Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1916
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Bildbeziehungen zwischen Kegelschnitten, die einander nach höherer als erster Ordnung berühren.

Von **E. v. Mecenseffy.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. Mai 1916.

Für altbekannt und längst bewiesen darf gelten:

Wenn zwei Kegelschnitte sich in vier wirklichen (reellen) Punkten schneiden und vier wirkliche Berührende gemein haben, lassen sie sich immer gleichzeitig als Ellipsen abbilden, einer davon sogar als Kreis. Sie sind dann ohne weiteres strahlverwandt (kollinear) und liegen bildhaft (perspektiv) zueinander. Jede der sechs gemeinsamen Sehnen ist Verwandtschaftsachse, jeder der sechs Schnittpunkte der gemeinsamen Berührenden ist Strahlenfluchtpunkt (Kollineationszentrum).

Die sechs Achsen schneiden einander, außer in den vier Kurvenpunkten, noch in drei weiteren „Achsenfluchtpunkten“, den Ecken des gemeinsamen Polardreiecks der beiden Kegelschnitte, d. h. drei ihnen gemeinsamen Polen. Durch diese gehen überdies noch je zwei von den drei Verbindungsgeraden der Strahlenfluchtpunkte, die außer den vier gemeinsamen Berührenden noch möglich sind, also der „Fluchtlinien“: es sind die zu jenen Polen gehörigen gemeinsamen Polaren.

Achsen und Strahlenfluchtpunkte sind einander paarweise zugeordnet, so daß zu einer Achse eines Paares dieselben zwei Strahlenfluchtpunkte gehören wie zur anderen und umgekehrt. Gepaart sind immer diejenigen Achsen, die einen Achsenfluchtpunkt, und diejenigen Strahlenfluchtpunkte, die eine Fluchtlinie miteinander gemein haben. Jedes Achsenpaar ist demjenigen Strahlenfluchtpunktpaar zugeordnet, auf dessen Fluchtlinie sein Schnittpunkt nicht liegt.

Jedem Punkte des einen Kegelschnittes können somit zwölf verschiedene Punkte des anderen entsprechen, je nach Wahl der Achse und des Strahlenfluchtpunktes.

Die Bezeichnungen: „Strahlenfluchtpunkt“, „Achsenfluchtpunkt“ und „Fluchtlinie“ ergeben sich sehr ungezwungen, wenn man in Bild 1 die Darstellung in der Mitte („m.“) als Schaubild (Zentralprojektion) des Nebenbildes links oben („l. o.“) ansieht. Ich vermute, daß ihre Einbürgerung namentlich für Lehrzwecke dem leichteren Verständnis dienlich sein möchte.

Im Hauptbild sind durch einen beliebigen Kreispunkt A die sechs Verwandtschaftsstrahlen gezogen. Für jeden Strahlenfluchtpunkt ergibt dies zwei dem A entsprechende Ellipsenpunkte, die im Bilde mit ihm gleiche Zeiger haben, aber je nach der betreffenden Achse durch römische und Rundschrift unterschieden sind. Es gehören also zum Strahlenfluchtpunkt F_2 die Punkte A_2 durch die Achse II, $\mathfrak{a}_2$ durch die Achse I. Außerdem ist die Art der Zuordnung durch die Berührenden in allen fraglichen Punkten kenntlich gemacht, die einander auf den jeweiligen Achsen treffen. Gleiches gilt auch für Bild 2.

Wir haben in unserem Bilde 1 m. ein Abbild desjenigen allgemeinen Falles vor uns, von dem alle Berührungen höherer Ordnung Sonderfälle sind. Alles, was wir daraus ableiten, dürfen wir ohne weiteres auf alle Kegelschnitte verallgemeinern; denn es handelt sich nur um Lagebeziehungen, die durch keinerlei Abbildung geändert werden.

