

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft II

November- und Dezembersitzung

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines beim Beweise benützten Grenzwertsatzes.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung am 2. Dezember 1916.

Der von Herrn J. Schur¹⁾ herrührende schöne Beweis für die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte — welche im folgenden mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_n(s_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(s)}$ bezeichnet werden sollen (s. weiter unten Gl. (I), (3) und (II), (8), (9)) — beruht zum Teil auf der Feststellung, daß die „reguläre Operation“:

$$y_n = aE(x_n) + (1 - a)\mathfrak{M}_1(x_n) \quad (\text{wo: } E(x_n) \equiv x_n)$$

für $\Re(a) > 0$ „reversibel“ ist (a. a. O., S. 453), mit anderen Worten, daß nicht nur aus der Existenz eines endlichen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ diejenige eines damit gleichwertigen $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ folgt, sondern daß auch das umgekehrte gilt. Es ist mir neuerdings gelungen, den sehr sinnreichen, immerhin auf verhältnismäßig schwierigen Sonderbetrachtungen beruhenden Schurschen Beweis²⁾ dieses

¹⁾ Math. Ann. 74 (1913), S. 447. Zu der daselbst S. 448 angeführten Literatur ist inzwischen noch ein Beweis des fraglichen Satzes von Herrn Georg Faber gekommen, welcher ungefähr gleichzeitig mit dem Schurschen Beweise und zwar im Jahrgange 1913 dieser Berichte (S. 519) erschienen ist.

²⁾ Herr Schur erwähnt (a. a. O. S. 453, Fußnote) noch einen Beweis des obigen Satzes für reelle a von Herrn J. Mercer (Proc. Lond. Math. Soc. (2), 5, p. 206) und für beliebige a von Herrn G. H. Hardy

merkwürdigen Sates, der offenbar eine wichtige Ergänzung zu einem bekannten Cauchyschen Grenzwertsatze liefert, durch einen überaus einfachen und völlig elementaren zu ersetzen, welcher sich in Nr. 4 der folgenden Mitteilung findet.

Für den zunächst vorliegenden Zweck, den oben genannten Äquivalenzbeweis, kommt lediglich ein besonderer Fall dieses allgemeinen Grenzwertsatzes zur Anwendung, nämlich der Fall

$\alpha = \frac{1}{k}$, wo k eine natürliche Zahl bedeutet. Herr Edmund

Landau, der in seiner kürzlich veröffentlichten lehrreichen und dankenswerten Schrift über einige neuere Ergebnisse der Funktionentheorie¹⁾ u. a. auch eine abgekürzte Darstellung jenes Schurschen Äquivalenzbeweises gibt, behandelt diesen Spezialfall in Gestalt von zwei Hilfssätzen, die er seiner Darstellung voranschickt (a. a. S. S. 30). Aber auch der von ihm gegebene, von den allgemeinen Schurschen Betrachtungen unabhängige Beweis läßt sich durch einen wesentlich natürlicheren und einfacheren ersetzen (s. Nr. 3 am Ende). Im übrigen bedient sich leider Herr Landau in der erwähnten Schrift, wie seit einigen Jahren in allen seinen Arbeiten, zur Kennzeichnung von Grenzwertbeziehungen und der damit vorzunehmenden Operationen gewisser teils von englischen Mathematikern übernommener, teils wohl frei erfundener Bezeichnungen und eines daran anknüpfenden Algorithmus, welche für den nicht vollständig daran gewöhnten die Nachprüfung der einzelnen Schlußfolgerungen zu einer recht zeitraubenden Beschäftigung machen. Es mag sein, daß diese Bezeichnungen für heuristische Zwecke sich als besonders geeignet erweisen und daß sie gewisse Vorzüge besitzen, wenn es sich nicht um bloße Grenzwert-Beziehungen, sondern um asymptotische Ab-

(Quart. Journ. 43, p. 143). Beide Beweise sind mir unbekannt und zur Zeit nicht erreichbar. Über einen lediglich auf reelle a bezüglichen, im Anschlusse an die Schursche Arbeit erschienenen Beweis des Herrn K. Knopp vgl. die Fußnote 2 auf S. 221 dieser Mitteilung.

