Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft II

November- und Dezembersitzung

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität.

Von **Hans Mohrmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. November 1916.

I. Vorbemerkungen.

Der in gestaltlicher Hinsicht einfachste Zug einer (stetig) gekrümmten Kurve der projektiven Ebene ist die (algebraische oder nicht-algebraische) Kurve 2. Ordnung. Sie ist paar und besitzt keine singuläre Tangente. Der einfachste Zug einer (stetig) gewundenen Kurve im projektiven Raum ist die Kurve 3. Ordnung. Sie ist unpaar und besitzt keine singuläre Schmiegungsebene. Der einfachste unpaare Zug einer ebenen Kurve ist von der 3. Ordnung und besitzt, wenn die Kurve von Doppelpunkten und Ecken frei ist, nach einem von Möbius (Werke, Bd. II) aufgestellten Satze notwendig drei reelle stationäre Tangenten (Wendepunkte)[1]. Man ist geneigt, in Analogie zu vermuten, der paare Zug — von der 4. Ordnung — einer gewundenen Kurve ohne singulären Punkt besitze vier reelle stationäre Schmiegungsebenen. In der Tat gibt es auch, wie bekannt, Ovale dieser Beschaffenheit. Allein es handelt sich dabei um eine nicht einmal für ganz im Endlichen gelegene Ovale notwendige Eigenschaft. Es gibt nämlich solche allerdings mit reellen Trisecanten behaftete Ovale unter den unicursalen Kurven 4. Ordnung 2. Art, die keine reellen sta-

[1] Nach einem von Herrn Kneser (Mathem. Ann., Bd. 41, S. 376) bewiesenen Satze kann eine Kurve 3. Ordnung auch nicht mehr als 3 Wendepunkte besitzen.

tionären Schmiegungsebenen aufweisen. Es sind dies die Kurven 4. Ordnung mit 4 reellen die Kurve in einem weiteren Punkte treffenden Tangenten. Überdies lehrt das Beispiel der von Herrn Rohn behandelten und modellierten[1]) Kurve 4. Ordnung 2. Art ohne reelle stationäre Ebene und ohne reelle, die Kurve in einem weiteren Punkte treffende Tangente die Möglichkeit von unicursalen (rationalen) Kurven 4. Ordnung ohne singulären Punkt, die auf keine Weise durch reelle Kollineationen ganz ins Endliche gelegt werden können. Solche Kurven 4. Ordnung sind vom (Maximal-)Index 2, wenn man als Index einer Kurve bzw. eines Kurvenzuges n. Ordnung die geringste Anzahl reeller Punkte bezeichnet, in denen sie von einer reellen Ebene geschnitten werden kann.

Offenbar gilt hier allgemein für beliebiges n der

Satz I. Eine algebraische oder nicht-algebraische gewundene Kurve n. Ordnung vom Maximalindex $n-2$ (welche also von keiner reellen Ebene ihres Normalraumes in mehr als n und weniger als $n-2$ reellen Punkten geschnitten wird) kann weder eine reelle stationäre Ebene, noch eine reelle 2-fach berührende Ebene, noch auch (folglich) eine reelle stationäre Tangente oder eine die Kurve in einem weiteren Punkte treffende reelle Tangente besitzen.

Die Existenz algebraischer gewundener Kurven vom Maximalindex folgt aus einem Satze von Hrn. J. v. Sz. Nagy[2]). Die Kurven n. Ordnung vom Maximalindex mit der Maximalzahl $n-2$ reeller Züge sind, wie ich dann und zwar für algebraische und nicht-algebraische Kurven (ohne Ecken) gezeigt habe[3]), notwendig frei von Doppel- oder mehrfachen Punkten. Die unicursalen Kurven vom Maximalindex (mit der Maximalzahl reeller Züge) hingegen, welche ich bei meinem (neuen) Beweise des Nagyschen Satzes hergestellt habe, besitzen $n-3$ Doppelpunkte.

[1]) (Brill-)Schillings Katalog mathematischer Modelle, 7. Aufl. (1911), Serie XXI, Nr. 3.

[2]) Mathematische Annalen, Bd. 77, S. 429.

[3]) Mathematische Annalen, Bd. 78.

Ich will nun im folgenden zeigen, daß diese Eigenschaft keineswegs notwendig ist, daß vielmehr auch unicursale Kurven vom Maximalindex ohne irgend einen singulären Punkt existieren, womit zugleich die Existenz von Kurvenzügen beliebig hoher Ordnung ohne irgend eine reelle Punkt-, Tangenten- und Tangentialebenen-Singularität erwiesen sein wird.

