Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1920

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen.

Von **Georg Pólya** in Zürich.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Es handelt sich im folgenden um ganze transzendente Funktionen von der Form

$$F(z) = P_1(z)\, e^{a_1 z} + P_2(z)\, e^{a_2 z} + \cdots + P_m(z)\, e^{a_m z},$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_m$ voneinander verschiedene Konstanten und $P_1(z), P_2(z), \ldots P_m(z)$ Polynome sind ($m > 1$). Diese Funktionen bieten sich ungezwungen der Betrachtung dar, als die Lösungen von linearen homogenen Differential- oder Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die asymptotische Verteilung ihrer Nullstellen folgt einfachen und eleganten geometrischen Gesetzen, die, soweit mir bekannt, bisher unbemerkt geblieben sind, und die ich in diesen Zeilen darstellen will. Um nicht weitläufig zu werden, will ich die Beweise nur kurz andeuten. Denn einerseits lassen sich diese Beweise mit geläufigen Mitteln führen. Andererseits soll der Gegenstand ausführlich behandelt, in feinere Einzelheiten verfolgt und weitergeführt werden in einer von mir veranlaßten Zürcher Dissertation.

1. Man betrachte in der komplexen Zahlenebene die m Punkte

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m.$$

Das kleinste konvexe Polygon, das diese m Punkte umfaßt, soll mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. $\mathfrak{A}$ kann sich eventuell auf eine Strecke reduzieren, jedoch nie auf einen Punkt, da $m > 1$. Ich bezeichne mit $\bar{\mathfrak{A}}$ das kleinste konvexe Polygon, das die m konjugiert komplexen Punkte

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \cdots \bar{a}_m$$

umfaßt. $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die reelle Achse. $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ haben gleich viel, sagen wir l Ecken ($l \leq m$). Es sei die Bezeichnung so gewählt, daß die in positivem Umlaufssinn aufeinander folgenden Ecken von $\mathfrak{A}$ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_l$ heißen.

Die Nullstellen von $F(z)$ häufen sich gegen l verschiedene Halbstrahlen, die den äußeren Normalen des Polygons $\bar{\mathfrak{A}}$ parallel sind.

Mit anderen Worten und genauer beschrieben heißt das folgendes: man errichte von dem Punkt $z = 0$ aus l Halbstrahlen, die bzw. den Vektoren

$$i(\bar{a}_2 - \bar{a}_1),\ i(\bar{a}_3 - \bar{a}_2),\ \cdots\ i(\bar{a}_1 - \bar{a}_l)$$

parallel sind. Man umgebe jeden Halbstrahl mit einem Winkelraum, den der betreffende Halbstrahl halbiert, dessen Spitze der Nullpunkt und dessen Öffnung ε ist. Es sei ε so klein gewählt, daß diese Winkelräume sich nicht überdecken. Wie klein auch die positive Größe ε sein mag, es befinden sich außerhalb der beschriebenen l Winkelräume von der Gesamtöffnung $l\varepsilon$ nur endlich viele Wurzeln von $F(z)$.

Zum Beweise betrachte man die beiden von $z = 0$ ausgehenden Vektoren $i(\bar{a}_\lambda - \bar{a}_{\lambda-1})$ und $i(\bar{a}_{\lambda+1} - \bar{a}_\lambda)$, deren Verlängerungen, und den durch diese Verlängerungen begrenzten Winkelraum ($\lambda = 1, 2, \ldots l$). In jedem Winkelraum, der die Spitze im Punkte $z = 0$ hat, aber sonst ganz im Innern des eben beschriebenen liegt, ist gleichmäßig

$$\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{P_\lambda(z)\, e^{a_\lambda z}} = 1.$$

2. Es sei s die Länge einer bestimmten Seite des Polygons $\overline{\mathfrak{A}}$. Die Anzahl derjenigen Nullstellen von $F(z)$, die sich der zur besagten Seite senkrechten Richtung anschließen und einen absoluten Betrag unterhalb r haben, ist asymptotisch $\frac{rs}{2\pi}$ bis auf einen Fehler, der durch $\lg r$ dividiert beschränkt bleibt.