¹⁾ Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916.

schätzungen handelt, bei denen die Größenordnung der vernachlässigten Bestandteile eine maßgebende Rolle spielt. Aber ich kann darin keinen ausreichenden Grund erblicken, um auch überall da, wo es nicht den geringsten Vorteil mit sich bringt, altbewährte und jedermann geläufige Bezeichnungen mit einer Konsequenz, die einer besseren Sache würdig wäre, auszumerzen und durch neue (nach meinem Dafürhalten recht wenig charakteristische) zu ersetzen. Und ich würde es aufrichtig bedauern, wenn jüngere Mathematiker, die ja erfahrungsgemäß nicht selten eine etwas übertriebene Neigung zeigen, sich der neuesten „Errungenschaften“ zu bemächtigen, in ähnlichem Sinne fortfahren sollten, das gewohnte Bild funktionentheoretischer Untersuchungen in wenig erfreulicher Weise zu verändern.

Da ich annehmen möchte, daß die vollkommene Gewöhnung an die Landauschen Bezeichnungen auch einigen anderen Mathematikern nicht ganz leicht fällt und daß es unter diesen sogar solche gibt, welche den dazu erforderlichen Zeitaufwand bisher gescheut haben, so glaubte ich den letzteren einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn ich mich nicht damit begnüge, an dieser Stelle die oben angekündigten Beweisvereinfachungen mitzuteilen, sondern diese Gelegenheit benütze, um den ganzen Schur-Landauschen Äquivalenzbeweis mit den mir zweckdienlich erscheinenden Vorbereitungen in möglichst einfacher Form darzustellen.

1. Das arithmetische Mittel von n als beliebig komplex zu denkenden Zahlen $x_0, x_1 \dots x_n$ möge mit $\mathfrak{M}(x_n)$ bezeichnet werden, also:

$$(I_1) \quad \mathfrak{M}(x_n) = \frac{1}{n+1} (x_0 + x_1 + \dots + x_n),$$

das arithmetische Mittel von $\mathfrak{M}(x_0), \mathfrak{M}(x_1) \dots \mathfrak{M}(x_n)$ mit $\mathfrak{M}_2(x_n)$, also:

$$(I_2) \quad \mathfrak{M}_2(x_n) = \frac{1}{n+1} (\mathfrak{M}(x_0) + \mathfrak{M}(x_1) + \dots + \mathfrak{M}(x_n)),$$

und allgemein werde gesetzt:

$$(1) \quad \mathfrak{M}_\kappa(x_n) = \frac{1}{n+1} (\mathfrak{M}_{\kappa-1}(x_0) + \mathfrak{M}_{\kappa-1}(x_1) + \cdots + \mathfrak{M}_{\kappa-1}(x_n)).$$

Diese letzte, zunächst nur für $\kappa \geq 3$ einen Sinn habende Beziehung gilt auch noch für $\kappa = 2$ bzw. $\kappa = 1$, wenn man $\mathfrak{M}_1(x_v)$ mit $\mathfrak{M}(x_v)$ bzw. $\mathfrak{M}_0(x_v)$ mit x_v identifiziert¹⁾.

Ist sodann $\sum a_v$ eine unendliche Reihe mit komplexen Gliedern und im Falle ihrer Konvergenz:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = s,$$

so hat man auf Grund eines bekannten Cauchyschen Grenzwertsatzes auch:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_1(s_n) = s$$

und durch sukzessive Anwendung des nämlichen Satzes allgemein:

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\kappa(s_n) = s \quad (\kappa \geq 1).$$

Dagegen zieht die Existenz von Gl. (2) nicht umgekehrt diejenige von Gl. (1) nach sich und ebensowenig folgt aus der Existenz von Gl. (3) für irgend ein bestimmtes $\kappa = k > 1$ diejenige für irgend ein $\kappa < k$, insbesondere nicht die Konvergenz der Reihe $\sum a_v$. Es liegt nahe, einen solchen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\kappa(s_n) = s$, da er ja im Falle der Konvergenz mit der Summe der Reihe übereinstimmen würde, im Falle der Divergenz²⁾ bei passender Gelegenheit als eine Art Ersatz

