

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1915

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Eine neue Lösung der Grundaufgabe der Luftphotogrammetrie.

Von S. Finsterwalder.

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1915.

Die Grundaufgabe der Photogrammetrie, von der hier die Rede ist, betrifft die Wiederherstellung des dargestellten Gegenstandes aus zwei Bildern, die mit bekannten Apparaten (bekannter innerer Orientierung) aufgenommen wurden, deren Standpunkte aber unbekannt sind. Zur Wiederherstellung der Form des auf beiden Bildern dargestellten Gegenstandes reichen diese Bilder auch ohne jede Kenntnis der Standpunkte aus, ja die Standpunkte können in ihrer Lage zu dem Gegenstande mitbestimmt werden.¹⁾ Nur um die Größe des dargestellten Gegenstandes festzulegen, ist eine Längenabmessung an ihm notwendig. In den meisten Fällen, insbesondere bei Geländeaufnahmen, ist es jedoch nicht bloß die Größe und Form des dargestellten Gegenstandes, die man haben will, sondern auch noch die Lage gegen die Lotrichtung, ohne deren Kenntnis die gefundene Geländeform fast wertlos wäre. Dazu braucht man aber die Lage und Höhe dreier Punkte des zu findenden Geländes und man kann die Kenntnis derselben als notwendige Voraussetzung für die Lösung der Grundaufgabe in einem solchen Falle ansehen. Ist diese Voraussetzung gegeben, so ist die Lösung vom theoretischen Standpunkt aus ganz wesent-

¹⁾ S. Finsterwalder, Die geom. Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresber. der Deutsch. Math. Vereinigung, 6. Bd., 1899, S. 15.

lich vereinfacht. Während man im anderen Falle die Grundaufgabe bloß auf die vom theoretischen Standpunkt aus fast hoffnungslos verwickelte Aufgabe, zwei sphärische Fünfecke auf der Kugel perspektiv in Bezug auf ein Zentrum zu legen, zurückführen kann,¹⁾ hat man bei der genannten Voraussetzung nur zweimal die Aufgabe 4. Grades zu lösen, welche in dem räumlichen Rückwärtseinschneiden eines Standpunktes nach den drei gegebenen Festpunkten besteht²⁾ und kann dann mittels der ganz elementaren Methode des Vorwärtseinschneidens den abgebildeten Gegenstand punktweise wiederherstellen. Alle hiezu nötigen Verfahren sind längst ausgearbeitet; allein, wenn man sie mit der wünschenswerten Genauigkeit anwenden will, erfordern sie trotz mancher Vereinfachung im einzelnen im ganzen doch sehr viel Mühe und Zeit, so daß nur selten der Wert des Erzielten mit dem dazu nötigen Aufwand in entsprechendem Verhältnis steht. Auch dort, wo der schließliche Wert des Ergebnisses außer Frage steht, schon, weil es auf anderm Wege gar nicht zu erzielen ist, bildet die zu seiner Erzielung notwendige Zeit ein ernstes Hindernis. Außerdem wird die Genauigkeit der lotrechten Abmessungen des Gegenstandes vielfach dadurch ungünstig beeinflusst, daß sie aus den Differenzen großer Zahlen, nämlich der Höhenunterschiede des gesuchten Punktes gegenüber den Standpunkten hervorgehen, wodurch mindestens die Anforderungen an die Rechengenauigkeit unliebsam gesteigert werden. Allen diesen Mißständen geht das folgende Verfahren aus dem Wege, das vorläufig für solche Verhältnisse ausgearbeitet wurde, bei denen Bilder kleinen Gesichtsfeldes vorliegen, wie sie z. B. die heutzutage allein anwendbaren lichtstarken Apparate für Flugzeuge und Lenkballone zulassen. Unter Voraussetzung einen kleinen Gesichtsfeldes versagen übrigens praktisch die früheren Methoden, welche auf der gegenseitigen Orientierung zweier Bilder mittels der

1) S. Finsterwalder, Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie. Abhandlungen d. K. B. Akad. d. Wiss., II. Kl., 22. Bd., 2. Abt., 1903, S. 231 Anmerkung.

2) Vgl. das Zitat auf der vorigen Seite.

gegnerischen Kernpunkte beruhen, während das Rückwärts-einschneiden noch immer genügend genaue Ergebnisse zuläßt.

