Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Sonnenatmosphäre und Einsteineffekt.

Von R. Emden.

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Juli 1920.

Die Einsteinsche Relativitätstheorie folgert bekanntlich, daß ein Lichtstrahl, der die Sonne in nicht zu großer Entfernung passiert, durch das vorhandene Schwerefeld so gekrümmt wird, daß für den irdischen Beobachter der Winkel Sonnenmittelpunkt-Erde-Stern vergrößert erscheint. Diese Zunahme beträgt für einen Winkel gleich dem Sonnendurchmesser rund 1″, mit zunehmendem Winkel diesem proportional abnehmend. Eine Krümmung des Lichtstrahles in gleichem Sinne kommt auch durch Refraktion zu Stande, falls, was durch die Erscheinung der Korona wahrscheinlich ist, eine Sonnenatmosphäre mit abnehmender Dichte sich bis in diese Entfernungen erstreckt. Wird diese Winkelvergrößerung tatsächlich beobachtet, so bleibt vorerst unentschieden, wie diese Wirkung sich auf Einsteineffekt und Refraktion verteilt oder ob sie gar letzterer allein zuzuschreiben ist. Die folgenden Ausführungen sollen klar stellen, ob die Sonnenatmosphäre durch Refraktion in einer Höhe gleich einem Sonnenradius den sonst geradlinig verlaufenden Lichtstrahl um einen Betrag von 1″ abbiegen kann.

A) Die Sonnenatmosphäre sei aufgefaßt als konzentrisch geschichtetes Medium, dessen Dichte ϱ, und folglich auch dessen Brechungsexponent μ

1) $$\mu = 1 + \nu\varrho$$

für atmosphärische Luft $\mu = 1 + 0{,}0002927 \cdot \frac{\varrho}{\varrho_{\text{norm.}}}$
$= 1 + 0{,}2264\,\varrho$

für Wasserstoff $\mu = 1 + 0{,}0001387 \cdot \frac{\varrho}{\varrho_{\text{norm.}}}$
$= 1 + 1{,}546\,\varrho$

nach vorgeschriebenem Gesetze abnehmen. Durchsetzt der Strahl im Abstande r vom Kugelmittelpunkt den Radius im Winkel i, so gilt bekanntlich längs des ganzen Strahles die Beziehung
$$\mu\, r \sin i = \text{const} = \mu_0\, r_0 \sin i_0.$$

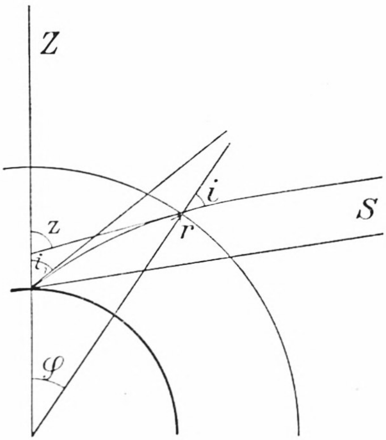
Daraus folgt
$$\operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} + \operatorname{tg} i \frac{dr}{r} + di = 0$$
und weiter, da die Polargleichung jeder Kurve $\frac{r\,d\varphi}{dr} = \operatorname{tg} i$ ergibt,
$$\operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} + d\varphi + di = 0.$$

Da aber (vgl. die Figur) $z = \varphi + i$, ergibt sich das bekannte Refraktionsintegral
$$R = z_\infty - z_1 = -\int\limits_{\mu_1}^{\mu\infty = 1} \operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} = \int\limits_1^{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_1 r_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 i_1} - 1}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$
$$= \int\limits_0^{\varrho_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1 + \nu\varrho}{1 + \nu\varrho_1}\right)^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 i_1} - 1}} \cdot \frac{\nu\, d\varrho}{1 + \nu\varrho}.$$

Um diesen Winkel hat sich der Strahl, welcher die Kugelschale $r = r_1$, $\mu = \mu_1$, $\varrho = \varrho_1$ in der Zenithdistanz i_1 verläßt, bis zum Durchsetzen der Kugelschale $r = \infty$, $\mu = 1$; $\varrho = 0$ gedreht. Da wir aber im Abstande r_1 bereits Gase in außerordentlicher Verdünnung anzunehmen haben, wie sich weiterhin ergeben wird, um viele Zehnerpotenzen kleiner als