¹⁾ Analog wie man z. B. beim Gebrauche der logarithmischen Infinitärtypen zu setzen pflegt:

$$\lg_1 x \equiv \lg x, \quad \lg_0 x \equiv x.$$

²⁾ Selbstverständlich kann die fragliche Eventualität nur im Falle uneigentlicher Divergenz eintreten, d. h. wenn von den beiden Reihen

$$\sum a_v, \quad \sum \beta_v \quad (\text{wo: } a_v + \beta_v i = a_v)$$

keine nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. Im entgegengesetzten Falle ist, wie jener Cauchysche Satz lehrt, für jedes κ auch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\kappa(s_n) = \infty.$$

für die fehlende Summe zu betrachten, ohne deshalb die wenig empfehlenswerte Mode mitzumachen, die betreffende Reihe schlechthin als summabel („lucus a non lucendo“) zu bezeichnen. Wir wollen etwa, wenn $\varkappa = k \geq 1$ der kleinste Index der fraglichen Art ist, uns des Ausdruckes bedienen, die betreffende Reihe sei durch k fache Mittelbildung reducibel und s der ihr zugeordnete Grenzwert.

2. Das Bildungsgesetz der iterierten Mittelwerte $\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ gestaltet sich bei wachsendem \varkappa infolge des bei jedem einzelnen Mittelwerthe auftretenden Nenners äußerst verwickelt. Es erscheint daher für die Berechnung des einer reduciblen divergenten Reihe zugeordneten Grenzwertes nützlich, daß die Grenzwerte der iterierten Mittelbildungen sich durch diejenigen wesentlich einfacher gearteter Iterationen ersetzen lassen.

Es werde gesetzt:

$$(II) \quad \begin{cases} s_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \dots + s_n \\ s_n^{(2)} = s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \dots + s_n^{(1)} \\ \dots \\ s_n^{(\varkappa)} = s_0^{(\varkappa-1)} + s_1^{(\varkappa-1)} + \dots + s_n^{(\varkappa-1)}. \end{cases}$$

Dabei umfaßt die letzte zunächst nur für $\varkappa \geq 2$ gültige Beziehung auch den Fall $\varkappa = 1$, wenn man $s_v^{(0)}$ ($v = 0, 1 \dots n$) die Bedeutung von s_v beilegt. Ferner hat man:

$$(4) \quad \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1(s_n).$$

Fährt man nun hiervon ausgehend in der Weise fort, daß man die nächste Mittelbildung nicht auf die Ausdrücke $\frac{s_v^{(1)}}{v+1}$ ($v = 0, 1 \dots n$), sondern lediglich auf die s_v ausübt, so resultiert:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \dots + s_n^{(1)}}{n+1} = \frac{s_n^{(2)}}{(n+1)^2}$$

und bei weiterer Fortsetzung dieses Prozesses eine Folge von Ausdrücken von der Form:

$$\frac{s_n^{(\alpha)}}{(n+1)^\alpha} \quad (\alpha = 2, 3 \dots).$$

Auf Grund der Stolz'schen Verallgemeinerung¹⁾ des bereits oben erwähnten Cauchyschen Grenzwertsatzes findet man sodann für $k \geq 1$:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(\alpha)}}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(\alpha)} - s_{n-1}^{(\alpha)}}{(n+1)^\alpha - n^\alpha},$$

falls der rechts auftretende Grenzwert existiert. Nun ist aber:

$$\begin{aligned} s_n^{(\alpha)} - s_{n-1}^{(\alpha)} &= \sum_0^n s_r^{(\alpha-1)} - \sum_0^{n-1} s_r^{(\alpha-1)} = s_n^{(\alpha-1)} \\ (n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \right) \\ &\simeq \alpha \cdot n^{\alpha-1} \simeq \alpha (n+1)^{\alpha-1}, \end{aligned}$$

so daß die Gleichung (5) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(\alpha)}}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(\alpha-1)}}{\alpha (n+1)^{\alpha-1}},$$

immer unter der Voraussetzung, daß der rechts stehende Grenzwert existiert.

Ist nun die Reihe $\sum a_n$ konvergent und s ihre Summe, also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(0)} = s,$$

so folgt aus Gl. (6) sukzessive:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(2)}}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} s, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^{(3)}}{(n+1)^3} = \frac{1}{2 \cdot 3} s, \dots$$

und daher allgemein:

¹⁾ Math. Ann. 14 (1879), S. 234: Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Abt. I (1904), S. 31.