Wir wollen zunächst das Verfahren für den einfachen Fall auseinandersetzen, wo die drei Festpunkte in einer wagrechten Ebene liegen und die Änderungen, die für den allgemeinen Fall nötig werden, am Schlusse angeben. Das Verfahren besteht aus zwei Teilen: Erstens die Aufsuchung der Standpunkte durch Rückwärtseinschneiden, zweitens die Herstellung des Gegenstandes durch Vorwärtseinschneiden. Für beide Teile kann man mit Erfolg eine optisch-mechanische Projektionsart heranziehen, die von dem ideenreichen Verfechten der Luftphotogrammetrie Th. Scheimpflug¹⁾ stammt und welche ich kurz als Scheimpflugprojektion bezeichnen will. Sie beruht darauf, daß ein richtig zeichnendes Weitwinkelobjektiv jede Ebene scharf und perspektivisch richtig in eine bestimmte andere ihr konjugierte Ebene abbildet, deren Lage einfach anzugeben ist.

Es sei O die Linse mit ihren Brennpunkten B_1 und B_2 und es sei der Einfachheit halber angenommen, daß ihre beiden Hauptpunkte in O zusammenfallen. Die Brennweite sei: $OB_1 = OB_2 = f$, die Punkte A_1 und A_2 befinden sich auf der optischen Achse in doppelter Brennweite. Die Linse bildet dann die Ebene durch A_1 senkrecht zur Achse kongruent in die parallele Ebene durch A_2 und z. B. den Punkt C_1 in C_2 ab. Der in der Brennebene gelegene Punkt F_1 geht in den unendlich fern

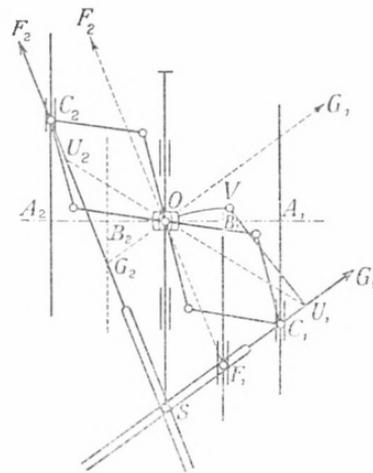


Fig. 1. 2)

¹⁾ Die Herstellung von Karten und Plänen auf photographischem Wege. Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl., 114. Bd., Abt. IIa, 1907. S. 6.

²⁾ In Fig. 1 ist der Bogen OV aus Versehen angezogen, statt punktiert.

gelegenen Punkt F_2 und die Gerade $C_1 F_1$ in $C_2 F_2$ parallel zu $O F_1$ über. $C_1 F_1$ und $C_2 F_2$ schneiden sich im Punkte S und es ist $S F_1 = F_1 C_1$. Gleich wie die Geraden $C_1 F_1$ und $C_2 F_2$ in der Zeichenebene bilden sich auch die durch sie gehenden, zur Zeichenebene senkrecht stehenden Ebenen durch die Linse ineinander ab. Sie sind ein Paar konjugierter Ebenen und können leicht mechanisch mittels folgender Vorrichtungen miteinander in Verbindung gebracht werden. Man macht die Ebenen um Achsen durch C_1 bzw. C_2 senkrecht zur Zeichenebene drehbar. Diese Achsen werden parallel auf den Geraden $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ geführt und außerdem werden C_1 und C_2 durch eine symmetrische „Nürnberger Schere“ mit dem Drehpunkt in O miteinander verbunden. In der Fortsetzung der Ebenen sind geschlitzte Schienen, die einen Stift S umschließen, der selbst wieder auf einer Geraden $O S$ senkrecht zur optischen Achse der Linse geführt wird. Trägt nun die Ebene $C_1 F_1$ ein Negativ und die Ebene $F_2 C_2$ einen Projektionsschirm, so wird die Linse innerhalb ihres nutzbaren Bildwinkels ($60^\circ - 90^\circ$) eine scharfe, perspektivisch richtige Projektion liefern. Das Negativ kann dabei in seiner Ebene beliebig verschoben und gedreht werden. Die Scheimpflug-Projektion gibt (natürlich mit Rücksicht auf die praktischen Grenzen) sämtliche ∞^5 der Form und Größe nach verschiedenen Perspektiven eines ebenen Objektes. Die Lage der Ebene $C_1 F_1$ ist offenbar von zwei, jene des Negativs in der Ebene von drei Größen abhängig. Ist von dem Aufnahmeapparat die innere Orientierung, also Hauptpunkt und Bildweite der damit erzeugten Bilder bekannt, so kommen von den ∞^5 Perspektiven, die die Scheimpflug-Projektion gibt, nur ∞^3 in Betracht, da ein vorgegebenes Strahlenbündel ja nur von ∞^3 Ebenen geschnitten werden kann. Man muß also die Beweglichkeit der vorhin geschilderten Koppelung von Negativ- und Schirmebene vermindern, wenn man die Projektion auf jene Fälle einschränken will, die bei der Aufnahme mit einem bekannten Apparat allein möglich sind. Wir wollen zuerst die einfachen Zusammenhänge zwischen den Abmessungen des Projektions-