Es ist klar, daß an diesen Dingen sich auch dann nichts ändert, wenn etwa ein Strahlenfluchtpnnkt ins Unendliche rückt, wie z. B. F_1 in Bild 1 rechts oben (r. o.). Nur kommt noch dazu, daß jeder einer zugeordneten Achse gleichlaufenden

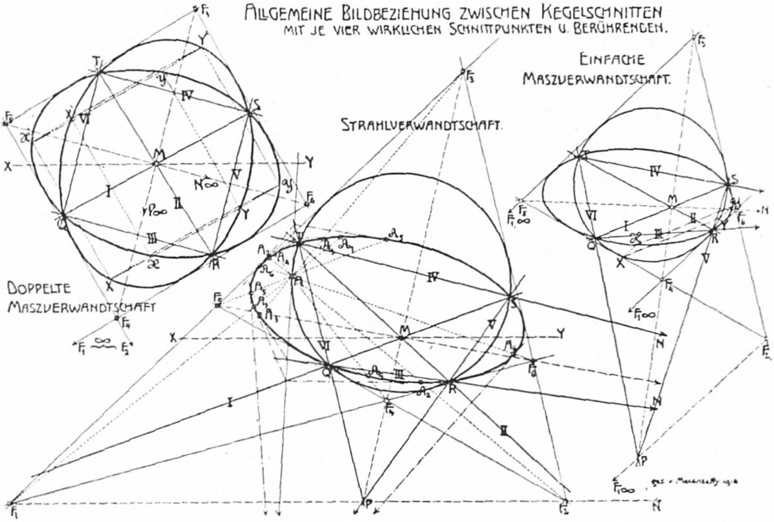
ALLGEMEINE BILDBEZIEHUNG ZWISCHEN KEGELSCHNITTEN
MIT JE VIER WIRKLICHEN SCHNITTPUNKTEN U. BERÜHRENDEN.
EINFACHE MASZVERWANDTSCHAFT.
STRAHLVERWANDTSCHAFT.
DOPPELTE MASZVERWANDTSCHAFT

Bild 1.

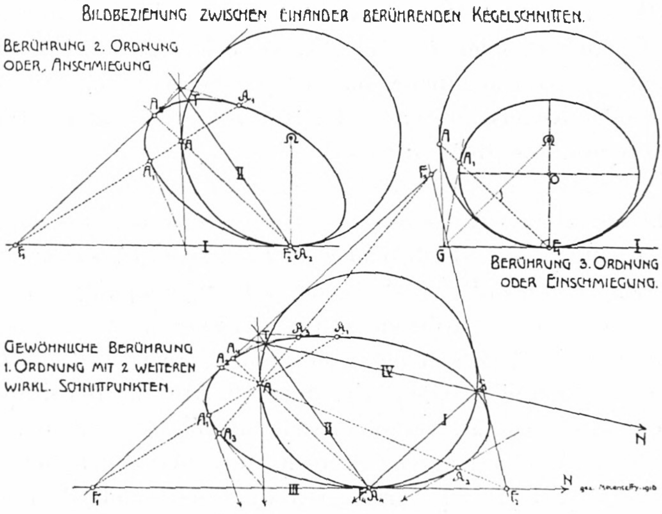
BILDBEZIEHUNG ZWISCHEN EINANDER BERÜHRENDEN KEGELSCHNITTEN.
BERÜHRUNG 2. ORDNUNG ODER ANSCHMIEGUNG
BERÜHRUNG 3. ORDNUNG ODER EINSCHMIEGUNG.
GEWÖHNLICHE BERÜHRUNG 1. ORDNUNG MIT 2 WEITEREN WIRKL. SCHNITTPUNKTEN.

Bild 2.

Strecke XY im Bereich der einen Kurve, auch im Bereich der anderen eine gleichlaufende und gleichlange $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ entspricht. Es handelt sich dann, aber blos für den einen Strahlenfluchtpunkt und seine beiden Achsen, um Maßverwandtschaft (Affinität). Dieselben beiden Achsen geben mit dem anderen zugeordneten Strahlenfluchtpunkt nur gewöhnliche Strahlverwandtschaft.