²⁾ Eine Beziehung von der Form:

$$a_n \simeq b_n$$

hat die Bedeutung von:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varkappa! s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = s \quad (\varkappa = 1, 2, 3 \dots).$$

Wenn dagegen $\sum a_\nu$ (uneigentlich) divergiert und für irgend ein $\varkappa = k \geq 2$ eine Beziehung von der Form (7) besteht, so kann man diesen Grenzwert mit demselben Maße von Berechtigung, wie zuvor im analogen Falle den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(x_n)$, als Ersatz für die fehlende Summe der Reihe $\sum a_\nu$ ansehen. Dabei steht es offenbar noch frei, den Faktor $\frac{\varkappa!}{(n+1)^\varkappa}$ für jedes \varkappa durch einen ihm infinitär gleichen zu ersetzen, der sich für die weiteren Betrachtungen als zweckmäßiger erweist, nämlich durch den reciproken Wert des Binomial-Koeffizienten $(n+\varkappa)_\varkappa$, wegen:

$$\frac{(n+1)^\varkappa}{\varkappa!} \simeq \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\varkappa)}{1 \cdot 2 \cdots \varkappa} = (n+\varkappa)_\varkappa.$$

Setzt man hiernach für $\varkappa = 1, 2, 3 \dots$:

$$(8) \quad S_n^{(\varkappa)} = \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa)^\varkappa} \left(\text{also speziell: } S_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1(s_n) \right),$$

so besteht gleichzeitig mit jeder einzelnen der Beziehungen (7) ($\varkappa = 1, 2, 3 \dots$) die entsprechende folgende:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(\varkappa)} = s$$

und umgekehrt.

Da die Bildung der $S_n^{(\varkappa)}$ im wesentlichen (d. h. lediglich abgesehen von der Hinzufügung des Konvergenzfaktors $\frac{1}{(n+\varkappa)_\varkappa}$) auf einer iterierten Summation beruht, so wollen wir, falls eine Beziehung von der Form (9) für einen gewissen kleinsten Index $\varkappa = k \geq 2$ (und sodann nach Gl. (6) für jedes $\varkappa > k$) besteht, sagen, die betreffende Reihe sei durch k -fach iterierte Summation reducibel und s der ihr zugeordnete Grenzwert.

Es erscheint nun wichtig, festzustellen, daß die beiden im vorstehenden besprochenen Reduktions-Möglichkeiten stets das-

selbe Resultat liefern bzw. auch gleichzeitig versagen, mit anderen Worten, daß aus der für irgend ein bestimmtes $k \geq 2^1)$ gemachten Annahme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = s \quad (\text{„Cesàroscher“ Grenzwert})$$

allemaal folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s \quad (\text{„Hölderscher“ Grenzwert})$$

und umgekehrt. Ist dieser Nachweis geführt, so wird man eine divergente Reihe schlechthin als reducibel von der Ordnung k mit dem Grenzwert s bezeichnen können, unabhängig davon, ob zunächst nur die Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s$$

oder von $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = s$ feststeht.

3. Die Grundlage des fraglichen Nachweises bildet eine Rekursionsformel, welche eine einfache Beziehung zwischen $S_n^{(\kappa-1)}$, $S_n^{(\kappa)}$ und $\mathfrak{M}(S_n^{(\kappa)})$ herstellt.

Aus (II) folgt für $\kappa \geq 1$:

$$S_n^{(\kappa-1)} = S_n^{(\kappa)} - S_{n-1}^{(\kappa)},$$

also:

$$\begin{aligned} S_n^{(\kappa-1)} &\equiv \frac{S_n^{(\kappa-1)}}{(n + \kappa - 1)_{\kappa-1}} = \frac{S_n^{(\kappa)}}{(n + \kappa - 1)_{\kappa-1}} - \frac{S_{n-1}^{(\kappa)}}{(n + \kappa - 1)_{\kappa-1}} \\ &= \frac{n + \kappa}{\kappa} \cdot \frac{S_n^{(\kappa)}}{(n + \kappa)_{\kappa}} - \frac{n}{\kappa} \cdot \frac{S_{n-1}^{(\kappa)}}{(n - 1 + \kappa)_{\kappa}} \\ &= \frac{n + \kappa}{\kappa} \cdot S_n^{(\kappa)} - \frac{n}{\kappa} \cdot S_{n-1}^{(\kappa)} \\ &= \frac{1}{\kappa} ((n + 1) S_n^{(\kappa)} - n S_{n-1}^{(\kappa)}) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot S_n^{(\kappa)}. \end{aligned}$$

¹⁾ Der Fall $k = 1$ würde ja nur auf die bereits erledigte Mittelbildung $\mathfrak{M}_1(s_n)$ führen (s. Gl. (4)).