apparates und den Angaben über die Art der Bildaufnahme kennen lernen. Es werde eine Kamera von der Bildweite F aus der Höhe h unter der Neigung α gegen die wagrechte Ebene der drei Festpunkte gerichtet. Die Figur 2 bezieht sich auf die Hauptvertikalebene der Aufnahme. M sei der Aufnahmestandpunkt, A der Hauptpunkt der photographischen Platte, also MA die optische Achse der Aufnahme und zugleich die Bildweite F . Dem Punkte K entspricht die Schnittlinie der Bildebene AHK mit der Ebene der Festpunkte, dem Punkte H der Horizont der Aufnahme. Die Entfernungen KH und $KN = HM$ des Horizonts H und der Verschwindungslinie N von der Schnittlinie K drücken sich durch h und α folgendermaßen aus:

$$MN = HK = h : \cos \alpha \quad NK = MH = F : \cos \alpha \\ AH = F \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

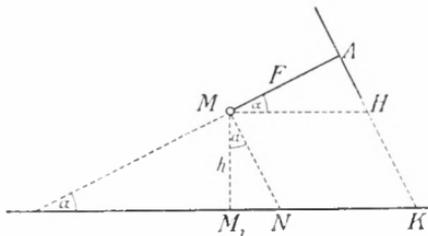


Fig. 2.

In der Scheimpflug-Projektion Fig. 1 entspricht der Punkt F_1 dem Punkte H , der Punkt G_2 dem Punkte N , und der Punkt K dem Punkte S . Damit nun die Scheimpflug-Projektion die Abbildung der Festpunktebene auf die Bildebene der photographischen Kamera wiedergibt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein. Der Punkt U des Diapositives, welcher dem Hauptpunkt A der Bildebene entspricht, muß in der Symmetrieebene der Scheimpflug-Projektion (Zeichenebene von Fig. 1) liegen. Der in der Entfernung F von A befindliche Punkt M fällt in der Scheimpflug-Projektion nach V und somit nicht mit der Projektionslinse O zusammen.

Ferner muß sein:

$$OG_2 = F_1 S_1 = HK = h: \cos a$$

$$G_2 S = OF_1 = NK = F: \cos a$$

$$U_1 F_1 = AH = F \cdot \operatorname{tg} a.$$

Da $VF_1 = \sqrt{F^2 + (F_1 U_1)^2} = F: \cos a$ ist, so wird es gleich OF_1 ¹⁾ und der mit U_1 in der Entfernung F verbundene Punkt V muß so geführt werden, daß stets $F_1 O = F_1 V$ ist. Das ist auf

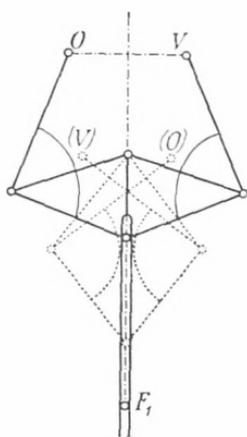


Fig. 3

verschiedene Weise möglich, am sichersten mit einem sogenannten Froschenkelmechanismus (Fig. 3), welcher bewirkt, daß die Punkte OVF_1 in jeder möglichen Lage ein gleichschenkliges Dreieck bilden, wobei auch noch O und V ihre gegenseitige Lage zur Mittellinie des Systems ohne Durchgang durch einen Todpunkt des Mechanismus vertauschen können. Mittels eines derartigen Mechanismus kann ein Gleitschieber, der das um seinen Hauptpunkt U_1 in seiner Ebene drehbar gelagerte Negativ trägt, am Ende V seines zu seiner Ebene senkrechten Fortsatzes $U_1 V$ so bewegt werden, daß

die Scheimpflug-Projektion nur jene ∞^3 Perspektiven ergibt, welche den möglichen Aufnahmen der Festpunktebene mittels des vorgegebenen photographischen Kamera entspricht. Wird nun das Dreieck der drei Festpunkte auf dem Projektionsschirm des Apparates verschiebbar gelagert und das Negativ innerhalb der noch vorhandenen Möglichkeiten verschoben und gedreht, bis das Bild der Festpunkte auf dem Projektionsschirm

