+p, \lambda+e+p} \\ B_{\lambda, \lambda+e} = B_{\lambda+p, \lambda+e+p} \end{cases}$$

2. Wir nehmen von jetzt ab ein für allemal an, daß die Bedingung (A) erfüllt sei. Die quadratische Gleichung (I) besitzt dann die beiden im allgemeinen verschiedenen Wurzeln:

$$(5a) \quad x = \frac{1}{2 B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D})$$

bzw. in dem besonderen Falle $D = 0$ die daraus hervorgehende Doppelwurzel:

$$(5b) \quad x = \frac{1}{2 B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p),$$

wo:

$$(6) \quad \begin{cases} D = (A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1} \\ \quad = (A_{p-1} + B_p)^2 - 4 (A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1}) \\ \quad = S^2 - 4 P, \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(7) \quad \begin{cases} S = A_{p-1} + B_p \\ P = A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = (-1)^p \cdot a_1 a_2 \dots a_p. \end{cases}$$

Es soll nun zunächst festgestellt werden, in welcher Weise die Bedingungen (B) sich mit Hilfe der Wurzeln ausdrücken lassen.

Für $\lambda = 0$ besitzt die Bedingung (B), wegen: $A_{0,p} \equiv A_p$, die einfache Form:

$$|A_p| > 0$$

und ist also gleichbedeutend damit, daß keine der Wurzeln x den Wert Null hat.

Um sodann den allgemeinen Fall $\lambda \geq 1$ zu erledigen, werde angenommen, daß für irgend ein $\lambda \geq 1$ die Bedingung (B) nicht erfüllt sei, daß also:

$$(8) \quad A_{\lambda, \lambda+p} = 0.$$

Mit Hilfe der Formel (s. Gl. (c) in Fußn. 1) der vorigen Seite):

$$A_{\lambda} B_{\lambda+p} - A_{\lambda+p} B_{\lambda} = (-1)^{\lambda-1} \cdot a_1 \dots a_{\lambda} \cdot A_{\lambda, \lambda+p}$$

läßt sich diese Bedingung durch die folgende ersetzen:

$$A_{\lambda} B_{\lambda+p} - A_{\lambda+p} B_{\lambda} = 0$$

und, wegen (s. Gl. (3) für $\mu = 1$, $\varrho = \lambda$):

$$(9) \quad \begin{cases} A_{\lambda+p} = B_{\lambda} A_p + A_{\lambda} A_{p-1} \\ B_{\lambda+p} = B_{\lambda} B_p + A_{\lambda} B_{p-1}, \end{cases}$$

auch durch die folgende:

$$(10) \quad A_{\lambda}(B_{\lambda} B_p + A_{\lambda} B_{p-1}) - B_{\lambda}(B_{\lambda} A_p + A_{\lambda} A_{p-1}) = 0,$$

anders geordnet und durch B_{λ}^2 dividiert¹⁾:

$$(11) \quad B_{p-1} \left(\frac{A_{\lambda}}{B_{\lambda}} \right)^2 - \left(A_{p-1} - B_p \right) \frac{A_{\lambda}}{B_{\lambda}} - A_p = 0,$$

d. h. die quadratische Gleichung (I) besitzt in diesem Falle die Wurzel: $x = \frac{A_{\lambda}}{B_{\lambda}}$, so daß also:

$$(12) \quad A_{\lambda} - B_{\lambda} x = 0.$$

Da man (wegen: $|a_1 \dots a_{\lambda}| > 0$) durch Umkehrung dieser Schlußfolge von Gl. (12) auch wieder zu Gl. (8) gelangen kann und die Aussage, daß die Gleichung (I) keine Wurzel $x = 0$ besitzen soll, sich auch in die Form setzen läßt:

$$|A_0 - B_0 x| > 0 \quad (\text{wegen: } A_0 = 0, B_0 = 1),$$

so ergibt sich:

Die Bedingungen (B) sind vollkommen *äquivalent* mit den folgenden:

$$(B') \quad |A_{\lambda} - B_{\lambda} x| > 0 \text{ für: } \lambda = 0, 1, \dots (p-2),$$

wo x jede Wurzel der quadratischen Gleichung (I) bedeutet.

Hierzu sei noch bemerkt, daß die Ungleichung (B') auch noch für $\lambda = p-1$ stets von selbst erfüllt ist.

¹⁾ Unter der Voraussetzung (8) ist stets: $|B_{\lambda}| > 0$. Denn für $B_{\lambda} = 0$ würde Gl. (10) die Form annehmen:

$$A_{\lambda}^2 B_{p-1} = 0,$$

es müßte also (wegen: $|B_{p-1}| > 0$)

$$A_{\lambda} = 0$$

sein, was unmöglich ist, da (infolge der Voraussetzung: $|a_p| > 0$) A_{λ} und B_{λ} niemals gleichzeitig verschwinden können.

Denn aus Gl. (I) folgt:

$$(13) \quad A_p - B_p x = -x(A_{p-1} - B_{p-1}x),$$

so daß aus der Annahme:

$$A_{p-1} - B_{p-1}x = 0$$

folgen würde:

$$A_p - B_p x = 0$$

und daher:

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1 \dots a_p = 0,$$

was wieder wegen $|a_v| > 0$, unmöglich ist.

3. Um die Konvergenz des Kettenbruches, also die Existenz von $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{A_v}{B_v}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, eines von λ unabhängigen $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{A_{\lambda + \mu p}}{B_{\lambda + \mu p}}$ ($\lambda = 0, 1, \dots, (p-1)$) bei passender Hinzufügung weiterer Bedingungen feststellen zu können, entwickeln wir zunächst eine hierfür zweckmäßige Rekursionsformel. Aus (9) folgt, wenn $\lambda + p = v$ gesetzt wird:

$$(14) \quad \begin{cases} A_v = B_{v-p} A_p + A_{v-p} A_{p-1} \\ B_v = B_{v-p} B_p + A_{v-p} B_{p-1} \end{cases} \quad (v \geq p)$$

und daher für jedes beliebige x :

$$A_v - B_v x = B_{v-p} (A_p - B_p x) + A_{v-p} (A_{p-1} - B_{p-1} x),$$

also, wenn wieder x eine beliebige Wurzel der Gleichung (I) bedeutet, mit Benützung von Gl. (13):

$$(15) \quad A_v - B_v x = (A_{p-1} - B_{p-1} x) (A_{v-p} - B_{v-p} x).$$

Setzt man hier $v = \lambda + \mu p$ (wo: $\lambda = 0, 1, \dots, (p-1)$; $\mu = 1, 2, 3, \dots$), so ergibt sich die folgende für die weiteren Betrachtungen grundlegende Rekursionsformel:

$$(II) \quad \begin{aligned} & A_{\lambda + \mu p} - B_{\lambda + \mu p} x \\ &= (A_{p-1} - B_{p-1} x) (A_{\lambda + (\mu-1)p} - B_{\lambda + (\mu-1)p} x), \end{aligned}$$

welche zunächst durch vollständige Induktion bereits so viel erkennen läßt, daß im Falle $A_{\lambda} - B_{\lambda} x \neq 0$ bzw. $= 0$ für

irgend ein bestimmtes λ aus der Reihe $0, 1, \dots (p-1)$ ¹⁾ die entsprechende Beziehung auch für $A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p}x$ bei beliebigem $\mu = 1, 2, 3, \dots$ Geltung hat.