Normaldichte, können wir unbedenklich $\nu\varrho$ gegen 1 vernachlässigen und erhalten schließlich das Refraktionsintegral in der Form

$$R = \nu \int_0^{\varrho_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{\sin i_1^2} - 1}} \cdot d\varrho .$$



B) Zur Auswertung des Integrals muß der Zusammenhang zwischen ϱ und r gegeben sein. Wir nehmen an, daß die Gase der Sonnenatmosphäre der Zustandsgleichung der vollkommenen Gase

$$\frac{p}{\varrho} = H\,T$$

gehorchen; die Atmosphäre selbst sei nach einer Polytropen[1]) von der Klasse n gebaut. (Bei konstantem Werte der Schwerebeschleunigung würde sich lineare Temperaturabnahme nach außen ergeben.) Jeder beliebige Temperaturverlauf kann durch polytrope Schichten von geeigneten n in vorgeschriebener Ge-

[1]) Über polytrope Atmosphären vgl. R. Emden, Gaskugeln, Kap. II, Leipzig 1907, oder R. Emden, Über polytrope Atmosphären. Meteorol. Zeitschr. 1916, S. 351.

nauigkeit dargestellt werden. Die Gleichung einer Polytropen in Parameterdarstellung lautet

$$\begin{aligned} T &= u\,\Theta_n \\ \varrho &= u^n \\ p &= u^{n+1}\,H\,\Theta_n \end{aligned}$$

und die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes

$$dp = -\varrho\, d\Omega.$$

Vernachlässigen wir die innere Gravitation der Atmosphäre und bezeichnen mit g_1 die Schwerebeschleunigung im Radius r_1, so ist $d\Omega = \frac{g_1 r_1^2}{r^2}\,dr$ und weiterhin somit

$$\begin{aligned} du &= -\frac{g_1 r_1^2}{(n+1)\,H\,\Theta_n}\,\frac{dr}{r^2}, \\ u &= \frac{g_1 r_1^2}{(n+1)\,H\,\Theta_n}\,\frac{1}{r} + c, \\ u_1 &= \frac{g_1 r_1^2}{(n+1)\,H\,\Theta_n} \cdot \frac{1}{r_1} + c, \end{aligned}$$

wodurch bei gegebenen u_1, n und Θ_n der Aufbau der Atmosphäre eindeutig bestimmt ist. Dadurch geht das Refraktionsintegral über in

$$R = \frac{n\,r\sin i_1}{u_1 - c} \int\limits_0^{u_1} \frac{u^{n-1}(u-c)\,du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u-c}{u_1-c}\right)^2 \sin^2 i_1}}$$

und durch Einführung der neuen Variabeln $z = \frac{u-c}{u_1-c}$ in

$$R = n\,r\sin i_1\,(u_1 - c)^n \int\limits_{-\frac{c}{u_1-c}}^{1} \frac{\left(z + \frac{c}{u_1-c}\right)^{n-1} z\,dz}{\sqrt{1 - \sin^2 i_1\, z^2}}.$$

Führen wir noch ein die Höhe $\mathfrak{H}_n$ der im Abstande r_1 errichteten polytropen Atmosphäre von der Klasse n:

$$\mathfrak{H}_n = \frac{(n+1)\,H\,T_1}{g_1};$$

T_1 die Temperatur im Abstande r_1 so wird

$$u_1 = \frac{r_1}{\mathfrak{H}_n}\,u_1 + c; \quad \frac{c}{u_1 - c} = \left(1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}\right),$$

$$R = n\,\nu\,\varrho_1 \left(\frac{r_1}{\mathfrak{H}_n}\right)^n \sin i_1 \int\limits_{1-\frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}}^{1} \frac{\left[z - \left(1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}\right)\right]^{n-1} z\,dz}{\sqrt{1 - \sin^2 i_1\, z^2}}$$

und schließlich

$$R = n\,\nu\,\varrho_1 \frac{1}{(1-N)^n} \sin i_1 \int\limits_N^1 \frac{(z-N)^{n-1}\,z\,dz}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 i_1}}; \quad N = 1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}.$$

Durch die Polytropenklasse n und die Höhe $\mathfrak{H}_n$ der polytropen Atmosphäre im Abstande r_1 ist die Refraktion eindeutig bestimmt. Für den hier in Betracht kommenden Fall ist sie für den im Niveau r_1 horizontal streichenden Strahl $\sin i_1 = 1$ zu berechnen; diese werde mit R_{90} bezeichnet.