Rückt auch noch ein zweiter Strahlenfluchtpunkt ins Unendliche, so entsteht ein Verhältnis wie im Nebenbild 1 l. o.: Die gleichlange und gleichgerichtete Strecke findet sich auch in der zweiten Strahlenrichtung bei $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$, und umgekehrt im Bereich der ersten Kurve eine zweite solche Strecke $X'Y'$, die sowohl gegen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ als auch gegen $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ bildhaft liegt. Dies ist dann doppelte Maßverwandtschaft.

Liegen die ins Unendliche gerückten Strahlenfluchtpunkte auf einer gemeinsamen Berührenden, so werden beide Kurven zu Parabeln. Zwei Parabeln sind also ohne weiteres maßverwandt, und sogar dreifach, wenn sie vier wirkliche Schnittpunkte haben.

Wären die unendlich weit abrückenden Fluchtpunktpaare aber F_3 und F_4 oder F_5 und F_6, so fielen gleichzeitig auch F_1 und F_2 ins Unendliche, das dritte Paar aber auf den Umfang beider Kegelschnitte, so daß Doppelberührung entstünde, wovon später die Rede sein soll.

Nun aber denken wir uns im Bild 1 m. die Fluchtlinie gleichlaufend zu sich selbst so lange verschoben, bis sie den Kreis berührt. Die Berührenden F_1F_3 und F_2F_3 sollen dabei ihre Lage beibehalten, wie auch der Schnittpunkt T. Die Ellipse wird sich natürlich etwas verändern. Die Schnittpunkte Q und R rücken einander immer näher, ebenso M, P und F_4; schließlich fallen alle fünf Punkte im Berührungspunkt zusammen. F_5 vereinigt sich mit F_1, F_6 mit F_2.

Da die beiden Kurven nunmehr die zwei unendlich benachbarten und in F_4 vereinigten Punkte Q und R miteinander und mit der F_1F_2 gemein haben, berühren sie einander und zugleich die Gerade F_1F_2, in der sich zwei gemeinsame Berührende, $F_1 F_6$ und $F_2 F_5$ mit den Fluchtlinien MN und NP, sowie der Achse QR vereinigt haben. Diese gleichsam doppelte gemeinsame Berührende wollen wir die Mitberührende der beiden Kurven nennen. Ihr Berührungspunkt F_4 steht also in Bild 2 m. u. für die zwei unendlich benachbarten Punkte Q und R, somit auch er allein für die kurzen Bogenstücke QR auf beiden Kurven in Bild 1 m., während die dortigen langen Bogenstücke QR sich in Bild 2 m. u. zu dem ganzen Umfang der betreffenden Kurven ausgewachsen haben. Daraus folgt für die Strahlverwandtschaft hinsichtlich des Strahlenfluchtpunktes F_4 und der Achse III, daß der Berührungspunkt F_4 des Kreises für sich allein dem ganzen Umfang der Ellipse entspricht und derselbe Punkt $\mathfrak{A}_4$ der Ellipse dem ganzen Kreisumfang.

Wir fassen das Erkannte zusammen, wie folgt:

Zwei einander berührende Kegelschnitte können außer ihrem Berührungspunkt nur noch zwei wirkliche Punkte und außer ihrer Mitberührenden nur noch zwei wirkliche Berührende gemein haben. In diesem Falle bilden die Mitberührende und die nicht durch den Berührungspunkt gehende gemeinsame Sehne ein Achsenpaar, dem der Berührungspunkt selbst und der nicht auf der Mitberührenden liegende Strahlfluchtpunkt zugeordnet sind. Die Zuordnung zwischen der Mitberührenden und dem Berührungspunkt ist aber derart, daß immer dem ganzen Umfang des einen Kegelschnittes am anderen nur der einzige Berührungspunkt entspricht. Das zweite Achsenpaar schneidet sich im Berührungspunkt und das ihm zugeordnete Paar Strahlenfluchtpunkte liegt auf der Mitberührenden.