Man schließe, wie vorher, die fragliche Richtung in einen Winkelraum von der Öffnung ε ein, und schneide aus dem Winkelraum einen Kreissektor aus; Mittelpunkt des Kreises ist $z = 0$, sein Radius r. Es handelt sich um die asymptotische Anzahl der Nullstellen innerhalb dieses Sektors, wobei ε beliebig, jedoch fest und r als unbeschränkt wachsend angenommen ist. Es folgt aus dem ausgesprochenen Satze, in Verbindung mit 1, daß die asymptotische Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ innerhalb eines Kreises vom Radius r mit dem Mittelpunkt $z = 0$ gleich ist $\frac{r}{2\pi} \times$ Umfang von $\overline{\mathfrak{A}}$.

Der Satz wird natürlich durch die Betrachtung des Integrals $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ bewiesen. Es empfiehlt sich nicht, dieses Integral um die Grenzen des fraglichen Sektors herum zu erstrecken, sondern um die Grenzen eines andern Gebietes, das ich nur in dem Falle beschreibe, daß die fragliche Seite von $\overline{\mathfrak{A}}$ die Richtung der positiven reellen x-Achse hat und folglich der dazugehörige Verdichtungshalbstrahl der Nullstellen die positive imaginäre y-Achse ist. In diesem Falle (worauf ein beliebiger anderer Fall durch eine passende Drehung der Ebene zurückgeführt werden kann) besteht der zweckmäßige Integrationsweg 1) aus einem Stück der Kurve $x = k \lg y$ von $x = 0$, $y = 1$ bis $y = r$; 2) aus einer nach links gerichteten horizontalen Strecke von der Länge $2k\lg r$; 3) aus einem Stück der Kurve $x = -k \lg y$ von $y = r$ bis $y = 1$. Dabei bedeutet k eine passend, insbesondere hinreichend groß gewählte positive Konstante. Der heikelste Punkt der Rechnung, der das Integral an der horizontalen, ins Unendliche rückenden Strecke entlang betrifft, erledigt sich durch eine Überlegung von Backlund[1]).

3. Es seien die Nullstellen von $F(z)$, mehrfache in richtiger Vielfachheit geschrieben, nach niemals abnehmenden absoluten Beträgen geordnet $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Ich setze voraus, daß $|\alpha_1| > 0$, d. h. daß der Punkt $z = 0$ keine Nullstelle ist. Dann ist

$$F(z) = F(0)\, e^{a z} \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right) \cdots.$$

Die komplexe Zahl a wird in der Gaußschen Zahlenebene durch einen inneren Punkt des Polygons $\mathfrak{A}$ dargestellt, der als sein Krümmungsschwerpunkt bezeichnet wird. Unter „Krümmungsschwerpunkt" eines konvexen Polygons versteht man den Schwerpunkt einer Gesamtmasse 2π, die auf die einzelnen Ecken des Polygons so verteilt ist, daß eine Ecke mit dem Innenwinkel α die Masse $\pi - \alpha$ erhält[2]). Zum besseren Verständnis des ausgesprochenen Satzes sei noch erwähnt, daß das Produkt $\left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_3}\right) \ldots$ nicht absolut konvergent ist.

Zum Beweis nimmt man an, daß z von sämtlichen Nullstellen von $F(z)$ verschieden ist, und man betrachtet das

---

[1]) Backlund, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Comptes Rendus, Paris, Bd. 158 (1914) S. 1979—1981).

[2]) Vgl. Steiner, Gesammelte Werke Bd. 2, S. 97 ff., insbesondere S. 129. Die Steinerschen Eigenschaften des Krümmungsschwerpunktes ergeben sich leicht aus passenden Integralformeln. Ist $p = p(\varphi)$ die Stützfunktion (d. h. der Abstand von dem Nullpunkt der Stützgeraden, als Funktion des Polarwinkels φ ihrer Normalen) so sind die beiden Koordinaten des „Krümmungsschwerpunktes"

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p \cos\varphi - p' \sin\varphi)\, d\varphi, \quad y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (p \sin\varphi + p' \cos\varphi)\, d\varphi.$$