¹⁾ Diese Gleichheit kann auch nach dem bekannten Satze der Perspektive eingesehen werden, wonach das perspektivische Zentrum sich auf einem Kreise mit der Fluchtlinie F_1 (Fig. 2) als Achse verschiebt, wenn die Gegenstandsebene (hier Projektionsschirm) um die Achse der Perspektive (S in Fig. 1, K in Fig. 2) bei feststehender Bildebene (Ebene des Negativs) gedreht wird.

mit dem Dreieck zur Deckung kommt, so hat man durch Probieren die Perspektive vermittelt, welche bei der photographischen Aufnahme das Festpunktdreieck auf die Platte abbildete. An den Teilungen der Schienen C_1S und C_2S können die Beträge:

$C_1S = 2C_1F_1 = 2h : \cos a$ und $C_2S = 2G C_2 = 2F : \cos a$
abgelesen und hieraus h und a berechnet werden.¹⁾

Macht man in der schließlichen Stellung des Apparates eine photographische Aufnahme des Projektionsbildes und sorgt man dafür, daß dabei auch der Hauptpunkt U_1 und die (in der Zeichenebene von Fig. 1 gelegene) Hauptvertikale des Negativs zur Abbildung gelangt, so kann man vom Punkte U_2 auf dem Projektionsbild der Hauptvertikalen ausgehend unschwer zum Fußpunkt des Lotes vom Standpunkt auf die Festpunktebene gelangen, der von U_2 um die Strecke: $h : \operatorname{tg} a$ entfernt liegt. In ähnlicher Weise läßt sich der zweite Standpunkt gegen das Dreieck der drei Festpunkte festlegen.

Hat man auf solche Weise die Standpunkte bestimmt und die Projektionen des Geländes auf die Ebene der drei Festpunkte von beiden Standpunkten aus photographisch festgelegt, so gestaltet sich die Wiederherstellung des Geländes folgendermaßen sehr einfach. Man denkt sich die beiden Projektionen des Geländes so aufeinander gelegt, daß die Projektionen der drei Festpunkte sich decken. Wäre das Gelände eben, so müßten sich die Projektionen sämtlicher Punkte decken. Bei nicht ebenem Gelände decken sich dagegen nur die Projektionen jener Punkte, die mit den drei Festpunkten in einer Ebene gelegen sind. Für die übrigen Punkte fallen sie auseinander, liegen aber so, daß ihre Verbindungslinie $P'P''$ (Fig. 4) durch einen festen Punkt K geht, nämlich jenen, in welchen die Verbindungslinie der Standpunkte MO die Ebene der drei Festpunkte schneidet. Den Lotriß P_1 eines Punktes P auf die eben ge-

¹⁾ Da sich die Neigung a für kleine Werte aus $\cos a$ schlecht bestimmt, kann man das Maß von $U_1F_1 = F' \operatorname{tg} a$ zur Berechnung von a verwenden.

nannte Ebene erhält man, wenn man jede seiner beiden Scheimpflug-Projektionen $P'P''$ mit dem Lotriß O_1 bzw. M_1 des zugehörigen Standpunktes O bzw. M verbindet und die beiden Verbindungslinien in P_1 zum Schnitt bringt. Denkt man sich endlich über den Lotrissen O_1M_1 der beiden Standpunkte diese selbst nach den vorhin ermittelten Höhen aufgetragen und dann mit den Scheimpflug-Projektionen eines Raumpunktes verbunden, so schneiden sich diese räumlichen Verbindungslinien OP' und MP'' in dem gesuchten Raumpunkte P selbst und die Höhe PP_1 des Raumpunktes über der Ebene der Festpunkte kann unmittelbar abgemessen werden.

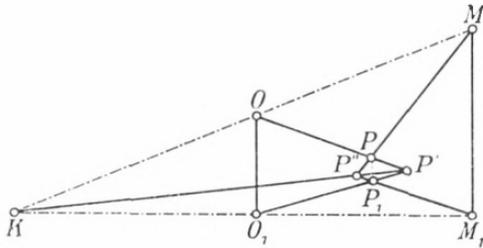


Fig. 4.