Jedem Punkte des einen Kegelschnittes können acht verschiedene Punkte des anderen entsprechen; oder sieben, wenn man den Berührungspunkt nicht mitzählt.

Auch in diesem Falle könnte einfache Maßverwandtschaft dadurch entstehen, daß einer der drei Strahlenfluchtpunkte F_1, F_2 oder F_3 ins Unendliche rückt.

Jene Fälle doppelter Maßverwandtschaft, bei denen F_1 und F_3, oder F_2 und F_3 unendlich fern liegen, betreffen Parabeln.

Rücken F_1 und F_2 ins Unendliche, so gibt es ebenfalls eine doppelte Maßverwandtschaft. Da aber F_1 und F_2 auch auf derselben Geraden III liegen, so fallen sie nunmehr zusammen. Dies Letztere, auch wenn es im Endlichen geschieht, ist das Merkmal der Doppelberührung; T, S und F_3 fallen dann am Ende der vereinigten Sehnen I und II im zweiten Berührungspunkt zusammen.

Halten wir dagegen T fest und lassen S auf dem Kreisumfang immer näher an F_4 heranrücken, bis es ihm unendlich nahe benachbart ist, so wird auch F_2 nach dem Berührungspunkt F_4 gelangt sein, ebenso der letzte Achsenfluchtpunkt N. Die Achse I ist mit III, IV mit II zusammengefallen. Der Strahlenfluchtpunkt F_3 aber ist zunächst bis ins Unendliche von F_1 weg, dann aber von der anderen Seite wieder darauf zu gewandert, bis er sich schließlich mit F_1 vereinigte. Dieses Ergebnis zeigt Bild 2 l. o.

Nachdem nunmehr an der Berührungsstelle F_2 drei den beiden Kurven gemeinsame Punkte in unendlich naher Nachbarschaft vereinigt sind, handelt es sich zwischen Ellipse und Kreis um eine Berührung zweiter Ordnung oder Anschmiegung (Oskulation). Der Kreis ist zum Krümmungskreis der Ellipse geworden, sein Mittelpunkt Ω zum Krümmungsmittelpunkt. Von den ursprünglichen vier gemeinsamen Berührenden sind drei, die drei Fluchtlinien aber sämtlich in die Mitberührende gefallen. Diese vereinigt endlich auch drei der Achsen: I, III und V, in sich, während II, IV und VI mit der nunmehr einzigen gemeinsamen Sehne F_2T zusammengefallen sind. An den verschiedenen Paarungen und Zuordnungen hat sich aber nichts geändert, so daß folgende Beziehungen festgestellt werden dürfen:

Ist die Berührung zwischen zwei Kegelschnitten von höherer als erster Ordnung, so liegen alle möglichen Strahlenfluchtpunkte auf der Mitberührenden.

Im Falle der Anschmiegung oder Berührung zweiter Ordnung ist nur ein Doppelpaar von Achsen und Strahlenfluchtpunkten vorhanden: Außer der Mitberührenden selbst die einzige gemeinsame Sehne, und außer dem Berührungspunkt noch irgend ein Punkt der Mitberührenden. Die Zuordnung zwischen dem Berührungspunkt und der Mitberührenden ist von derselben Art wie bei Berührung erster Ordnung. Jedem Punkte eines der Kegelschnitte können somit vier des anderen entsprechen; oder drei, wenn man den Berührungspunkt nicht mitzählt.