Ersetzt man n sukzessive durch $n - 1, n - 2 \dots 1$, addiert die resultierenden Gleichungen zu der vorstehenden und dazu noch die Identität:

$$S_0^{(\kappa-1)} = \frac{1}{\kappa} \cdot S_0^{(\kappa)} + \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot S_0^{(\kappa)} \quad (\text{wegen: } S_0^{(\kappa)} = S_0^{(\kappa-1)} = s_0),$$

so ergibt sich:

$$\sum_0^n S_v^{(\kappa-1)} = \frac{1}{\kappa} (n+1) S_n^{(\kappa)} + \frac{\kappa-1}{\kappa} \sum_0^n S_v^{(\kappa)}$$

und durch Division mit $(n+1)$:

$$(10) \quad \mathfrak{M}(S_n^{(\kappa-1)}) = \frac{1}{\kappa} \cdot S_n^{(\kappa)} + \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathfrak{M}(S_n^{(\kappa)}) \\ = \mathfrak{I}_\kappa(S_n^{(\kappa)}),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(11) \quad \mathfrak{I}_\kappa(x_n) = \frac{1}{\kappa} x_n + \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathfrak{M}(x_n).$$

Wird jetzt aus $\mathfrak{I}_\kappa(x_0), \mathfrak{I}_\kappa(x_1) \dots \mathfrak{I}_\kappa(x_n)$ das arithmetische Mittel gebildet, so ergibt sich, wenn man beachtet, daß offenbar allgemein:

$$\mathfrak{M}(ax_n + \beta y_n) = a \mathfrak{M}(x_n) + \beta \mathfrak{M}(y_n),$$

aus Gl. (11):

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{I}_\kappa(x_n)) = \frac{1}{\kappa} \mathfrak{M}(x_n) + \frac{\kappa-1}{\kappa} \mathfrak{M}_2(x_n) = \mathfrak{I}_\kappa(\mathfrak{M}(x_n)),$$

wofür wir mit Weglassung der äußeren Klammer schreiben wollen:

$$(12) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{I}_\kappa(x_n) = \mathfrak{I}_\kappa \mathfrak{M}(x_n).$$

Ersetzt man ferner x_n in dem Ausdrucke $\mathfrak{I}_\kappa(x_n)$ durch $\mathfrak{I}_\lambda(x_n)$ und schreibt wieder: $\mathfrak{I}_\kappa \mathfrak{I}_\lambda(x_n)$ statt: $\mathfrak{I}_\kappa(\mathfrak{I}_\lambda(x_n))$ bzw. $\mathfrak{M} \mathfrak{I}_\lambda(x_n)$ statt: $\mathfrak{M}(\mathfrak{I}_\lambda(x_n))$, so folgt aus Gl. (12):

$$(13) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{I}_\kappa \mathfrak{I}_\lambda(x_n) = \mathfrak{I}_\kappa \mathfrak{M} \mathfrak{I}_\lambda(x_n) = \mathfrak{I}_\kappa \mathfrak{I}_\lambda \mathfrak{M}(x_n)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise allgemein:

$$(14) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{I}_{x_1} \mathfrak{I}_{x_2} \dots \mathfrak{I}_{x_m} (x_n) = \mathfrak{I}_{x_1} \mathfrak{I}_{x_2} \dots \mathfrak{I}_{x_m} \mathfrak{M} (x_n).$$

Mit Benützung dieses Ergebnisses folgt aus Gl. (10) durch Bildung des arithmetischen Mittels von $\mathfrak{M} (S_n^{(\alpha-1)})$, $\mathfrak{M} (S_1^{(\alpha-1)}) \dots \mathfrak{M} (S_n^{(\alpha-1)})$:

$$\mathfrak{M}_2 (S_n^{(\alpha-1)}) = \mathfrak{M} \mathfrak{I}_x (S_n^{(\alpha)}) = \mathfrak{I}_x \mathfrak{M} (S_n^{(\alpha)}),$$

also durch nochmalige Benützung der Rekursionsformel (10), wenn man daselbst α durch $\alpha + 1$ ersetzt:

$$(15) \quad \mathfrak{M}_2 (S_n^{(\alpha-1)}) = \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_{x+1} (S_n^{(\alpha+1)}).$$