4. Wir behandeln zuerst als den einfacher zu erledigenden, den besonderen Fall:

$$D = 0 \text{ (d. h.: } (A_{p-1} - B_p)^2 = -4 A_p B_{p-1}, \\ \text{also: } S^2 = 4 P \neq 0$$

in welchem die quadratische Gleichung (I) die Doppelwurzel:

$$(16) \quad x = \frac{1}{2 B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p)$$

besitzt. Da alsdann:

$$(17) \quad A_{p-1} - B_{p-1}x = A_{p-1} - \frac{1}{2} (A_{p-1} - B_p) = \frac{1}{2} S \neq 0,$$

so nimmt die Beziehung (15) die Form an:

$$A_v - B_v x = \frac{1}{2} S (A_{v-p} - B_{v-p} x).$$

Ist hierbei: $A_v - B_v x \neq 0$, so folgt weiter:

$$(18) \quad \frac{B_v}{A_v - B_v x} = \frac{2 B_v}{S} \cdot \frac{1}{A_{v-p} - B_{v-p} x},$$

und daher:

$$\begin{aligned} \frac{B_v}{A_v - B_v x} - \frac{B_{v-p}}{A_{v-p} - B_{v-p} x} &= \frac{1}{S} (2 B_v - S B_{v-p}) \cdot \frac{1}{A_{v-p} - B_{v-p} x} \\ &= \frac{1}{S} (2 B_v - S B_{v-p}) \cdot \frac{2 B_{p-1}}{2 A_{v-p} B_{p-1} - B_{v-p} (A_{p-1} - B_p)} \text{ (s. Gl. (16))} \\ &= \frac{2 B_{p-1}}{S} \cdot \frac{2 B_v - S B_{v-p}}{2 (A_{v-p} B_{p-1} + B_{v-p} B_p) - S B_{v-p}} \end{aligned}$$

also, wegen:

$$A_{v-p} B_{p-1} + B_{v-p} B_p = B_v \text{ (s. Gl. (14))},$$

schließlich:

$$(19) \quad \frac{B_v}{A_v - B_v x} - \frac{B_{v-p}}{A_{v-p} - B_{v-p} x} = \frac{2 B_{p-1}}{S}.$$

¹⁾ Für $\lambda = 0$ nimmt die betreffende Voraussetzung die Form an:

$x \neq 0$ bzw. $= 0$.

Setzt man hier wieder $\nu = \lambda + \mu p$, so ergibt sich als Ergänzung zu der Rekursionsformel (II) die folgende:

$$(IIa) \quad \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x} - \frac{B_{\lambda+(\mu-1)p}}{A_{\lambda+(\mu-1)p} - B_{\lambda+(\mu-1)p} x} = \frac{2B_{p-1}}{S},$$

auf Grund der an die Rekursionsformel (II) geknüpften Bemerkung gültig für jedes λ , für welches: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$. Ersetzt man μ sukzessive durch $\mu-1, \mu-2, \dots, 1$, so folgt durch Addition der resultierenden Gleichungen zu Gl. (IIa):

$$(20) \quad \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x} - \frac{B_\lambda}{A_\lambda - B_\lambda x} = \mu \cdot \frac{2B_{p-1}}{S}$$

und daher:

$$(21) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{B_{\lambda+\mu p}}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x} = \infty.$$

Daraus geht insbesondere hervor, daß (unter der Voraussetzung $A_\lambda - B_\lambda x \neq 0$) $B_{\lambda+\mu p}$ nicht für unendlich viele μ verschwinden kann, da ja im Falle: $B_{\lambda+\mu p} = 0$ stets: $A_{\lambda+\mu p} \neq 0$ und somit der obige Quotient unendlich oft den Wert Null annehmen würde. Setzt man also allgemein: $K_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu}$, so läßt sich Gl. (21) auch in die folgende umformen:

$$(22) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{K_{\lambda+\mu p} - x} = \infty,$$

und man findet somit schließlich:

$$(23) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda+\mu p} = x \left(= \frac{1}{2B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p) \right)$$

für jedes λ , für welches: $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$. Ist diese Bedingung, die ja, wie oben bemerkt wurde, für $\lambda = p-1$ schon von selbst erfüllt ist, auch für jedes $\lambda = 0, 1, \dots, (p-2)$ erfüllt, mit anderen Worten bestehen ausnahmslos die Bedingungen (B') oder auch die damit gleichwertigen Bedingungen (B), so folgt aus der an die Rekursionsformel (II) geknüpften Bemerkung, daß $|A_\nu - B_\nu x| > 0$ für jedes ν , mithin konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert x . Und zwar ist die

Konvergenz eine unbedingte, weil ja andernfalls der Wert x des Kettenbruches irgend einem Näherungsbruch $\frac{A_r}{B_r}$ gleich sein müßte,¹⁾ was wegen $|A_r - B_r x| > 0$ unmöglich ist.

Indessen bleibt die Konvergenz noch erhalten, wenn die Bedingungen (B') bzw. (B) nicht ausnahmslos erfüllt sind. Ist nämlich für ein oder mehrere $\lambda = l$: $A_l - B_l x = 0$,²⁾ so folgt zunächst aus der Rekursionsformel (II), daß dann auch: $A_{l+\mu p} - B_{l+\mu p} x = 0$ für jedes $\mu = 1, 2, 3, \dots$ sein muß. Da $A_{l+\mu p}$, $B_{l+\mu p}$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so ist diese Beziehung (auch für $\mu = 0$) nur möglich, wenn: $|B_{l+\mu p}| > 0$, und kann daher durch die folgende ersetzt werden:

$$(24 a) \quad K_{l+\mu p} = x \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots),$$

so daß auch:

$$(24 b) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{l+\mu p} = x.$$

Das frühere Ergebnis erleidet also nur insofern eine Änderung, als die Konvergenz mit Rücksicht auf Gl. (24 a) nur noch eine bedingte ist.

Hiernach findet man:

Ist $D = 0$, so ist die Bedingung:

$$(A) \quad |B_{p-1}| > 0$$

notwendig und hinreichend für die Konvergenz des

Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p} \right]$ und zwar ist alsdann

¹⁾ Vgl. diese Berichte, Bd. 28 (1898), S. 306.

²⁾ Man bemerke, daß dann keinesfalls auch:

$$A_{l+1} - B_{l+1} x = 0$$

sein könnte, da ja aus den beiden fraglichen Beziehungen folgen würde:

$$A_l B_{l+1} - A_{l+1} B_l = 0,$$

was, wegen $a_p > 0$, unmöglich ist.