Die soeben beschriebene Konstruktion ist nur gedacht und kann in der angegebenen Form praktisch kaum ausgeführt werden, weil das Übereinanderlegen und Auseinanderhalten der beiden Scheimpflug-Projektionen nicht gut möglich ist. Ehe die einfache Abänderung, die zu einer praktischen Konstruktion führt, angegeben wird, soll der Vorgang besprochen werden, den man am besten einhält, wenn die drei Festpunkte nicht in einer wagrechten Ebene gelegen sind. Es wäre nämlich praktisch sehr umständlich, wenn man den theoretisch einfachsten Weg einschlagen würde, der offenbar darin besteht, die Wiederherstellung zuerst in Bezug auf die geneigte Ebene der Festpunkte durchzuführen und schließlich die gefundene Geländeform so zu drehen, daß die Ebene der Festpunkte die geforderte Stellung gegen die Lotrichtung einnimmt. Man verfährt vielmehr besser folgendermaßen: Man wählt eine

wagrechte Ausgangsebene, deren Höhenlage so angenommen wird, daß alle vorkommenden Geländepunkte darüber liegen. In Bezug auf diese Ausgangsebene bestimmt man dann die Lage der beiden Standpunkte M und O . Das kann auf dem Wege der darstellenden Geometrie unschwer geschehen, wenn die Lage der Standpunkte gegen das Festpunktsdreieck aus dem Einpassen der beiden Scheimpflug-Projektionen in jenes Dreieck vorher bekannt war. Nun werden die gegebenen Festpunkte von den neu gewonnenen Standpunkten auf die wagrechte Ausgangsebene projiziert und so für jeden Standpunkt ein neues wagrechtes Festpunktsdreieck gewonnen. Wenn die Höhen der Festpunkte über der Ausgangsebene klein sind gegenüber jener der Standpunkte, so werden sich das neue wagrechte und das ursprüngliche geneigte Festpunktsdreieck überhaupt nur wenig unterschieden und die geringfügigen Unterschiede können ohne merklichen Schaden statt aus der wahren Lage des betreffenden Standpunktes gegen die Ausgangsebene auch aus der nur wenig verschiedenen Lage gegen die ursprüngliche Festpunktsebene bestimmt werden. Man spart dabei die Konstruktion der Lage der Standpunkte gegen die Ausgangsebene.

Hat man nun so auf dem einen oder anderen Wege für jeden Standpunkt ein neues wagrechtes Festpunktsdreieck ermittelt, so wird eine Scheimpflug-Projektion der zugehörigen Aufnahme auf dieses Dreieck ausgeführt.

Die auf zwei verschiedene Festpunktsdreiecke ausgeführten Scheimpflug-Projektionen müßten nun für die Herstellung des Lageplanes so übereinandergelegt werden, daß die Grundrisse des ursprünglichen Festpunktsdreieckes, aus dem die neuen durch Korrektion entstanden waren, sich decken. Die weitere Konstruktion des Lageplanes und der Höhen über der gewählten Vergleichsebene geschieht auf genau demselben Wege wie vorher; es besteht nur der Unterschied, daß die Festpunkte nicht mehr die Höhe Null, sondern die gegebenen Höhen erhalten.

Wie schon früher erwähnt, ist das Aufeinanderlegen der

beiden Scheimpflug-Projektionen für die praktische Durchführung der Wiederherstellung nicht gut möglich, schon aus dem Grunde, weil man die Projektionen auf Glas als Diapositive herstellen wird. Das einfache Mittel zur Überwindung dieser Schwierigkeit ist in Fig. 5 angedeutet. Man verschiebt die beiden Scheimpflug-Projektionen $P'P''$ aus ihrer Deckstellung parallel zu sich selbst, um verschiedene Beträge $P'P'_0$ bzw. $P''P''_0$, so daß sie nebeneinander zu liegen kommen und im durchfallenden Licht bequem beleuchtet werden können. Durch einen passenden Mechanismus sorgt man dafür, daß entsprechende Punkte P'_0 und P''_0 , die durch optische Hilfsmittel (Lupe mit Fadenkreuz oder Mikroskop) einzustellen sind, wieder

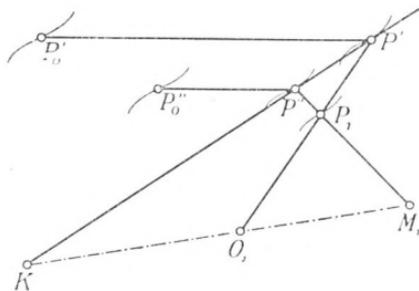


Fig. 5.