Ebenso findet man durch nochmalige Mittelbildung aus Gl. (15)

$$\mathfrak{M}_3 (S_n^{(\alpha-1)}) = \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_{x+1} \mathfrak{M} (S_n^{(\alpha+1)}) = \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_{x+1} \mathfrak{I}_{x+2} (S_n^{(\alpha+2)})$$

und durch Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$(16) \quad \mathfrak{M}_{k-1} (S_n^{(\alpha-1)}) = \mathfrak{I}_x \mathfrak{I}_{x+1} \dots \mathfrak{I}_{x+k-2} (S_n^{(\alpha+k-2)}),$$

also für $\alpha = 2$, wenn man noch beachtet, daß $S_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1 (s_n)$ (s. Gl. (4)):

$$(17) \quad \mathfrak{M}_k (s_n) = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_3 \dots \mathfrak{I}_k (S_n^{(k)}),$$

eine Formel, welche also eine explicite Darstellung von $\mathfrak{M}_k (s_n)$ durch $S_n^{(k)}$ liefert.

Nun folgt aus der Definitionsgleichung (11), da nach dem erwähnten Cauchyschen Satze gleichzeitig mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M} (x_n) = s$, ohne weiteres, daß:

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{I}_x (x_n) = s, \text{ wenn: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s.$$

Wird also zunächst angenommen, daß

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = s,$$

so findet man sukzessive:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) &= s \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_{k-1} \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) &= s \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 \dots \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) &= s \end{aligned}$$

d. h. mit Benützung von Gl. (17):

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_k(x_n) = s.$$

Kann noch nachgewiesen werden, daß die Beziehungen (18) umkehrbar sind, daß also:

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s, \text{ wenn: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_\kappa(x_n) = s^1),$$

so würde aus der zur Voraussetzung gemachten Gleichung (20), also mit Benützung von Gl. (17) aus der Voraussetzung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 \dots \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) = s$$

sukzessive folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_3 \mathfrak{X}_4 \dots \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) = s$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_4 \dots \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) = s$$

.....

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_k(S_n^{(k)}) = s$$

und schließlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = s,$$

womit dann die in Frage stehende Äquivalenz der beiden Kategorien von Grenzwerten vollständig bewiesen wäre.

Der noch fehlende Nachweis für die Richtigkeit der in den Gleichungen (21) enthaltenen Behauptung läßt sich folgender-

¹⁾ D. h. für irgend ein $\kappa \geq 2$ (für $\kappa = 1$ hätte man ja nach Gl. (11) geradezu: $x_n \equiv \mathfrak{X}_1(x_n)$, also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}_1(x_n) = s$).

maßen bewerkstelligen. Angenommen man habe für irgend ein bestimmtes $\varkappa \geq 2$:

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{I}_\varkappa(x_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varkappa} \cdot x_n + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \mathfrak{M}(x_n) \right) = s.$$

Aus der Definitionsgleichung (I₁) folgt, daß:

$$x_n = (n + 1) \mathfrak{M}(x_n) - n \mathfrak{M}(x_{n-1})$$

und daher:

$$\mathfrak{I}_\varkappa(x_n) = \frac{(n + \varkappa) \mathfrak{M}(x_n) - n \mathfrak{M}(x_{n-1})}{\varkappa}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit dem Faktor

$$(n + \varkappa - 1)(n + \varkappa - 2) \dots (n + 1)$$

und benützt für das im Nenner stehende \varkappa die Identität:

$$\varkappa = (n + \varkappa) - n,$$

so nimmt die Voraussetzung (22) die Form an:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \varkappa)(n + \varkappa - 1) \dots (n + 1) \mathfrak{M}(x_n) - (n + \varkappa - 1)(n + \varkappa - 2) \dots n \mathfrak{M}(x_{n-1})}{(n + \varkappa)(n + \varkappa - 1) \dots (n + 1) - (n + \varkappa - 1)(n + \varkappa - 2) \dots n} = s,$$

und man findet daher mit Benützung des bereits oben erwähnten Stolz'schen Grenzwertsatzes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \varkappa)(n + \varkappa - 1) \dots (n + 1)}{(n + \varkappa)(n + \varkappa - 1) \dots (n + 1)} \mathfrak{M}(x_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}(x_n) = s.$$