II. Existenzbeweis.

Ein auf einem einschaligen Hyperboloid H liegender (reeller) Kegelschnitt k und eine Erzeugende e_1 des Hyperboloids können in ihrer Gesamtheit als (reducible) Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt aufgefaßt werden. Man kann den Doppelpunkt P_1 dieser Kurve in zweifacher Weise auflösen, so daß man eine irreducible gewundene Kurve 3. Ordnung C^3 erhält, welche die Erzeugenden e des Hyperboloids, die mit e_1 einer und derselben Schar angehören, in einem (stets reellen), und die Erzeugenden f der zweiten Schar in zwei reellen oder konjugiert-komplexen Punkten schneidet. Wir wollen den Doppelpunkt P_1 so auflösen, daß die entstehende irreducible C^3 (1, 2) auch von jeder Erzeugenden f in (zwei) reellen Punkten geschnitten wird.

Betrachtet man zwei Wertsysteme

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1, & u_2; & v_1, & v_2 \\ \varrho u_1, & \varrho u_2; & \sigma v_1, & \sigma v_2 \end{cases} \qquad \varrho \neq 0, \quad \sigma \neq 0),$$

wo ϱ und σ voneinander unabhängige Proportionalitätsfaktoren bedeuten, als äquivalent, so kann das Hyperboloid H bei passender Wahl des Koordinatensystems durch Gleichungen der folgenden Form dargestellt werden:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_0 = v_1 u_1 \\ x_1 = v_1 u_2 \\ x_2 = v_2 u_1 \\ x_3 = v_2 u_2. \end{cases}$$

Schließen wir diejenigen Wertsysteme aus, für die gleichzeitig u_1 und u_2 oder v_1 und v_2 verschwinden, so sind die Punkte des Hyperboloids durchaus eindeutig umkehrbar auf die Wertsysteme u, v bezogen. Die Parameter u und v sind daher (Normal-)Koordinaten für das ganze von dem Hyperboloid getragene doppelt-binäre Gebiet.

Jede irreducible algebraische Kurve auf dem Hyperboloid kann durch eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte, gleich Null gesetzte ganze rationale und in dem erklärten Sinne homogene Funktion der Koordinaten u, v rein dargestellt werden[1]).

Ist in diesen Koordinaten

$$(1,1) \equiv a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_1v_2 + a_{21}u_2v_1 + a_{22}u_2v_2 = 0 \tag{3}$$

die Gleichung des Kegelschnitts k,

$$(0,1)_1 \equiv a_1u_1 + a_2u_2 = 0 \tag{4}$$

diejenige der Erzeugenden e_1, so wird die gewünschte gewundene Kurve 3. Ordnung C^3 durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$(1,2) \equiv (1,1)\cdot(0,1)_1 + \varepsilon_1 u_2^2 v_2 = 0, \tag{5}$$

wo ε_1 eine ihrem absoluten Betrage nach hinreichend kleine Zahl bedeutet und das Vorzeichen von ε_1 so zu wählen ist, daß die durch den (reellen) Schnittpunkt P_1 von (3) und (4) hindurchgehende Erzeugende f_1 die entstehende Kurve (5) in der Nähe des Punktes P_1 in (zwei) reellen Punkten schneidet.

Ist nun

$$(0,1)_2 \equiv b_1u_1 + b_2u_2 = 0 \tag{6}$$

die Gleichung einer weiteren, dem System der e angehörenden Erzeugenden e_2 des Hyperboloids (2), welche also die C^3 (5) in einem (reellen) Punkte P_2 schneidet, so stellt die Gleichung

$$(1,3) \equiv (1,2)\cdot(0,1)_2 \pm \varepsilon_2 u_2^3 v_2 = 0 \tag{7}$$

---

1) Vgl. Mohrmann, Bestimmung aller Normalflächen mit transitiven automorphen Gruppen von projektiven Transformationen, Rend. Circ. mat. d. Palermo XXXII (1911), S. 180 ff.

bei passender Wahl von ε_2 eine irreducible Kurve 4. Ordnung dar, welche, wenn das Vorzeichen von ε_2 so gewählt wird, daß die durch P_2 hindurchgehende Erzeugende f_2 die Kurve (7) in der Nähe des Punktes P_2 in (zwei) reellen Punkten schneidet, von jeder Erzeugenden e in einem, und von jeder Erzeugenden f in drei reellen Punkten geschnitten wird usw.