C) In erster Linie sind die beiden Parameter n und N geeignet anzusetzen. Nimmt man wie oben an, daß die Schwerebeschleunigung quadratisch mit der Entfernung abnimmt, so läßt sich leicht zeigen[1]), daß die polytrope Atmosphäre in einem Abstande $\mathfrak{R}$ vom Kugelmittelpunkte

$$\mathfrak{R} = \frac{r_1}{1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}} = \frac{r_1}{N}$$

endigt. $\mathfrak{H}_n$ kann also nie größer werden wie r_1 (wodurch der obere Grenzwert der Temperatur im Abstande r_1 bestimmt ist), ohne daß die Atmosphäre sich zerstreut. Daraus folgt, daß N eingeschlossen ist zwischen den Grenzen

$$0 < N < 1; \quad N = \frac{r_1}{\mathfrak{R}}.$$

[1]) R. Emden, Gaskugeln, Kap. XVII, § 4. Leipzig 1907.

Auf den bei der letzten Sonnenfinsternis gewonnenen Aufnahmen zeigt sich noch im Abstande von 11 Sonnenradien eine meßbare Abbiegung der Strahlen. Eine durch Refraktion wirksame Gasmasse müßte sich also noch bedeutend weiter hinaus erstrecken. Lassen wir sie, um Anhaltspunkte für die weitere Rechnung zu erhalten, bei 14 resp. 20 Sonnenradien r_0 endigen, so ergibt sich, da $r_1 = 2r_0$, $N = \frac{1}{7}$ resp. $\frac{1}{10}$. Bei weiterer Ausdehnung würde N entsprechend abnehmen. Andererseits wird sich unten zeigen, daß n sehr groß, etwa von der Größenordnung 1000 anzusetzen ist. Dadurch wird die numerische Berechnung des Integrals schwierig. Doch läßt sich gerade für große n ein genügend genauer Näherungswert ermitteln. Es tragen dann nur die größten z-Werte wesentlich zum Integral bei, so daß sich mit hinreichender Genauigkeit ergibt

$$R_{90} = \nu \varrho_1 \frac{n}{\sqrt{2} \cdot (1 - N)^n} \int_N^1 \frac{(z - N)^{n-1}\, dz}{\sqrt{1 - z}}.$$

Setzen wir

$$1 - z = x^2, \quad 1 - N = b,$$

so wird

$$R_{90} = \nu \varrho_1 \frac{n\sqrt{2}}{b} \int_0^{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x^2}{b}\right) dx,$$

und für

$$\frac{x^2}{b} = \frac{\beta^2}{n-1},$$

$$R_{90} = \nu \varrho_1 \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}\,\sqrt{b}} \int_0^{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\beta^2}{n-1}\right)^{n-1} d\beta.$$

Da aber für große n

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{n-1}\right)^{n-1} = e^{-\beta^2},$$

wird

$$R_{90} = r\varrho_1 \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}\sqrt{b}} \cdot \int_0^{\sqrt{n-1}} e^{-\beta^2} d\beta = r\varrho_1 \frac{n}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$= r\varrho_1 \frac{n}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r_1}{\mathfrak{H}_n}} = r\varrho_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{g_1 r_1}{H T_1}}$$

und für $r_1 = 2$ Sonnenradien, $T_1 = 6000^0$ und eine Wasserstoffatmosphäre

$$R_{90} = 76{,}6 \cdot r\varrho_1 = \text{rund } 10^2 \cdot r\varrho_1 .$$

ϱ_1 die Dichte im Abstande r_1 vom Sonnenmittelpunkte. Gemäß der gestellten Frage ist anzusetzen $r_1 = 2r_0$, r_0 der Radius der Photosphäre. Diese Dichte ist nun abzuschätzen.