Der einzige außer dem Berührungspunkt noch mögliche gemeinsame Punkt muß notwendig wirklich sein. Denn da die vier gemeinsamen Punkte nur paarweise wirklich oder unwirklich werden können und drei davon, weil der Berührungsstelle unendlich benachbart, schon wirklich sind, muß es auch der vierte sein. Genau dasselbe gilt von der einzigen außer der Mitberührenden möglichen gemeinsamen Berührenden, weil die Mitberührende allein schon die übrigen drei enthält. Aus beidem folgt, daß die beiden Kurven im Berührungspunkt die Seiten tauschen: die links davon außen war, ist rechts innen, und umgekehrt. Erstens diese bekannte Tatsache, die unter keinen anderen Umständen eintritt; dann das Vorhandensein einer Strahlverwandtschaft mit Bezug auf die Mitberührende als Achse und einen auf ihr liegenden Strahlenfluchtpunkt; drittens eine andere Strahlverwandtschaft mit Bezug auf den Berührungspunkt als Strahlenfluchtpunkt und eine durch ihn gehende gemeinsame Sehne als Achse: diese drei Erscheinungen, die unter keinen anderen Umständen eintreten, können also jede für sich als genügendes Kennzeichen für eine Berührung zweiter Ordnung zwischen Kegelschnitten gelten und bedingen einander wechselseitig.

Rückt der Strahlenfluchtpunkt F_1 ins Unendliche, so ergibt sich Maßverwandtschaft. Gleichliegende, zu I gleichlaufende Strecken fallen in ihrer Richtung zusammen, verschieben sich also nur auf demselben zur Mitberührenden gleichlaufenden Strahl.

Rückt der Schnittpunkt T auf dem Kreise gegen F_2, bis er diesem unendlich benachbart ist, so entsteht die Berührung dritter Ordnung oder Einschmiegung. Der Strahlenfluchtpunkt F_1 fällt mit F_2, die Verwandtschaftsachse II mit I zusammen. Hieraus folgt:

Berühren sich zwei Kegelschnitte nach dritter Ordnung, handelt es sich also um eine Einschmiegung, so gibt es nur eine Achse, die Mitberührende, und nur einen Strahlenfluchtpunkt, den Berührungspunkt selbst. Die Zuordnung zwischen beiden ist doppelt: Einmal die bei allen Berührungen stattfindende, aber praktisch belanglose, daß dem ganzen Umfange des einen Kegelschnittes am anderen der einzige Berührungspunkt entspricht. Außerdem aber entspricht mit Bezug auf dieselbe Achse und denselben Strahlenfluchtpunkt jedem Umfangspunkt des einen Kegelschnittes ein einziger Umfangspunkt des anderen.

Bild 2 r. o. zeigt diese Art der Strahlverwandtschaft. Sie ist das untrügliche Kennzeichen für die Berührung dritter Ordnung, der innigsten, die es bei Kegelschnitten gibt; denn ein fünfter gemeinsamer Punkt, ob unendlich benachbart oder nicht, müßte die Kurven zur Deckung bringen.

Maßverwandtschaft ist hier undenkbar, weil der Strahlenfluchtpunkt an die Berührungsstelle gebunden ist.

Wir haben als Bleibendes im Wechsel einen Kreis angenommen; dieser ist zu dem Berührungslot in F_1 (Bild 2 r. o.) spiegelhälftig (rechtwinklig symmetrisch). Da nun der Strahlenfluchtpunkt in der Spiegelachse (Symmetrieachse) $F_1 \Omega$ liegt und die Verwandtschaftsachse I dazu winkelrecht ist, muß auch die strahlverwandte Kurve zu $F_1 \Omega$ spiegelhälftig sein, also $F_1 \Omega$ eine Ellipsenachse und F_1 ein Scheitel. Daraus folgt, daß am Scheitel eines Kegelschnittes mit dem Krümmungskreise Berührung dritter Ordnung stattfindet; daß ferner zwei Kegelschnitte einander in ihren Scheiteln nicht nach zweiter, sondern nur nach erster oder nach dritter Ordnung berühren können.

Aus Bild 2 r. o. folgt auch sofort eine wertvolle Anwendung unseres Satzes. Der Verwandtschaftsstrahl $F_1 A_1 A$ ist zugleich Sehne der Ellipse und ihres Krümmungskreises. Die Berührenden in A und A_1 schneiden sich auf der Verwandtschaftsachse in G. Verbindet man G mit Ω, so ist

$$G\Omega \perp F_1 A.$$

Ist demnach ein Kegelschnitt durch einen Scheitel nebst der Achsenrichtung, sowie einen beliebigen zweiten Punkt nebst der daselbst Berührenden gegeben, so ist das Sehnenlot aus dem Schnittpunkt der beiden Berührenden geometrischer Ort für den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels.