Durch beliebig häufige Wiederholung des gleichen Prozesses gelangt man so zu dem folgenden

Satz 2. Auf einem Hyperboloid gibt es irreducible algebraische Kurven $(1, n-1)$ beliebig hoher Ordnung n, welche von jeder Erzeugenden e der einen Schar in einem, und von **jeder** Erzeugenden f der anderen Schar in $n-1$ **reellen** Punkten geschnitten werden.

III. Das stereographische Bild.

Nun wird behauptet, daß diese Kurven (des 2. Satzes) die gesuchten unicursalen Kurven vom Maximalindex $n-2$ sind. Daß die Kurven unicursal sind, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Erzeugung (kann aber auch leicht durch Abzählung ihrer scheinbaren Doppelpunkte auf Grund der Plueckerschen Formeln erschlossen werden). Es bleibt also nur noch übrig, zu zeigen, daß sie von keiner reellen Ebene des Raumes, in dem sie liegen, in weniger als $n-2$ reellen Punkten geschnitten werden.

Zu diesem Zwecke projizieren wir das Hyperboloid samt den auf ihm liegenden Kurven aus einem seiner Punkte O in allgemeiner Lage auf eine nicht durch O hindurchgehende Ebene (stereographisch). Die Bildpunkte der durch O hindurchgehenden Erzeugenden e und f, die Fundamentalpunkte der Abbildung, seien E und F. Alsdann sind die Bildkurven der Kurven $C^n(1, n-1)$ des Hyperboloids ebene Kurven c^n, welche E einfach und F als $(n-1)$-fachen Punkt mit $n-1$ (notwendig) getrennten reellen Ästen enthalten (und keinen weiteren singulären Punkt besitzen). Die Erzeugenden e bilden sich auf das Strahlenbüschel (F) mit F als Mittelpunkt, und die Erzeugenden f auf das Büschel (E) mit E als Scheitel ab.

Zerschneidet man die Bildkurve c^n in ihrem $(n-1)$-fachen Punkte F (durch einen Kreis mit verschwindendem Radius und F als Mittelpunkt), so zerfällt c^n in $n-1$ Züge (mit Ecken im Zerschneidungspunkte F). Da jeder Strahl des Büschels (E) die c^n außer in E in $n-1$ weiteren reellen Punkten schneidet, so kann höchstens einer jener Züge paar sein. Andererseits muß aber, da der Maximalindex einer (ebenen) Kurve n. Ordnung $n-2$ beträgt, auch mindestens einer der $n-1$ Züge der in F zerschnittenen c^n paar sein. Es ist daher notwendig genau ein Zug paar und zwar von der zweiten Ordnung.

Da ferner jede Gerade durch E die Bildkurve c^n in $n-1$ weiteren reellen Punkten schneidet, so muß E notwendig gerade auf jenem paaren Zuge der in F zerschnittenen c^n liegen. Das gibt den

Satz 3. Projiziert man eine auf einem Hyperboloid gelegene irreducible (algebraische oder nicht-algebraische) Kurve $(1, n-1)$ der n. Ordnung, welche jede Erzeugende der einen Schar in einem, und jede Erzeugende der anderen Schar in $n-1$ reellen Punkten schneidet, aus einem Punkte allgemeiner Lage des Hyperboloids auf eine nicht durch das Projektionszentrum hindurchgehende Ebene (stereographisch), so erhält man eine ebene Kurve c^n von der n. Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkte F mit $n-1$ getrennten reellen Ästen, die, in diesem Punkte F zerschnitten, in $n-2$ unpaare und einen paaren reellen Kurvenzug (mit Ecken im Zerschneidungspunkte F) zerfällt. Von den Fundamentalpunkten der Abbildung liegt der eine in F, während der andere E notwendig auf dem paaren Zuge (von der Ordnung 2) der in F zerschnittenen Bildkurve c^n liegt.

IV. Beweis des Hauptsatzes.

Auf Grund des soeben formulierten 3. Satzes ist es nun nicht schwer, die aufgestellte Behauptung, daß die Kurven $(1, n-1)$ des ersten Satzes vom Maximalindex $n-2$ sind, zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß jede reelle Ebene des Raumes mit jenen Kurven mindestens $n-2$ reelle Punkte gemein hat.