Integral $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F'(u)}{F(u)} \lg\left(1-\frac{z}{u}\right) du$, erstreckt über zwei geschlossene Kurven; die sind: 1) ein Kreis, der durch keine Nullstelle von $F(u)$ hindurchgeht, mit dem Mittelpunkte $u = 0$ und dem Radius $\varrho > |z|$, im positiven Sinne durchlaufen; 2) eine geschlossene doppelpunktlose Kurve, ganz im Innern des genannten Kreises enthalten, die $u = 0$ und $u = z$ einschließt, sämtliche Nullstellen von $F(u)$ ausschließt und im negativen Sinne durchlaufen wird. Es ist zu bemerken, daß im Zwischenraum der beiden beschriebenen Kurven der Integrand eindeutig und bis auf Pole erster Ordnung regulär ist. Es ist zweckmäßig ϱ nicht stetig, sondern durch gewisse ausgewählte Werte hindurch ins Unendliche wachsen lassen, die eine günstige Abschätzung von $\frac{F'(z)}{F(z)}$ gestalten. Es kann etwa der folgende elementare und verhältnismäßig einfache Hilfssatz benutzt werden:

Es sei $0 < c_1 \leqq c_2 \leqq c_3 \leqq \ldots, \lim\limits_{n=\infty} c_n = \infty$. Die Anzahl derjenigen Zahlen c_ν, die $\leqq r$ sind, sei mit $N(r)$ bezeichnet. Es sei vorausgesetzt, daß

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r) - r}{\sqrt{r}} = 0.$$

Dann kann man, sobald r eine gewisse Grenze übersteigt, in dem Intervall von $r - \sqrt{r}$ bis $r + \sqrt{r}$ eine Zahl ϱ finden (ϱ ist als Funktion von r aufzufassen), derart daß

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{1}{\sqrt{\varrho}\lg\varrho} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho}{c_\nu \, |\varrho - c_\nu|} < 1.$$

4. Von den Beziehungen dieser Sätze zu geometrischen Fragen sei nur einiges erwähnt. Neben $F(z)$ und $\mathfrak{A}$ betrachte man die Funktion

$$G(z) = Q_1(z)\, e^{b_1 z} + Q_2(z)\, e^{b_2 z} + \cdots + Q_n(z)\, e^{b_n z}$$

($Q_1(z), Q_2(z), \ldots Q_n(z)$ Polynome) und das kleinste konvexe Polygon $\mathfrak{B}$, das die Punkte $b_1, b_2, \ldots b_n$ umfaßt. Es sei

$0 < t < 1$. Zu der Funktion $F(tz)\, G((1-t)\,z)$ gehört das kleinste konvexe Polygon, das die Punkte $a_\mu t + b_\nu (1-t)$ umfaßt ($\mu = 1, 2, 3, \ldots m$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$). Dieses Polygon, das ich mit $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ bezeichnen will, durchläuft die auf die Polygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufgebaute „lineare Schar" konvexer Polygone[1]). Nehmen wir Einfachheit halber an, daß keine Seite von $\mathfrak{A}$ einer Seite von $\mathfrak{B}$ parallel ist. Aus dem Satze unter 1 folgt, daß die einzelnen Seiten des Polygons $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ entweder einer Seite von $\mathfrak{A}$ oder einer Seite von $\mathfrak{B}$ parallel sind. Aus dem Satze unter 2 folgt, daß $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ genau $m+n$-Seiten hat; m verschiedene Seiten sind den m verschiedenen Seiten von $\mathfrak{A}$ parallel und verhalten sich der Länge nach zu ihnen, wie t zu 1, n Seiten sind den Seiten von $\mathfrak{B}$ parallel und verhalten sich zu ihnen, wie $1-t$ zu 1.

Aus dem Satze unter 3 ist ähnlicherweise eine einfache Konstruktion des Krümmungsschwerpunktes von $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ aus den Krümmungsschwerpunkten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abzulesen. Die fragliche Konstruktion ist übrigens auch den in der Anmerkung [2]) S. 288 gegebenen Formeln zu entnehmen.

---

[1]) Vgl. z. B. W. Blaschke, Kreis und Kugel, (Leipzig, 1916), S. 92 ff.