D) Für die Temperatur im Abstande r vom Sonnenmittelpunkte ergibt sich wie oben für u

$$T = \frac{g_0 r_0^2}{(r+1)H} \frac{1}{r} + c.$$

g_0 die Schwerebeschleunigung an der Photosphäre. Die Konstante ist bestimmt durch $T = 0$ für $r = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ die Grenze der Atmosphäre. So ergibt sich

$$T = \frac{g_0 r_0^2}{(n+1)H} \cdot \frac{\mathfrak{R} - r}{\mathfrak{R} r}$$

und für die Temperatur der photosphärischen Schichten

$$T_0 = \frac{g_0 r_0}{(n+1)H} \left(1 - \frac{r_0}{\mathfrak{R}}\right)$$

und daraus

$$(n+1) = \frac{g_0 r_0}{H T_0} \left(1 - \frac{r_0}{\mathfrak{R}}\right).$$

Für Wasserstoff haben wir anzusetzen $H = 4{,}15 \cdot 10^7 \text{ cm}^2/\text{sec}^2$, ferner $g_0 = 2{,}67\ 10^4 \text{ cm}/\text{sec}^2$ und $r_0 = 6{,}96 \cdot 10^{10}$ cm. Die Temperatur der Photosphäre setzen wir erst gleich 6000^0, der effektiven Sonnentemperatur und lassen die Gasmasse endigen bei $\mathfrak{R} = 10\,r_0$ resp. $20\,r_0$. Dann ergibt sich

$$(n+1) = 6720 \text{ resp. } 7090$$

Aufbau als dissoziiertem Wasserstoffe würde diese Werte auf die Hälfte herabsetzen; sie nehmen ferner ab umgekehrt wie T_0. Für $T_0 = 60000^0$ würde $(n + 1)$ immer noch von der Größenordnung 700 sein. Die oben ausgeführte Berechnung des Integrals für sehr große Werte von n ist damit gerechtfertigt.

Mit Hülfe dieser Werte von n können wir die zugehörigen Werte von ϱ_1 berechnen. Aus den Grundgleichungen der Polytropen folgt unmittelbar, wenn wir mit ϱ_0 die Dichte der Photosphäre bezeichnen

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$$

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{1 - \dfrac{r}{\mathfrak{R}}}{1 - \dfrac{r_0}{\mathfrak{R}}}\right)^n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n$$

und für den in Betracht kommenden Spezialfall

$$\varrho_1 = \varrho_0 \left(\frac{1 - \dfrac{2\,r_0}{\mathfrak{R}}}{1 - \dfrac{r_0}{\mathfrak{R}}}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Setzen wir n nur gleich 1000 (entsprechend einer Temperatur der Photosphäre von rund 36000), so folgt für ϱ_1 für $\mathfrak{R} = 10\,r_0$ resp. $20\,r_0$

$$\varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-352} \text{ resp. } \varrho_0\, 10^{-325}$$

und für die Temperatur $T_0 = 6000^0$

$$\varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-2365} \text{ resp. } 10^{-2304}.$$

Auch anderer Aufbau der Sonnenatmosphäre wie der angenommene, welcher den Temperaturverlauf $T = T_0 \dfrac{\mathfrak{R} - r}{\mathfrak{R} - r_0} \cdot \dfrac{r_0}{r}$ ansetzt, würde die Größenordnung der Dichte ϱ_1 nicht ändern. Lassen wir die Temperatur bis zum Werte 0 bei $\mathfrak{R} = 10\,r_0$ resp. $20\,r_0$ linear abnehmen, so ergibt eine leichte Rechnung für $T_0 = 6000^0$

$$\varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-1690} \text{ resp. } \varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-1650}.$$

Dabei nehmen die Exponenten nahezu proportional der Temperatur T_0 ab. Nehmen wir andererseits isothermen Aufbau der Gase an, so ergibt sich für $g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}$