Für die Tangentialebenen des Hyperboloids, auf dem die Kurven liegen, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Voraussetzung. — Die Ebenen allgemeiner Lage schneiden irreducible Kegelschnitte aus dem Hyperboloid aus, deren Bilder die Kegelschnitte der ∞^3-Schar sind, welche die Punkte E und F, die Fundamentalpunkte der Abbildung, zu Basispunkten hat. Aus der Tatsache (des 3. Satzes) nun, daß E auf dem paaren Zuge der in F zerschnittenen Bildkurve c^n liegt (III), folgt aber unschwer, daß jeder irreducible Kegelschnitt der eben genannten ∞^3-Schar jene Bildkurve außer in E und F, wie es sein muß, in mindestens $n-2$ reellen Punkten schneidet (von denen [höchstens] drei an F heranrücken können).

Da nämlich der Punkt F für die Bildkurve c^n $(n-1)$-fach mit n getrennten reellen Ästen ist, so gehen von F immer genau $n-1$ Zweige der Kurve aus, die in der Nähe von F auf einer und derselben Seite einer beliebigen Geraden g durch F verlaufen. Ist die Gerade g also Tangente eines durch E und F hindurchgehenden Kegelschnitts, so sind demnach nur zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder verläuft g ganz außerhalb des paaren Zuges (2. Ordnung) der in F zerschnittenen Bildkurve c^n: dann brauchen zwar nur $(n-1)-2=n-3$ der $n-2$ unpaaren Züge von dem Kegelschnitt geschnitten zu werden. Allein dann wird notwendig der paare Zug außer in E (und F) noch in einem weiteren reellen Punkte geschnitten, da der Kegelschnitt nach Voraussetzung bei F ganz außerhalb des paaren Zuges verläuft. Oder die Tangente g des Kegelschnitts (in F) dringt bei F in das Innere des paaren Zuges ein: dann werden notwendig sämtliche $n-2$ unpaaren Züge (außer in F) in wenigstens einem weiteren reellen Punkte geschnitten; denn ein unpaarer Kurvenzug, der einen Punkt im Inneren eines paaren Zuges enthält (es dringen bei F $n-2$ Zweige unpaarer Züge in das Innere des Kegelschnitts ein), hat mindestens 2 reelle Punkte mit dem paaren Zuge gemein (jeder der $n-2$ Zweige außer F also mindestens noch einen). In jedem Falle hat demnach ein Kegelschnitt, der durch E und F hindurchgeht, mit der Bildkurve c^n außer E und F noch mindestens $n-2$ reelle Punkte gemein.

Da nun aber, wie schon gesagt, die Kegelschnitts-∞^3-Schar durch E und F das Bild des ebenen Schnittsystems des Hyperboloids ist, auf dem die Original-C^n $(1, n-1)$ liegt, so folgt[1]) endlich der

Satz 4. Eine auf einem Hyperboloid gelegene Kurve n. Ordnung $(1, n-1)$, welche jede Erzeugende der einen Schar in 1, und **jede** Erzeugende der anderen Schar in $n-1$ (stets) reellen Punkten schneidet, hat mit jeder Ebene des Raumes (in dem sie liegt) mindestens $n-2$ reelle Punkte gemein: sie ist vom Maximalindex, womit auf Grund von Satz 1 die Existenz unicursaler Kurven beliebig hoher Ordnung n ohne reelle singuläre Punkte, Tangenten und Tangentialebenen erwiesen ist.

V. Unabhängigkeit vom algebraischen Charakter.

Zum Schluß sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß zum Beweise der vorstehenden Sätze, abgesehen von dem Existenzbeweise algebraischer auf dem Hyperboloid gelegener Kurven $(1, n-1)$, welche jede Erzeugende der einen Schar in einem und jede Erzeugende der anderen Schar in $n-1$ reellen Punkten schneiden, von algebraischen Hilfsmitteln keinerlei Gebrauch gemacht ist. Die in dieser Arbeit behandelten gestaltlichen Fragen sind daher von der algebraischen Natur der betrachteten Kurven durchaus unabhängig.

[1]) Ein zweiter Beweis ergibt sich auf Grund von Satz 3, wenn man beachtet, daß das Projektionszentrum ein beliebiger Punkt allgemeiner Lage auf dem Hyperboloid ist, aus der Tatsache, daß den ∞^2 Kegelschnitten auf dem Hyperboloid, welche durch das Projektionszentrum hindurchgehen, die ∞^2 geraden Linien der Bildebene entsprechen.