In dem besonderen Falle $\lambda = 0$ hat man: $x = 0$, $A_p = 0$. In der Tat kann ja ein gegen Null konvergierender Kettenbruch (ohne additives Anfangsglied) immer nur bedingt konvergieren.

sein Wert gleich der Doppelwurzel x der quadratischen Gleichung (I), also:

$$\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p} \right] = x = \frac{1}{2B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p).$$

Die Konvergenz ist dann und nur dann eine *unbedingte*, wenn die Bedingungen:

$$(B) \quad |A_{\lambda, \lambda+p}| > 0 \text{ oder auch: } |B_{\lambda+1, \lambda+p}| > 0 \quad \left\{ (\lambda = 0, 1, \dots, (p-2)) \right. \\ \text{bzw. (B')} \quad |A_\lambda - B_\lambda x| > 0$$

ausnahmslos erfüllt sind.

5. Zur Behandlung des allgemeinen Falles:

$$|D| > 0$$

reduzieren wir den zweiten Faktor der rechten Seite der Rekursionsformel (II) durch deren fortgesetzte Anwendung auf $A_\lambda - B_\lambda x$, so daß sich ergibt:

$$(25) \quad A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x = (A_{p-1} - B_{p-1} x)^\mu \cdot (A_\lambda - B_\lambda x),$$

und hieraus folgt, wenn man mit x_1, x_2 die beiden nunmehr verschiedenen Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) bezeichnet, unter der Voraussetzung: $|A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0$, daß:

$$(26) \quad \frac{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_1}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_2} = M^\mu \cdot \frac{A_\lambda - B_\lambda x_1}{A_\lambda - B_\lambda x_2},$$

wo:

$$(27) \quad M = \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x_1}{A_{p-1} - B_{p-1} x_2}.$$

Soll nun der Kettenbruch überhaupt konvergieren, so muß zum mindesten für hinlänglich große μ Gl. (26) sich in die Form setzen lassen:

$$(28) \quad \frac{K_{\lambda+\mu p} - x_1}{K_{\lambda+\mu p} - x_2} = M^\mu \cdot \frac{A_\lambda - B_\lambda x_1}{A_\lambda - B_\lambda x_2}$$

und sodann einen bestimmten, von der Wahl des λ unabhängigen $\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda+\mu p}$ liefern, was offenbar nur möglich ist, wenn:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} M^\mu = 0 \quad \text{oder} \quad = \infty,$$

d. h. wenn:

$$(29) \quad |M| \equiv \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x_1}{A_{p-1} - B_{p-1} x_2} \right| \neq 1.$$

Diese Bedingung ist also jedenfalls eine weitere notwendige für die Konvergenz des Kettenbruches. Ist sie aber erfüllt, so läßt sie sich sofort ohne jede weitere Beschränkung der Allgemeinheit durch die scheinbar engere ersetzen:

$$(C') \quad |M| \equiv \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x_1}{A_{p-1} - B_{p-1} x_2} \right| < 1,$$

da es freisteht, falls die Voraussetzung (29) erfüllt ist, unter x_1 ein für allemal diejenige Wurzel der Gleichung (I) zu verstehen, welche dann durch die Bedingung (C') eindeutig charakterisiert ist.

Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß die soeben als notwendig für die Konvergenz des Kettenbruches erkannte Bedingung (29) bzw. (C') in Verbindung mit (A) und (B) bzw. (B') sich als hinreichend für die unbedingte Konvergenz erweist. Unter den genannten Bedingungen folgt nämlich zunächst aus Gl. (26):

$$(30) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_1}{A_{\lambda+\mu p} - B_{\lambda+\mu p} x_2} = 0 \quad \text{für: } \lambda = 0, 1, \dots (p-1),$$

was wiederum nur möglich ist, wenn für hinlänglich große μ durchweg: $|B_{\lambda+\mu p}| > 0$. Denn wäre $B_{\lambda+\mu p} = 0$ für unendlich viele $\lambda + \mu p$ (wobei dann jedesmal: $|A_{\lambda+\mu p}| > 0$), so würde der in Gl. (30) auftretende Quotient unendlich oft den Wert 1 annehmen. In Folge dessen läßt sich aber die Gl. (30) durch die folgende ersetzen:

$$(31) \quad \frac{K_{\lambda+\mu p} - x_1}{K_{\lambda+\mu p} - x_2} = q_{\lambda, \mu}, \quad \text{wo: } \lim_{\mu \rightarrow \infty} q_{\lambda, \mu} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \dots (p-1))$$

so daß sich ergibt:

$$K_{\lambda+\mu p} (1 - q_{\lambda, \mu}) = x_1 - x_2 q_{\lambda, \mu}$$

und daher:

$$(32) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda + \mu p} = x_1 \quad (\lambda = 0, 1, \dots (p-1)),$$

d. h. schließlich:

$$(33) \quad \overline{\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p} \right]} = x_1.$$

Diese Konvergenz ist dann aber eine unbedingte, da ja auf Grund der Voraussetzung $|A_\lambda - B_\lambda x| > 0$ für $\lambda = 0, 1, \dots (p-2)$, ebenso für $\lambda = (p-1)$ und daher mit Benützung der Rekursionsformel (II) auch $A_{\lambda + \mu p} - B_{\lambda + \mu p} x_1$ durchweg von Null verschieden, also für jedes n : $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty = x_1 \neq \frac{A_n}{B_n}$ ist.

Diese letzte Bemerkung führt unmittelbar zu der Erkenntnis, daß die Konvergenz des Kettenbruches gegen den Wert x_1 noch als eine bedingte — ganz analog, wie in dem zuvor betrachteten Falle $D = 0$ — erhalten bleibt, wenn für gewisse $\lambda = l$ die Beziehung besteht: $A_l - B_l x_1 = 0$. Denn daraus folgt wieder auf Grund der Rekursionsformel (II), daß dann allgemein: $A_{l + \mu p} - B_{l + \mu p} x_1 = 0$, also: $K_{l + \mu p} = x_1$ für: $\mu = 0, 1, 2, \dots$, während für alle von l verschiedenen λ die frühere Betrachtung gültig bleibt, sodaß also schließlich wieder: $\lim_{v \rightarrow \infty} K_v = x_1$, die Konvergenz, wegen $K_{l + \mu p} = x_1$, jedoch nur eine bedingte ist.

Bestehen dagegen für gewisse $\lambda = l$ in der Weise Ausnahmen von den Bedingungen (B'), daß: $A_l - B_l x_2 = 0$, so besitzen alle Näherungsbrüche von der Form: $K_{l + \mu p}$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$) den Wert x_2 und konvergieren daher auch für $\mu \rightarrow \infty$ gegen x_2 , während alle übrigen den Grenzwert x_1 liefern. Der Kettenbruch oszilliert also in diesem Falle zwischen den zwei Werten x_1 und x_2 (sogenannte Thielesche Oszillation).

Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich in folgender Weise zusammenfassen (wobei wir aus einem Grunde, der bald ersichtlich werden wird, von der Möglichkeit, statt der Bedingungen (B') die Bedingungen (B) einzuführen, vorläufig absehen):

Ist $|D| > 0$ und werden mit x_1, x_2 die (in diesem Falle verschiedenen) Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) bezeichnet, so sind für die *unbedingte* Konvergenz des periodischen Kettenbruches: $\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p} \right]$ die folgenden Bedingungen *notwendig* und *hinreichend*.

$$(A) \quad |B_{p-1}| > 0$$

$$(B') \quad \begin{cases} (1) & |A_\lambda - B_\lambda x_1| > 0 \\ (2) & |A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0 \end{cases} \quad (\lambda = 0, 1, \dots, (p-2))$$

$$(C') \quad |A_{p-1} - B_{p-1} x_1| > |A_{p-1} - B_{p-1} x_2|.$$

Sein Wert ist gleich x_1 .

Die Bedingungen (A), (B', 2) und (C') sind auch für *bedingte* Konvergenz des Kettenbruches *notwendig*. Eine solche und zwar gleichfalls gegen den Wert x_1 findet statt, wenn die Bedingungen (B', 1) nur teilweise erfüllt sind, wenn also für mindestens *ein* $\lambda = l$ die Beziehung besteht: $A_l - B_l x_1 = 0$.

Besteht dagegen außer der Voraussetzung (A) für mindestens *ein* $\lambda = l$ die Beziehung: $A_l - B_l x_2 = 0$, so *oszilliert* der Kettenbruch zwischen den beiden Werten x_1, x_2 (und zwar unabhängig davon, ob die Bedingungen (B', 1) ausnahmslos oder nur teilweise erfüllt sind).

6. Das vorstehende, rein formal völlig befriedigend erscheinende Resultat leidet, wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, insofern an einer merklichen Unvollkommenheit, als die Bedingungen (B'), (C') trotz ihrer äußerlich einfachen Fassung wegen ihrer Abhängigkeit von Irrationalitäten x_1, x_2 doch ziemlich verwickelt sind und ihre praktische Anwendung sich recht umständlich gestaltet. Gilt dies schon von der Einzelbedingung (C'), so noch in wesentlich erhöhtem Maße von dem System der Bedingungen (B'). Zwar läßt sich, wie

schon in Nr. 2 gezeigt wurde, jedes Paar von Bedingungen: $|A_\lambda - B_\lambda x_1| > 0$, $|A_\lambda - B_\lambda x_2| > 0$ durch die wesentlich einfachere entsprechende Bedingung (B): $|A_{\lambda, \lambda+p}| > 0$ ersetzen. Ist nun aber für ein oder mehrere $\lambda = l$: $A_{l, l+p} = 0$, so bleibt noch die Frage offen, welche Zusatzbedingungen erforderlich sind, um sicher zu stellen, daß in dem betreffenden Falle: $A_l - B_l x_1 = 0$ und nicht: $A_l - B_l x_2 = 0$, mithin noch bedingte Konvergenz gegen den Wert x_1 vorhanden ist.

Was nun zunächst die Bedingung (C') betrifft, so habe ich in der oben (S. 221, Fußnote 2) erwähnten Arbeit gezeigt, daß sie dann und nur dann erfüllbar ist, wenn die (eine Umformung von Ungl. (29) darstellende) Beziehung besteht¹⁾:

$$\left| \Re \left(\frac{S}{\sqrt{D}} \right) \right| > 0,$$

welche sich auch durch die folgende, nur rationale Verbindungen der a_v , b_v enthaltende ersetzen läßt²⁾:

$$(C) \quad \frac{S^2}{4P} \neq \vartheta, \text{ wo } \vartheta \text{ reell und } 0 \leq \vartheta < 1.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so läßt sich $\varepsilon = \pm 1$ eindeutig so bestimmen, daß gemäß der Bedingung (C'):

$$|A_{p-1} - B_{p-1} x_1| < |A_{p-1} - B_{p-1} x_2|,$$

wenn gesetzt wird:

$$(34) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p + \varepsilon \sqrt{D}) \\ x_2 = \frac{1}{2B_{p-1}} (A_{p-1} - B_p - \varepsilon \sqrt{D}) \end{cases}$$

und $\sqrt{D}$ den Hauptwert der Quadratwurzel vorstellt.

¹⁾ A. a. O. S. 470, Formel (A).

²⁾ Vgl. a. a. O. S. 471, Gl. (74a), wo die Beziehung:

$$S^2 = 4\vartheta P \quad (0 \leq \vartheta < 1)$$

als Divergenz-Bedingung angegeben ist. Dieses Divergenzkriterium findet sich in etwas umständlicherer Herleitung schon bei Stolz: Innsbr. Berichte 1887/88, S. XVIII.

Um dieser Bestimmung von x_1 eine noch etwas handlichere, insbesondere kürzer in Worte zu fassende Form zu geben, setzen wir:

$$(35) \quad \begin{cases} A_{p-1} - B_{p-1}x_1 = z_1 \\ A_{p-1} - B_{p-1}x_2 = z_2, \end{cases}$$

also:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2A_{p-1} - B_{p-1}(x_1 + x_2) \\ &= 2A_{p-1} - (A_{p-1} - B_p) = S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= A_{p-1}^2 - A_{p-1}B_{p-1}(x_1 + x_2) + B_{p-1}^2 x_1 x_2 \\ &= A_{p-1}^2 - A_{p-1}(A_{p-1} - B_p) - B_{p-1}A_p \\ &= A_{p-1}B_p - A_p B_{p-1} = P. \end{aligned}$$

Hiernach sind z_1, z_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung¹⁾:

$$(III) \quad z^2 - Sz + P = 0$$

(welche dieselbe Diskriminante $D = S^2 - 4P$ besitzt, wie die quadratische Gleichung (I)), und die Bedingung (C') nimmt alsdann die einfache Form $|z_1| < |z_2|$ an, sie läßt sich also ersetzen durch die Bedingung (C) mit dem Zusatze:

$$(36) \quad x_1 = \frac{A_{p-1} - z_1}{B_{p-1}},$$

wo z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung (III) bedeutet²⁾.

7. Um jetzt festzustellen, welche Bedingungen (immer unter der Voraussetzung $|B_{p-1}| > 0$) im Falle: $A_{l+p} = 0$ noch erfüllt sein müssen, um die ausnahmslose Existenz der Bedingungen (B', 2) und damit die Möglichkeit der Konvergenz des Kettenbruches zu sichern, wollen wir zunächst annehmen, es bestehe die obige Voraussetzung ausschließlich für $l = 0$, so daß also:

¹⁾ Es ist das dieselbe quadratische Gleichung, zu welcher Herr von Pidoll behufs Auflösung einer gewissen Rekursionsformel gelangt (s. a. a. O. S. 21, Gl. (12)).