Durch Einsetzen dieses Grenzwertes in die Voraussetzung (22) folgt sodann, wie behauptet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s.$$

4. Der letzte Teil des vorhergehenden Beweises ist als Spezialfall in dem folgenden allgemeineren Grenzwertsatze enthalten:

Sind a, b beliebige komplexe Zahlen, welche nur der Beschränkung

$$(23) \quad \Re\left(\frac{a}{a+b}\right) > 0$$

unterworfen sind¹⁾, so hat man:

$$(24) \quad (a+b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n + b \mathfrak{M}(x_n)),$$

sobald nur feststeht, daß *einer* dieser beiden Grenzwerte eine bestimmte Zahl vorstellt²⁾.

Beweis. Wird zunächst die Existenz eines endlichen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ vorausgesetzt, so lehrt der Cauchysche Grenzwertsatz, daß auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, woraus dann die Richtigkeit der Beziehung (24) unmittelbar hervorgeht. Dieser Teil der ausgesprochenen Behauptung enthält also nichts neues und wurde nur der Vollständigkeit halber in die Fassung des Satzes aufgenommen.

Es werde nun zweitens vorausgesetzt, daß der Grenzwert auf der rechten Seite von Gl. (24) (im engeren Sinne) existiere, und zwar möge er mit $(a+b)s$ bezeichnet werden, so daß also:

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a+b} \cdot x_n + \frac{b}{a+b} \cdot \mathfrak{M}(x_n) \right) = s$$

oder auch:

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{X}(x_n) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c} \cdot x_n + \left(1 - \frac{1}{c}\right) \mathfrak{M}(x_n) \right) = s,$$

wenn gesetzt wird:

$$(27) \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{c}, \text{ also: } \frac{b}{a+b} = 1 - \frac{1}{c}, \text{ wo jetzt: } \Re(c) > 0.$$

¹⁾ Damit ist also schon implicite gesagt, daß nicht nur $|a| > 0$, sondern auch $|a+b| > 0$, da ja andernfalls $\frac{a}{a+b}$ sinnlos wäre.

²⁾ Für reelle x_n und a, b bzw. reelles c (s. Gl. (26)) wurde der Satz von Herrn Knopp (Math. Ann. 74, S. 459) durch Untersuchung der vorhandenen Grenzmöglichkeiten indirekt bewiesen. Das betreffende Ergebnis läßt sich dann leicht auf den Fall übertragen, daß die x_n oder a, b komplex sind. Es versagt aber vollständig, wenn die x_n und a, b als komplex angenommen werden.

Führt man wiederum (s. oben hinten Gl. (22)) die Beziehung ein:

$$x_n = (n + 1) \mathfrak{M}(x_n) - n \mathfrak{M}(x_{n-1}),$$

so ergibt sich:

$$\mathfrak{X}(x_n) = \frac{(c + n) \mathfrak{M}(x_n) - n \mathfrak{M}_{n-1}(x_{n-1})}{c}$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem Faktor

$$\frac{(c + n - 1)(c + n - 2) \dots (c + 1)}{1 \cdot 2 \dots (n - 1)} \cdot \frac{1}{n}$$

multipliziert:

$$\mathfrak{X}(x_n) = \frac{(c + n)_n \mathfrak{M}(x_n) - (c + n - 1)_{n-1} \mathfrak{M}(x_{n-1})}{(c + n - 1)_n}.$$

Mit Benützung der bekannten Rekursionsformel:

$$(c + n)_n = (c + n - 1)_{n-1} + (c + n - 1)_n$$

läßt sich dann die Voraussetzung (26) in die folgende Form setzen:

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c + n)_n \mathfrak{M}(x_n) - (c + n - 1)_{n-1} \mathfrak{M}(x_{n-1})}{(c + n)_n - (c + n - 1)_{n-1}} = s.$$

Ist c reell und zwar (in Folge der Beschränkung $\Re(c) > 0$) wesentlich positiv, so würde aus dieser Beziehung gerade so, wie in Nr. 3 für den besonderen Fall $c = k$ (d. h. ganzzahlig) auf Grund des dort benützten Stolz'schen Grenzwertsatzes sich folgern lassen, daß:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c + n)_n \mathfrak{M}(x_n)}{(c + n)_n} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}(x_n) = s.$$