Sind beide gegebenen Punkte Scheitel, so ergibt sich diese altbekannte Beziehung: Das Lot zur Scheitelsehne aus deren Pol ist geometrischer Ort für die Krümmungsmittelpunkte beider Scheitel.

Denken wir uns aus dem Gebilde in Bild 2 r. o. durch Strahlverwandtschaft, zwar mit Bezug auf die Achse I, aber auf einen beliebig gewählten Strahlenfluchtpunkt, ein anderes abgeleitet, so ändert sich an der Berührung dritter Ordnung nichts; die Spiegelhälftigkeit aber wird in Schräghälftigkeit (schiefe Symmetrie) übergehen, wenn der Strahlenfluchtpunkt nicht gerade zufällig in der Spiegelachse $F_1\,\Omega'$ gewählt wurde. Demnach müssen bei Berührung dritter Ordnung die Durchmesser des Berührungspunktes für beide Kegelschnitte zusammenfallen.

Der Inhalt des Bildes 2 r. o. läßt sich auch so aussprechen:

Die Pollote aller durch einen Kegelschnittscheitel gelegten Sehnen schneiden einander im Krümmungsmittelpunkte dieses Scheitels.

Wie verträgt sich dies mit dem von Pelz[1]) erweiterten Steinerschen Satze: Die Pollote aller durch irgend einen Umfangspunkt eines Kegelschnittes gelegten Sehnen werden von

[1]) In den Sitzungsberichten der Kgl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1879, S. 210.

einer Parabel umhüllt? Sehr gut, denn diese sogenannte Steinersche Parabel artet für den Scheitel eines Kegelschnittes in einen Halbstrahl aus, der, vom Krümmungsmittelpunkt ausgehend, zur Scheitelberührenden gleichläuft; natürlich wiederholt er sich spiegelgleich zu der betreffenden Achse.

Zum Beweise der behaupteten Ausartung der Steinerschen Parabel diene, daß ihre Leitgerade (Direktrix) der Durchmesser des betreffenden Kegelschnittpunktes ist, während in der Schar der Pollote sich naturgemäß beide Achsen, sowie die Berührende und ihr Lot im gegebenen Punkte befinden. Das letztere berührt die Steinersche Parabel im Krümmungsmittelpunkte. Für einen Scheitel fallen nun das Berührungslot und die eine Achse des Kegelschnittes, also zwei Berührende der Parabel, mit deren Leitgeraden zusammen, wodurch die Ausartung bewiesen ist.[1])

In Bild 3 l. sind von einem Kegelschnitt ein Scheitel A und ein zweiter Punkt B nebst den Berührenden gegeben und der Krümmungsmittelpunkt Ω_a des Scheitels durch $C\Omega_a \perp AB$ bestimmt. Mit Hilfe der Steinerschen Parabel und des Satzes von Brianchon läßt sich sofort der Krümmungsmittelpunkt Ω_b finden. Von der Steinerschen Parabel sind fünf Berührende

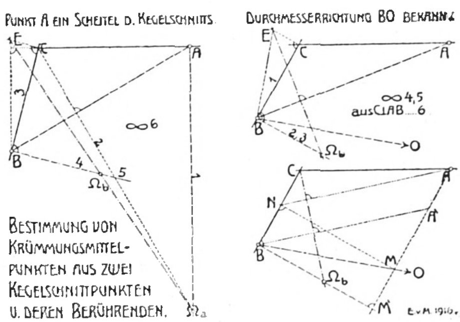

Bild 3.