²⁾ Daß die Wurzeln dieser Gleichung allemal ungleiche Absolutwerte besitzen, wird ja durch die Bedingung (C) gesichert.

$$(37a) \quad A_{0,p} \equiv A_p = 0, \\ \text{dagegen: } |A_{\lambda, \lambda+p}| > 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, \dots (p-2).$$

Soll dann der Kettenbruch noch (bedingt) konvergieren, so muß

$$A_0 - B_0 x_1 = 0, \text{ also: } x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

werden. Die hierzu notwendige und hinreichende Bedingung: $|z_1| < |z_2|$ nimmt alsdann, wegen:

$$z_1 = A_{p-1} - B_{p-1} x_1 = A_{p-1}, \quad z_2 = A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = B_p$$

die Form an:

$$(38) \quad |A_{p-1}| < |B_p|^1).$$

Man kann sich überdies leicht überzeugen, daß dann in der Tat der Kettenbruch gegen den Wert $x_1 = 0$ (und schon deshalb nur bedingt) konvergiert.

Aus der Rekursionsformel (II) folgt nämlich für $x = x_1 = 0$ und $\lambda = 0$:

$$A_{\mu p} = A_{p-1} A_{(\mu-1)p} = \dots = 0, \text{ wegen: } A_p = 0,$$

also auch:

$$K_{\mu p} = 0 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \dots,$$

während im übrigen, wegen: $|M| \equiv \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1$, sich ergibt:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda + \mu p} = x_1 = 0 \text{ für: } \lambda = 1, 2, \dots (p-1).$$

Wird jetzt ferner angenommen, daß außer der Voraussetzung (37 a) auch noch für ein oder mehrere $\lambda = l_r > 0$ die entsprechende Beziehung:

$$(37b) \quad A_{l_r, l_r+p} = 0 \text{ (etwa für } r = 1, \dots n, \text{ wo } n > 1)$$

besteht, so muß zunächst, wenn überhaupt Konvergenz gegen den Wert $x_1 = 0$ möglich sein soll, wieder die Bedingung (38) erfüllt sein; außerdem aber, damit die Voraussetzung (37 b)

¹⁾ Die Bedingung (C) ist also in der Bedingung (38) schon implicite enthalten.

die Beziehung: $A_{l_\nu} - B_{l_\nu} x_1 = 0$ zur Folge hat, wegen $x_1 = 0$, noch die folgende:

$$(39) \quad A_{l_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Auf Grund dieser Beziehung folgt dann wieder aus der Rekursionsformel (II), S. 228, daß:

$$K_{l_\nu + \mu p} = 0 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \dots,$$

während für alle von 0 und l_ν verschiedenen λ , wie bisher:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda + \mu p} = x_1 = 0$$

wird, der Kettenbruch also wieder gegen den Wert $x_1 = 0$ konvergiert.

Diese Ergebnisse lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen, daß an die Stelle der Voraussetzung (37 a) eine solche von der Form:

$$(40 \text{ a}) \quad A_{l, l+p} = 0$$

tritt, und zwar zunächst für ein einziges $l > 0$. Soll dann die hieraus für eine der beiden Gleichungswurzeln x folgende Beziehung:

$$A_l - B_l x = 0$$

für $x = x_1$ befriedigt werden und sodann der Kettenbruch gegen den Wert x_1 , d. h. gegen $\frac{A_l}{B_l}$ konvergieren, so ist dafür

notwendig und hinreichend, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{l+1}^\infty$

gegen Null konvergiert. Da die hierzu notwendige Bedingung: $A_{l, l+p} = 0$ (welche ja für diesen Kettenbruch genau dieselbe Rolle spielt, wie zuvor die Bedingung: $A_{0, p} \equiv A_p = 0$

für den Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty$) bereits erfüllt ist, so zeigt die

Vergleichung mit (38), daß als notwendig und hinreichend noch die (für $l = 0$ mit (38) zusammenfallende) Bedingung:

$$(41) \quad |A_{l, l+p-1}| < |B_{l, l+p}|$$

hinzutreten muß, damit der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^\infty$ gegen Null, also $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ gegen den Wert $x_1 = \frac{A_l}{B_l}$ (bedingt) konvergiert.

Wird jetzt wiederum angenommen, daß außer der Voraussetzung (40 a) auch für ein oder mehrere $l_\nu > l$ die entsprechende Beziehung besteht, also:

$$(40\ b) \quad A_{l_\nu, l_\nu + p} = 0 \quad (l_\nu > l),$$

so tritt an die Stelle der im Falle $l = 0$ gefundenen Zusatzbedingung (39) (nämlich: $A_{l_\nu} \equiv A_{0, l_\nu} = 0$) offenbar die durch Vertauschung des Anfangsindex 0 mit l daraus hervorgehende, also:

$$(42) \quad A_{l, l_\nu} = 0,$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für $\mu = 1, 2, 3, \dots$:

$$K_{l, l_\nu + \mu p} = 0, \text{ also: } K_{l_\nu + \mu p} = \frac{A_1}{B_1} = x_1,$$

während wieder für alle von l und l_ν verschiedenen λ :

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{l, \lambda + \mu p} = 0, \text{ also: } \lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda + \mu p} = \frac{A_l}{B_l} = x_1$$

wird, der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{l+1}^\infty$ also schließlich gegen Null

und $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ gegen den Wert $\frac{A_1}{B_1} = x_1$ konvergiert.

Fassen wir endlich noch den Fall ins Auge, daß für ein einziges $l \geq 0$ wieder die Beziehung (37 a) bzw. (40 a) besteht, also:

$$A_{l, l+p} = 0,$$

dagegen an die Stelle der Bedingung (38) bzw. (41) die entgegengesetzte tritt, d. h.:

$$|A_{l, l+p-1}| > |B_{l, l+p}| \quad (l \geq 0),$$

so hätte man:

$$A_l - B_l x_2 = 0,$$

und es muß also in diesem Falle die oben bereits beschriebene besondere Art der Oscillation des Kettenbruches zwischen den Werten x_1 und x_2 eintreten.

Hieran wird nichts wesentliches geändert, wenn auch noch für ein oder mehrere $l_\nu > l$:

$$A_{l_\nu, l_\nu + p} = 0,$$

und zwar selbst dann nicht, wenn:

$$|A_{l, l+p-1}| < |B_{l, l+p}|,$$

jedoch mindestens eine der Bedingungen (42) nicht erfüllt ist.