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\frac{g_0 r_0}{H T_0}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)}$$

und daraus für $T_0 = 6000^0$

$$\varrho_1 = \varrho_0 \, 10^{-1620}.$$

Das Vorhandensein dieser ungeheuren Verdünnungen wird verständlich, wenn man beachtet, daß in der Erdatmosphäre für die konstante Temperatur $t = 0^0\, c$ und $g = \text{const}$ für Wasserstoff die barometrische Höhenformel

$$h - h_0 = 266{,}5 \text{ km} \cdot \lg \frac{p_0}{p} = 266{,}5 \text{ km} \cdot \lg \frac{\varrho_0}{\varrho}$$

gilt, wonach die Dichte in 266,5 km Höhe auf $\varrho_0 \, 10^{-1}$ abgenommen hat. Da g_0 auf der Sonne 27,2 mal größer ist, ergibt sich auf ihr dieselbe Beziehung für eine Temperatur von $27{,}2 \cdot 273 = 7400^0$. In einer Höhe von 7000 km entsprechend einem Abstande von nur $^1/_{100}$ Sonnenradius würde also bereits eine Verdünnung auf $\varrho_0 \, 10^{-26}$ zu erwarten sein, die für $h = r_0$ auf $\varrho_0 \, 10^{-2620}$ steigen würde.

Da die mittlere Dichte der Sonne 1,4 g/cm³ beträgt, ist für ϱ_0 auf alle Fälle ein kleinerer Wert anzusetzen.

E) Für das Refraktionsintegral fanden wir oben

$$R_{90} = 10^4 \nu \varrho_1.$$

Um dem Strahle die Einsteinsche Durchbiegung von $1'' = 0{,}0000048$ zu geben, müssen wir $R_{90} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0000048 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ setzen. Für die Dichte ϱ_1 ergab sich nach den verschiedensten Annahmen die Größenordnung $\varrho_0 \, 10^{-1000}$, so daß die beiden Seiten der Gleichung überhaupt nicht vergleichbar sind. Die zu erwartende Refraktion ist praktisch gleich Null zu setzen. Daran würde bei gleichem ϱ_1 auch verschiedener Aufbau der Gasmassen nichts wesentlich ändern, wie die Behandlung des Refraktionsintegrals in der ungleich dichteren Erdatmosphäre zeigt. In einem Abstande gleich dem Sonnenradius befinden sich die Gase eben in einem solchen Grade der Verdünnung, daß die Refraktionswirkung der weiter außen liegenden Massen unmerklich wird. Beobachtete Strahlabbiegung in diesem, geschweige denn in mehrfachem Abstande, wobei die Dichte exponentiell abnimmt, kann deshalb unmöglich normaler Refraktionswirkung einer konzentrisch geschichteten Sonnenatmosphäre zuzuschreiben sein. Daß man auch nach anderen Annahmen über den Bau der Atmosphäre zu so geringen Dichten geführt wird, habe ich an anderer Stelle[1]) nachgewiesen; sehr hohe Temperaturen sind dann noch immer möglich. Will man trotzdem das Leuchten der Korona nicht thermodynamisch erklären, so besteht die Möglichkeit, in ihr ein Seitenstück zu unseren Nordlichtern zu sehen; von der Sonne ausgeworfene α- oder β-Teilchen bringen die hochverdünnten Gasmassen zum Leuchten. Da die Erdentfernung 216 Sonnenradien beträgt, ist die Dichte dieses Teilchenstromes in der Korona mindestens $4{,}2 \cdot 10^4$ mal größer wie in Erdentfernung, so daß selbst in einer außerordentlich hoch verdünnten Gasmasse Leuchterscheinungen auftreten können.

Die vorstehenden Ausführungen berechtigen zu dem Schlusse: W i r d b e i F i n s t e r n i s s e n e i n e A b s t a n d s v e r g r ö ß e r u n g d e r F i x s t e r n e v o n d e r S o n n e i m B e t r a g e d e s E i n s t e i n e f f e k t e s f e s t g e s t e l l t , s o k a n n d i e s e r w e d e r g a n z n o c h i n e i n e m m e ß b a r e n B r u c h t e i l e d u r c h R e f r a k t i o n e i n e r n o r m a l g e s c h i c h t e t e n S o n n e n a t m o s p h ä r e v e r u r s a c h t s e i n .

[1]) R. Emden, Gaskugeln, Kap. XVIII Die Sonne.