[1]) Pelz geht a. a. O. darauf nicht ein; auch die hier und im folgenden angegebenen Verfahren finden sich bei ihm nicht.

gegeben: Die Achse $A\Omega_a$ (1), das Pollot $C\Omega_a$ der Sehne AB (2), die Berührende BC (3), das Berührungslot in B (4, 5) und die unendlich ferne Gerade (6). Man zieht

$$\mathrm{I}\left\{\begin{matrix}6,1\\3,4\end{matrix}\right. \text{ nämlich } BE \parallel A\Omega_a, \text{ dann II}\left\{\begin{matrix}2,3\\5,6\end{matrix}\right. \text{ nämlich } CE \perp BC$$

und erhält damit den Brianchonschen Punkt E. Die Verbindung $E\Omega_a$, nämlich III $\left\{\begin{matrix}1,2\\4,5\end{matrix}\right.$ ergibt als Schnitt mit dem Berührungslot den Krümmungsmittelpunkt.

Dieses Verfahren leistet namentlich beim Aufreißen von Korbbogen gute Dienste, wie in meiner demnächst[1]) erscheinenden Schrift gezeigt wird. Ebenda findet sich ein rechnerischer Beweis aus der Scheitelgleichung des Kegelschnittes.

Wäre A, wie in Bild 3 r. o., kein Scheitel, sondern irgend ein anderer Kegelschnittpunkt, dafür aber die Richtung des Durchmessers BO bekannt, so ist letzterer die Leitgerade der Steinerschen Parabel, somit deren Achsrichtung gegeben, und man darf der unendlich fernen Geraden zwei Nummern beilegen (4, 5), während das — nicht gezeichnete — Pollot auf AB mit 6 bezeichnet sei. Die Berührende erhalte die Nummer 1, das Berührungslot 2, 3. Dann geben

$$\mathrm{I}\left\{\begin{matrix}1,2\\4,5\end{matrix}\right. \text{ nämlich } BE \perp BO \text{ und II}\left\{\begin{matrix}6,1\\3,4\end{matrix}\right. \text{ nämlich } CE \perp BC$$

den Brianchonschen Punkt E, während man $E\Omega_b \perp BA$, d. h. III $\left\{\begin{matrix}5,6\\2,3\end{matrix}\right.$ den Krümmungsmittelpunkt Ω_b erhält.

Unabhängig von der Steinerschen Parabel läßt sich dieselbe Aufgabe lösen, wie in Bild 3 r. u. durchgeführt. Man benutzt dabei den in dieser Schrift bewiesenen Satz über die Berührung zweiter Ordnung, indem man sich MA nach $M'A'$ verschoben denkt. Dadurch würde B zum Scheitel eines dem gegebenen maßverwandten Kegelschnittes, der BM zur Achse

[1]) Bei Wilh. Ernst & Sohn, Berlin, sofort nach Beendigung des Krieges: „Abhandlungen aus der Geometrie des Baumeisters", Heft 1.

und BA' zur Sehne hätte; der Krümmungsmittelpunkt für B bliebe derselbe wie bei der gegebenen Kurve, und der Pol C von BA wäre auch der von BA'. Das Pollot $C\Omega_b \perp BA'$ liefert den Krümmungsmittelpunkt Ω_b. Da es sich somit nur um die Richtung von BA' handelt, vereinfacht sich das Verfahren in: $MN \perp BC$ und $C\Omega_b \perp NA$.

In Bild 4 o. ist die Aufgabe gelöst, einen Kegelschnitt zu suchen, von dem drei Punkte A, B, C und der Krümmungskreis Ω für A gegeben sind.

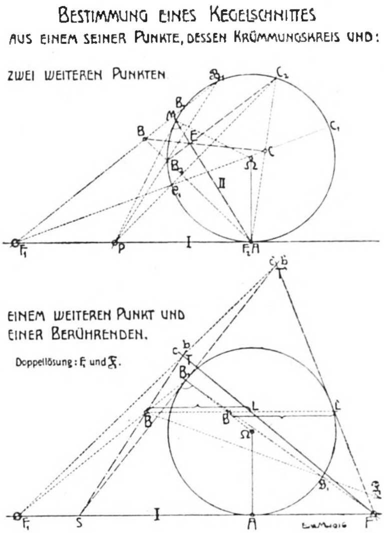

Bild 4.