Somit läßt sich jetzt das am Schlusse von Nr. 5 ausgesprochene Resultat in folgender Weise umgestalten:

Ist:

$$|D| \equiv |(A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1}| > 0,$$

so sind für die *unbedingte* Konvergenz des periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_p}{b_p} \right]$ die folgenden Bedingungen *notwendig* und *hinreichend*:

$$(A) \quad |B_{p-1}| > 0$$

$$(B) \quad |A_{\lambda, \lambda+p}| > 0 \text{ für: } \lambda = 0, 1, \dots, (p-2)$$

$$(C) \quad \frac{S^2}{4P} \neq \vartheta, \text{ wo: } \vartheta \text{ reell und: } 0 \leq \vartheta < 1,$$

$$S = A_{p-1} + B_p, \quad P = (-1)^p a_1 \dots a_p.$$

Sind dieselben erfüllt, so *konvergiert* der Kettenbruch gegen den Wert:

$$x_1 = \frac{1}{B_{p-1}} (A_{p-1} - z_1),$$

wo z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$z^2 - Sz + P = 0$$

bedeutet.

Sind außer der Bedingung (A) die Bedingungen (B) bis auf eine einzige erfüllt, etwa:

$$A_{l, l+p} = 0 \quad (0 \leq l \leq p-2),$$

so *konvergiert* der Kettenbruch noch *bedingt* gegen den Wert x_1 , wenn an die Stelle der Bedingung (C) die folgende tritt:

$$(C_1) \quad |A_{l, l+p-1}| < |B_{l, l+p}|.$$

Das gleiche findet statt, wenn noch für ein oder mehrere $l_v > l$:

$$A_{l_v, l_v+p} = 0 \quad (v = 1 \text{ bzw. } v = 1, \dots, n),$$

sofern für jedes solche l_v die Beziehung besteht:

$$(C_2) \quad A_{l, l_v} = 0 \quad (v = 1 \text{ bzw. } v = 1, \dots, n).$$

Ist dagegen für ein einzelnes $l \geq 0$:

$$(a) \quad A_{l, l+p} = 0 \text{ und: } |A_{l, l+p-1}| > |B_{l, l+p}|,$$

so *oscilliert* der Kettenbruch in *der* Weise zwischen den beiden Werten x_1 und x_2 , daß:

$$K_{l+\mu p} = x_2 \text{ für: } \mu = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} K_{\lambda+\mu p} = x_1 \text{ für: } \lambda \neq l.$$

An diesem Ergebnisse wird nichts geändert, wenn für ein oder mehrere $l_v > l$:

$$(b) \quad A_{l_v, l_v+p} = 0 \text{ und: } A_{l, l_v} = 0 \text{ (vgl. (C}_2\text{))}.$$

Ist indessen für irgend ein $v = m$:

$$(c) \quad A_{l_m, l_m+p} = 0 \text{ und: } |A_{l, l_m}| > 0,$$

so tritt nur insofern eine Änderung ein, als dann auch:

$$K_{l_m+\mu p} = x_2 \text{ für: } \mu = 1, 2, 3, \dots$$

Und der Wert x_2 kommt *ausschließlich* in dieser *letzteren* Weise zum Vorschein, wenn an die Stelle der Beziehungen (a) die folgenden treten:

$$(d) \quad A_{l,l+p} = 0 \text{ und: } |A_{l,l+p-1}| < |B_{l,l+p}|.$$

In allen diesen letztgenannten, durch die Bedingungen (a)–(d) gekennzeichneten Fällen *oscilliert* also der Kettenbruch zwischen den beiden Werten x_1 und x_2 in *der* Weise, daß gewisse Näherungsbruchfolgen durchweg den Wert x_2 , die übrigen den Wert oder Grenzwert x_1 liefern.

§ 2. Über ein Konvergenz-Kriterium für Kettenbrüche von

$$\text{der Form: } \left[\frac{1}{a_v + \beta_v i} \right]_1^\infty.$$

1. Bezeichnet man mit $\frac{A_v}{B_v}$ ($v = 1, 2, 3 \dots$) die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_v} \right]_1^\infty$, wo: $b_v = a_v + \beta_v i$, mit $\bar{B}_v$ die zu B_v konjugierte Zahl, so folgt aus der Rekursionsformel:

$$B_{v+1} = b_{v+1} B_v + B_{v-1}$$

durch Multiplikation mit $\bar{B}_v$:

$$(1) \quad B_{v+1} \bar{B}_v - \bar{B}_v B_{v-1} = b_{v+1} B_v \bar{B}_v = b_{v+1} |B_v|^2.$$

Setzt man sodann:

$$(2) \quad \bar{B}_v B_{v-1} = \varrho_v - \sigma_v i, \text{ also: } B_v \bar{B}_{v-1} = \varrho_v + \sigma_v i,$$

so geht die Gleichung (1) in die folgende über:

$$\varrho_{v+1} + \sigma_{v+1} i - (\varrho_v - \sigma_v i) = (a_{v+1} + \beta_{v+1} i) \cdot |B_v|^2,$$

welche durch Trennung des reellen und imaginären die zwei Beziehungen liefert:

$$(3) \quad \varrho_{v+1} - \varrho_v = \alpha_{v+1} |B_v|^2, \quad \sigma_{v+1} + \sigma_v = \beta_{v+1} |B_v|^2.$$

Substituiert man in der ersten und der mit $(-1)^{v+1}$ multiplizierten zweiten dieser Gleichungen $v = 1, 2, \dots (n-1)$,

so folgt durch Addition der resultierenden Gleichungen (mit Berücksichtigung von $\varrho_1 = \alpha_1 = \alpha_1 |B_0|^2$, $\sigma_1 = \beta_1 = \beta_1 |B_0|^2$):

$$(4) \quad \varrho_n = \sum_0^{n-1} \alpha_{r+1} |B_r|^2, \quad (-1)^n \sigma_n = \sum_0^{n-1} (-1)^{r+1} \beta_{r+1} |B_r|^2 \quad (n \geq 1)$$

und durch Multiplikation der beiden Gleichungen (2):

$$(5) \quad |B_r B_{r-1}|^2 = \varrho_r^2 + \sigma_r^2, \quad \text{also: } |B_r B_{r-1}| \begin{cases} \geq \varrho_r \\ > \sigma_r. \end{cases}$$

Ersetzt man ferner in der Rekursionsformel:

$$B_{n+1} = b_{n+1} B_n + B_{n-1}$$

jede darin vorkommende Zahl durch ihre konjugierte (wobei, analog wie oben, $\overline{b_{n+1}}$ die Konjugierte von b_{n+1} bezeichnen soll), so folgt:

$$\overline{B_{n+1}} = \overline{b_{n+1}} \overline{B_n} + \overline{B_{n-1}}$$

und durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} |B_{n+1}|^2 &= |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 + |B_{n-1}|^2 + b_{n+1} \overline{B_n} \overline{B_{n-1}} + \overline{b_{n+1}} B_n B_{n-1} \\ &= |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 + |B_{n-1}|^2 + (a_{n+1} + \beta_{n+1} i) (\varrho_n + \sigma_n i) \\ &\quad + (a_{n+1} - \beta_{n+1} i) (\varrho_n - \sigma_n i) \\ (6) \quad &= |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 + |B_{n-1}|^2 + 2 a_{n+1} \varrho_n - 2 \beta_{n+1} \sigma_n^1). \end{aligned}$$

2. Ein Kettenbruch von der Form: $\left[\frac{1}{b_r} \right]_1^\infty$ ist bekanntlich stets divergent, wenn alle Teilnenner b_r mit ungeradem Index gleich Null sind. Denn, aus der Voraussetzung:

$$0 = b_1 = b_3 = \dots = b_{2n+1}$$

würde mit Hilfe der üblichen Rekursionsformeln folgen:

$$B_{2n+1} = B_{2n-1} = \dots = B_1 = b_1 = 0,$$

so daß im Falle: $b_{2r+1} = 0$ (für jedes $r = 0, 1, 2, \dots$) alle Näherungsbrüche mit ungeradem Index sinnlos werden, der Kettenbruch also divergiert.