um die genannte Verschiebung nach P' und P'' zurückgebracht werden und dort als Anhaltspunkte für Konstruktion des Grundrisses durch Vorwärtseinschneiden von den vorher ermittelten Grundrissen M_1O_1 der Standpunkte aus dienen. Sorgt man noch dafür, daß die beiden parallel zurückverschobenen Punkte auf einer Geraden durch den Punkt K , den Schnitt der verlängerten Standlinie MO im Raum mit der Bildebene liegen, so werden die Lupen, welche zur Punkteinstellung auf den Scheimpflug-Projektionen dienen, von selber so geführt, daß sie nur auf solche Punkte zeigen, deren Vorwärtsschnitt nicht bloß im Grundriß P_1 , sondern auch im Raume P selbst eintritt und für die also die Höhe P_1P von beiderlei Standpunkten M und O aus gerechnet gleich groß ausfällt. Mittels

einer solchen Einrichtung lassen sich dann nicht bloß einzelne Punkte, sondern auch zusammengehörige Linien ohne erkennbare zusammengehörige Punkte festlegen. Man braucht nur die eine Lupe P'_0 auf dem ersten Bild l' der Linie entlang laufen lassen, während die andere P''_0 mit der ihr noch verbleibenden Beweglichkeit auf dem zweiten Bilde der Linie l'' gehalten wird. Durch den Zwang, der $P'P''$ stets durch K führt, kommen dabei P'_0 und P''_0 stets auf zusammengehörige Stellen der Bilder l' und l'' .

Zum Schlusse möge noch kurz die Reihenfolge der Verkehrungen aufgezählt werden, die bei der Wiederherstellung des Gegenstandes aus zwei seiner Bilder nach der angegebenen Weise zu treffen sind, wobei ich mich auf den Fall beschränke, daß die Höhenunterschiede des Gegenstandes klein gegenüber den Höhen der Standpunkte sind.

1. Genähertes Einpassen jedes der beiden Negative auf das Grundrißdreieck $A_1B_1C_1$ der 3 Festpunkte ABC und Berechnung der genäherten Lage der Standpunkte M und O aus den Ablesungen der Teilungen des Projektionsapparates.

2. Wahl einer genügend tief gelegenen Ausgangsebene und Aufsuchung der beiden von den genäherten Standpunkten O und M auf diese Ausgangsebene projizierten Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$.

3. Herstellung der Scheimpflug-Projektionen der beiden Negative auf die beiden Dreiecke $A'B'C'$, $A''B''C''$ und Berechnung der endgiltigen Lage der Standpunkte gegenüber der Ausgangsebene aus den Teilungen des Projektionsapparates.

4. Eintragung des Grundrißdreieckes $A_1B_1C_1$ in jede der beiden Scheimpflug-Projektionen.

5. Einlegen der beiden Scheimpflug-Projektionen in den Auftragapparat, wobei die beiden Grundrißdreiecke $A_1B_1C_1$ parallel in der Verschiebungsrichtung $P'P_0$ des Apparates zu liegen kommen.

6. Einstellung des Auftragapparates auf die Punktepaare $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$, $C'_0C''_0$ und Auftrag der parallel verschobenen

Punkte auf die Zeichenebene, daran anschließend Eintragung der Grundrisse der Standpunkte $O_1 M_1$ und Einstellung ihrer räumlichen Lagen OM sowie des Punktes K auf $O_1 M_1$.

Nunmehr kann die punkt- und linienweise Wiederherstellung des Gegenstandes beginnen. Über die technischen Einzelheiten des Projektions- und Auftragapparates, sowie über die Aushilfen, welche bei Unzugänglichkeit des Punktes K getroffen werden können, endlich über die erreichbare Genauigkeit soll bei anderer Gelegenheit berichtet werden.

Zum Schlusse sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Anwendung des Verfahrens nicht darauf beschränkt ist, daß für die Festlegung eines jeden der beiden Standpunkte dasselbe Festpunktsdreieck benützt werden kann. Es ist dann nur notwendig, die gegenseitige Lage der verwendeten Festpunktsdreiecke zu kennen. Ferner läßt sich durch eine unbedeutende Erweiterung des Auftragsapparates die Verwendung von drei und mehr Aufnahmen zur Vervollständigung und Prüfung der Wiederherstellung eines Gegenstandes, der von zwei Punkten aus nicht voll eingesehen werden kann, in die Wege leiten.