A als Berührungspunkt ist Strahlenfluchtpunkt F_2, ihm als Achse II zugeordnet die noch unbekannte gemeinsame Sehne. Die Strahlen F_2C und F_2B geben die den C und B entsprechenden Kreispunkte C_2 und B_2, deren Geradverbindung sich mit BC in einem Punkt E der Verwandtschaftsachse, hier der gemeinsamen Sehme, schneiden muß. — Den zweiten Strahlenfluchtpunkt findet man mit Hilfe von $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{B}_1$: Die Berührenden in C_2 und $\mathfrak{C}_1$ müssen sich auf AM, der Achse II, schneiden; also geht $C_2\mathfrak{C}_1$ durch den Pol P von AM mit Bezug auf den Kreis. P ist der Schnitt der Berührenden in M und der Mitberührenden I. F_1 bestimmt sich dann durch den Schnitt von $C\mathfrak{C}_1$ mit I, zugleich erhält man C_1 usw.

Bild 4 u. hat statt C die Berührende c gegeben. Zieht man aus deren Schnitt F' mit I die ihr entsprechende Kreisberührende c', dann $BL' \parallel$ I und trägt BL von L' nach B' auf, so ist durch die Punkte B' und A nebst den Berührenden I und c' ein Kegelschnitt bestimmt, der ebenfalls Ω zum Krümmungskreis hat.

F' ist Strahlenfluchtpunkt für dessen Verwandtschaft mit Ω in Bezug auf die Achse I, darum gibt $F'B'$ in den beiden Schnittpunkten mit Ω die Kreispunkte B_1 und $\mathfrak{B}_1$, die dem B' und damit auch dem Punkt B des gesuchten Kegelschnittes entsprechen. BB_1 und $B\mathfrak{B}_1$ geben die einander ausschließenden Strahlenfluchtpunkte F_1 und $\mathfrak{F}_1$. Eine Nachprüfung ist mit Hilfe der Berührenden in B_1 bzw. $\mathfrak{B}_1$ leicht möglich und für F_1 im Bilde ausgeführt: Man erhält zunächst S und T', dann durch SB auch T; TT' geht durch F_1. Das Weitere ist klar; F_1 gibt eine Ellipse, $\mathfrak{F}_1$ eine Hyperbel.

Daß die Umkehrung der bewiesenen Sätze für Kegelschnitte zurecht besteht, geht aus dem Bisherigen schon hervor. Zwei einander berührenden, aber sonst irgendwie gestalteten Kurven lassen sich zwei Kegelschnitte zuordnen, die mit ihnen jeweils fünf der Berührungsstelle unendlich benachbarte Punkte gemein haben. Waren nun die gegebenen Kurven einander strahlverwandt mit Bezug auf die gerade Mitberührende, so sind es auch die beiden Kegelschnitte untereinander; aus der Lage des Strahlenfluchtpunktes ergibt sich dann die Ordnung ihrer Berührung. Diese aber muß sich ebenso notwendig auf die beiden Urkurven übertragen. Somit ist folgendes bewiesen:

Zwei einander berührende ebene krumme Linien irgend einer Art, die derart strahlverwandt sind und bildhaft liegen, daß sie ihre mitberührende Gerade zur Achse und einen auf dieser liegenden Punkt zum

Strahlenfluchtpunkt haben, berühren sich mindestens nach zweiter Ordnung. Fällt der Strahlenfluchtpunkt mit dem Berührungspunkt zusammen, so ist die Berührung mindestens von dritter Ordnung.

Die nachgewiesenen einfachen Bildbeziehungen sind für die Anwendung, besonders im Bauwesen, sehr fruchtbar. Ich muß mir aber versagen, hier darauf einzugehen und verweise auf meine schon erwähnte, wegen des Krieges leider noch nicht erschienene Schrift.