¹⁾ Diese Formel findet sich (mit anderen Bezeichnungen) schon in der Arbeit des Herrn van Vleck: a. a. O. S. 220, Gl. (13).

Ferner ist der fragliche Kettenbruch auch divergent, falls die Reihe $\sum |b_r|$ konvergiert. Wenn nämlich der Kettenbruch nicht schon durch das Vorkommen unendlich vieler sinnloser Näherungsbrüche divergent wird, so hat man durchweg: $|B_r| > 0$ etwa für $r \geq m$, und daher für $n > m$:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^n \left(\frac{A_r}{B_r} - \frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} \right) = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^n (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{B_r B_{r-1}}$$

(wegen: $A_r B_{r-1} - A_{r-1} B_r = (-1)^{r-1}$). Für die Konvergenz des Kettenbruches, also für die Existenz eines endlichen

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ ist daher jedenfalls notwendig, daß:

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n B_{n-1} = \infty.$$

Da aber aus den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |B_1| &= |b_1| < 1 + |b_1| \\ |B_2| &\leq 1 + |b_1 b_2| \leq (1 + |b_1|)(1 + |b_2|) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Rekursionsformel für die B_r durch vollständige Induktion sich ergibt, daß allgemein:

$$|B_n| < \prod_1^n (1 + |b_r|),$$

so folgt, daß die $|B_n|$ stets unter einer endlichen Schranke bleiben, wenn die Reihe $\sum |b_r|$, also auch das unendliche Produkt $\prod (1 + |b_r|)$ konvergiert, somit die für die Konvergenz des Kettenbruches notwendige Bedingung (7) niemals erfüllt sein kann¹⁾.

3. Die vorausgeschickt formulieren wir jetzt das zu beweisende Konvergenz-Kriterium in folgender Weise:

Sind die für die Konvergenz des Kettenbruches

$\left[\frac{1}{b_r} \right]_1^\infty$, wo: $b_r = a_r + \beta_r i$, notwendigen Bedingungen, nämlich:

¹⁾ Dieses Divergenz-Kriterium rührt, soviel ich weiß, von Stolz her: Vorl. über allg. Arithmetik, Bd. 2 (1886), S. 279.

$|b_{2r+1}| > 0$ zum mindesten für einen Wert $r = m$,
und:
$$\sum_1^{\infty} r |b_r| = +\infty$$

erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch, wenn die α_r unter sich, ebenso die mit $(-1)^r$ multiplizierten β_r unter sich, soweit sie von Null verschieden sind, gleiches Vorzeichen haben¹⁾. Die Konvergenz ist dann und nur dann eine *unbedingte*, wenn die Bedingung $|b_r| > 0$ für unendlich viele gerade, wie ungerade r erfüllt ist.

Beweis. Infolge der vorausgesetzten Divergenz von $\sum |b_r|$ muß mindestens eine der beiden Reihen $\sum |\alpha_r|$, $\sum |\beta_r|$ divergieren. Wir dürfen aber, ohne die Allgemeinheit unseres Ergebnisses zu beschränken, voraussetzen, daß gerade $\sum |\alpha_r|$, d. h. die aus den Absolutwerten der reellen Teile der b_r gebildete Reihe divergiert. Denn wäre etwa nur $\sum |\beta_r|$ divergent, so steht es frei, an Stelle des vorgelegten Kettenbruches den mit ihm äquivalenten²⁾:

$$-i \left[\frac{1}{(-1)^{r-1} \beta_r + (-1)^r \alpha_r i} \right]_1^{\infty}$$

in Betracht zu ziehen, bei dem ja nunmehr die reellen Teile der Nenner die verlangte Eigenschaft besitzen. Aus analogem Grunde darf man weiter annehmen, daß die nach Voraussetzung gleichbezeichneten α_r durchweg ≥ 0 seien, da man ja andernfalls den vorgelegten Kettenbruch wiederum durch den äquivalenten³⁾:

$$- \left[\frac{1}{-\alpha_r - \beta_r i} \right]_1^{\infty}$$

¹⁾ Dabei kann immerhin das Vorzeichen von α_r und $(-1)^r \beta_r$ verschieden sein.

²⁾ Diese Äquivalenz folgt aus der allgemeinen Transformationsformel:

$$\left[\frac{1}{\alpha_r + \beta_r i} \right]_1^n = \frac{1}{c_0} \left[\frac{c_{r-1} c_r}{c_r (\alpha_r + \beta_r i)} \right]_1^n,$$

wenn gesetzt wird: $c_r = (-1)^r i$.

³⁾ Dies folgt aus der Formel von Fußnote 2) für $c_r = -1$.

ersetzen könnte. Beachtet man schließlich noch, daß zwei Kettenbrüche von der Form:

$$\left[\frac{1}{\alpha_r + |\beta_r| i} \right]_1^\infty \text{ und: } \left[\frac{1}{\alpha_r - |\beta_r| i} \right]_1^\infty$$

durchweg paarweise konjugierte Näherungsbrüche liefern und somit stets gleichzeitig konvergieren bzw. divergieren, daß es also gegebenenfalls genügt, die Konvergenz des ersteren der beiden zu erweisen, so dürfen wir wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit noch annehmen, daß auch die nach Voraussetzung gleichbezeichneten $(-1)^r \cdot \beta_r$ durchweg ≥ 0 sind (so daß also: $|\beta_r| = (-1)^r \beta_r$). Hiernach ergibt sich aus (4):

$$(8) \quad \begin{cases} \varrho_n = \sum_0^{n-1} \alpha_{r+1} |B_r|^2 \geq 0 \\ (-1)^n \cdot \sigma_n = \sum_0^{n-1} (-1)^{r+1} \cdot \beta_{r+1} |B_r|^2 \geq 0 \\ \left(\text{also: } |\sigma_n| = \sum_0^{n-1} |\beta_{r+1}| \cdot |B_r|^2 \right) \end{cases}$$

und sodann aus Gl. (6) (wenn man berücksichtigt, daß: $- \beta_{n+1} \sigma_n = (-1)^{n+1} \beta_{n+1} \cdot (-1)^n \sigma_n \geq 0$):

$$(9) \quad |B_{n+1}|^2 \begin{cases} \geq |b_{n+1}|^2 |B_n|^2 \\ \geq |B_{n-1}|^2. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Ungleichungen folgt, daß für jedes $r \geq 1$:

$$(10a) \quad |B_{2r}| \geq |B_{2r-2}| \geq \dots \geq |B_0| = 1,$$

aus der ersten zunächst für $n = 2m$:

$$|B_{2m+1}| \geq |b_{2m+1}| \cdot |B_{2m}| \geq |b_{2m+1}| \quad (\text{also: } > 0),$$

und daher mit nochmaliger Benützung der zweiten, für jedes $r \geq m$:

$$(10b) \quad |B_{2r+1}| \geq |B_{2r-1}| \geq \dots \geq |B_{2m+1}| \geq |b_{2m+1}|.$$