Das gleiche ergibt sich aber auch für komplexes c mit Hülfe einer von Herrn Jensen¹⁾ herrührenden Verallgemeinerung des Stolz'schen Satzes, welche folgendermaßen ausge-

1) Par. C. R. 106 (1888), p. 834; s. auch: O. Stolz, Math. Ann. 33 (1889), S. 239 oder meine Vorlesungen über Zahlenlehre (Leipzig 1916), S. 231. (Der dort zunächst für reelle a_ν , b gegebene Beweis gilt unverändert auch für komplexe a_ν , b_ν).

sprochen werden kann: „Versteht man unter a_ν, b_ν ($\nu = 0, 1, 2 \dots$) irgend welche reelle oder komplexe Zahlenfolgen, ist ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{b_n} \cdot \sum_1^n |b_\nu - b_{\nu-1}| \right|$ endlich, so hat man:

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}},$$

falls der rechts stehende Grenzwert endlich ausfällt“.

In der Tat sind die den Zahlen b_ν auferlegten Bedingungen erfüllt, wenn gesetzt wird: $b_\nu = (c + \nu)_\nu$. Man hat nämlich:

$$|(c + n)_n| = \frac{|c + 1|}{1} \cdot \frac{|c + 2|}{2} \dots \frac{|c + n|}{n},$$

und, da $|c + n| > n$ (wegen: $\Re(c) > 0$), so findet man zunächst, daß $|(c + n)_n|$ gleichzeitig mit n monoton zunimmt. Da überdies, wenn $c = \gamma + \delta i$ (wo: $\gamma > 0$) gesetzt wird, sich ergibt:

$$|(c + n)_n| > \left(1 + \frac{\gamma}{1}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^1$$

und das rechts stehende Produkt für $n \rightarrow \infty$ nach $+\infty$ divergiert, so folgt, wie behauptet:

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |(c + n)_n| = +\infty.$$

Ferner ergibt sich:

$$\left| \frac{1}{(c+n)_n} \cdot \sum_1^n |(c+\nu)_\nu - (c+\nu-1)_{\nu-1}| \right| = \frac{1}{|(c+n)_n|} \cdot \sum_1^n |(c+\nu-1)_\nu|,$$

also, da $|(c + n)_n|$ mit n monoton ins Unendliche wächst, wiederum mit Benützung des Stolzischen Grenzwertsatzes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|(c+n)_n|} \cdot \sum_1^n |(c+\nu-1)_\nu| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(c+n-1)_n|}{|(c+n)_n| - |(c+n-1)_{n-1}|},$$

1) Will man den oben bereits erledigten Fall eines reellen c , also den Fall $c = \gamma$ mit einschließen, so wäre das Ungleichheitszeichen lediglich durch das Zeichen \geq zu ersetzen, wodurch die weiteren Schlüsse keinerlei Änderung erleiden.

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. Man findet aber, wenn man zunächst Zähler und Nenner mit $n!$ multipliziert:

$$\begin{aligned} \frac{|(c+n-1)_n|}{|(c+n)_n| - |(c+n-1)_{n-1}|} &= \frac{|c+n-1| \cdots |c+1| \cdot |c|}{|c+n| \cdot |c+n-1| \cdots |c+1| - |c+n-1| \cdots |c+1| \cdot n} \\ &= \frac{|c|}{|c+n| - n} \\ &= |c| \cdot \frac{|c+n| + n}{|c+n|^2 - n^2} \\ &= |c| \cdot \frac{|c+n| + n}{2\gamma n + \gamma^2 + \delta^2}, \end{aligned}$$

also:

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|(c+n)_n|} \cdot \sum_1^n |(c+r-1)_r| = \frac{|c|}{\gamma}.$$

Da somit die Voraussetzungen des obigen Jensenschen Satzes für den Grenzwert (28) erfüllt sind, so ergibt sich mit Benützung von Gl. (29):

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c+n)_n \mathfrak{M}(x_n)}{(c+n)_n} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}(x_n) = s$$

und daher nach Gl. (25):

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$$

oder auch in Übereinstimmung mit der Behauptung (24):

$$(a+b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (ax_n + b\mathfrak{M}(x_n)),$$

falls der rechts stehende Grenzwert eine bestimmte Zahl (nämlich die mit $(a+b)s$ bezeichnete) vorstellt.