Bedeutet also γ die kleinere der beiden positiven Zahlen 1 und $|b_{2m+1}|$, so findet man:

$$(11) \quad |B_r| \geq \gamma \quad \text{für: } r \geq 2m.$$

Da hiernach die $|B_r|$ für $r \geq 2m$ durchweg von Null verschieden sind, so kann man für jedes $n > m$ setzen:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{A_{2m}}{B_{2m}} + \sum_{m+1}^n \left(\frac{A_{2r}}{B_{2r}} - \frac{A_{2r-2}}{B_{2r-2}} \right) \\ \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = \frac{A_{2m+1}}{B_{2m+1}} + \sum_{m+1}^n \left(\frac{A_{2r+1}}{B_{2r+1}} - \frac{A_{2r-1}}{B_{2r-1}} \right) \end{cases}$$

und daraus folgt, daß die beiden Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ als endliche Zahlen existieren, wenn die beiden Reihen:

$$\sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{A_{2r}}{B_{2r}} - \frac{A_{2r-2}}{B_{2r-2}} \right) \text{ und: } \sum_{m+1}^{\infty} \left(\frac{A_{2r+1}}{B_{2r+1}} - \frac{A_{2r-1}}{B_{2r-1}} \right)$$

konvergieren. Diese Konvergenz ist aber offenbar (und zwar als eine absolute) gesichert, wenn die Reihe:

$$\sum \left| \frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} - \frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} \right|$$

und das heißt schließlich, wegen:

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} - \frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{b_{r+1}}{B_{r+1}B_{r-1}},$$

die folgende:

$$(13) \quad \sum \left| \frac{b_{r+1}}{B_{r+1}B_{r-1}} \right|$$

konvergent ist.

Nun folgt aus (8) mit Berücksichtigung von (11) für jedes $n > 2m$:

$$(14) \quad \begin{cases} \varrho_n \geq \sum_{2m}^{n-1} a_{r+1} |B_r|^2 \geq \gamma^2 \cdot \sum_{2m}^{n-1} a_{r+1} \\ |\sigma_n| \geq \sum_{2m}^{n-1} |\beta_{r+1}| \cdot |B_r|^2 \geq \gamma^2 \cdot \sum_{2m}^{n-1} |\beta_{r+1}|. \end{cases}$$

Da wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe $\sum a_{r+1}$ unendlich viele a_{r+1} von Null verschieden sind, so ist von einer gewissen Stelle ab $\varrho_n > 0$ und:

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = +\infty.$$

Dagegen könnte sehr wohl $|\sigma_n| = 0$ und sogar $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n| = 0$ sein — letzteres nämlich dann, wenn für $r \geq 2m$ durchweg: $\beta_{r+1} = 0$, was ja durch die Voraussetzung nicht ausgeschlossen ist. Abgesehen von diesem besonderen Falle ist von einer gewissen Stelle ab $|\sigma_n|$ wesentlich positiv und mit wachsendem n niemals abnehmend, also $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n|$ endlich und von Null verschieden oder unendlich. Um die Konvergenz der Reihe (13) festzustellen, hat man:

$$(16) \quad \left| \frac{b_{r+1}}{B_{r+1} B_{r-1}} \right| \leq \frac{a_{r+1}}{|B_{r+1} B_{r-1}|} + \frac{|\beta_{r+1}|}{|B_{r+1} B_{r-1}|}$$

und sodann (mit Benützung von (8) und (5)):

$$(17) \quad \frac{a_{r+1}}{|B_{r+1} B_{r-1}|} = \frac{a_{r+1} |B_r|^2}{|B_{r+1} B_r| \cdot |B_r B_{r-1}|} \leq \frac{q_{r+1} - q_r}{q_{r+1} q_r} \quad (\text{wo: } \lim_{r \rightarrow \infty} q_r = +\infty)$$

d. h. der Wert des ersten Gliedes auf der rechten Seite von Ungl. (16) ist höchstens so groß wie derjenige des allgemeinen Gliedes einer konvergenten Reihe.

Sind nun von Null verschiedene β_{r+1} nur in endlicher Anzahl vorhanden, so übt das zweite Glied der rechten Seite von Ungl. (16) auf die Konvergenz der fraglichen Reihe überhaupt keinen Einfluß aus. Im entgegengesetzten Falle hat man, analog mit (17):

$$(18) \quad \frac{|\beta_{r+1}|}{|B_{r+1} B_r|} = \frac{|\beta_{r+1}| \cdot |B_r|^2}{|B_{r+1} B_r| \cdot |B_r B_{r-1}|} \leq \frac{|\sigma_{r+1}| - |\sigma_r|}{|\sigma_{r+1}| \cdot |\sigma_r|},$$

wo $\lim_{r \rightarrow \infty} |\sigma_r|$ endlich und von Null verschieden oder positiv unendlich, also der Ausdruck rechts wieder das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe vorstellt.

Hiermit ist also die Konvergenz der Reihe (13) und somit die Existenz der beiden Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ erwiesen. Daß dieselben aber zusammenfallen, ergibt sich sofort mit Hilfe der Beziehung:

$$\frac{A_r}{B_r} - \frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{B_r B_{r-1}},$$

da ja aus Gl. (15), wegen: $|B_r B_{r-1}| > \varrho_r$ (s. (5)), folgt:

$$(19) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B_r B_{r-1} = \infty.$$

Somit ist der fragliche Kettenbruch konvergent.

Soll er aber unbedingt konvergieren, so muß für jeden Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{2\lambda+1}^\infty$ bei beliebig großem λ immer mindestens ein von Null verschiedenes b_{2r+1} und, da für die Kettenbrüche von der Form: $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_{2\lambda}^\infty$ die Teilnenner mit geradem Index die analoge Rolle spielen, auch ein von Null verschiedenes b_{2r} vorhanden sein, d. h. es müssen von Null verschiedene b_r sowohl mit geradem, als mit ungeradem Index in unbegrenzter Menge existieren. Diese Bedingung zusammen mit den übrigen Voraussetzungen ist dann aber auch hinreichend für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches, da ja jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern entstehende Kettenbruch nunmehr genau denselben Charakter besitzt wie der ursprüngliche.
