

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1920

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Ausnahmefachwerke und ihre Determinante.

Von Heinrich Liebmann.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1920.

§ 1. Einführung und Übersicht.

Ausnahmefachwerke sind Fachwerke, die die Grundbedingung des sowohl kinematisch wie statisch bestimmten Fachwerks erfüllen, nämlich in der Ebene die Beziehung $s = 2k - 3$, im Raum die Beziehung $s = 3k - 6$ zwischen der Anzahl s der Stäbe und der Anzahl k der Knotenpunkte, die aber doch im Stande sind, innere Stabspannungen aufzunehmen, ohne daß in den Knotenpunkten äußere Kräfte angreifen (statischer Ausnahmefall). Diese Fachwerke gehören nach A. Föppl¹⁾ zugleich den kinematischen Ausnahmefällen an, d. h. sie lassen infinitesimale innere Bewegungen zu, die dadurch charakterisiert sind, daß wohl die Stablängen, nicht aber die Winkel je zweier Nachbarstäbe unverändert bleiben. (Fachwerke, die endliche innere Bewegungen zulassen, wie in der Ebene das bekannte Fachwerk [$s = 9$, $k = 6$], das aus zwei kongruenten gleichgestellten Dreiecken besteht, deren entsprechende Ecken durch drei parallele gleichlange Stäbe verbunden sind, oder im Raum das bekannte Bricardsche Oktaeder [$s = 12$, $k = 6$], wären als Mechanismen zu bezeichnen). Daß statischer und kinematischer Ausnahmefall sich decken, ist übrigens für Dreiecksflechtwerke oder Trigonalpolyeder leicht

¹⁾ A. Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880, S. 36.

direkt zu erweisen¹⁾. Ebenso ist leicht zu sehen, daß sich für Polyeder mit starren Seitenflächen, die übrigens keineswegs ebene Polygone zu sein brauchen, sofort innere Stabspannungen konstruieren lassen, wenn bei ihnen innere Bewegungen möglich sind²⁾.

Diese Eigenschaft der Ausnahmefachwerke läßt sich bei der eben erwähnten Gattung leicht aus der bekannten, nach F. Lindemann³⁾ keineswegs an die Giltigkeit des Parallelenpostulates gebundenen Analogie zwischen Kräften und infinitesimalen Rotationen beweisen. Unten (§ 4, Nr. 4) ist die Gelegenheit wahrgenommen, die Analogie allgemein auch für den nichtenklidischen Fall zu begründen.

In § 2 wird zunächst der Ausnahmefall beim Oktaeder besprochen. Da (nach Abfassung der vorliegenden Untersuchung) die bereits erwähnte Arbeit von Blaschke erschienen ist, durfte die statische und die kinematische Begründung für den Ausnahmefall, also die Untersuchung und Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das „wackelige“ mit „inneren Eigenspannungen“ verträgliche Achtfach gekürzt dargestellt werden (Nr. 1). In Nr. 2 wird zunächst ein vielleicht auch in der Praxis möglicher Spezialfall besprochen und sodann eine Beziehung zu den Flächen zweiten Grades hergestellt.

§ 3 ist analytischen Untersuchungen gewidmet. Es wird nämlich die Fachwerkdeterminante D , deren Verschwinden nach Föppl die notwendige und hinreichende Bedingung für den Ausnahmefall ist, wirklich aufgestellt, in Nr. 1 für das Oktaeder, in Nr. 2 für ein gewisses Dekaaeder (windschiefes Fünf-

¹⁾ Vgl. M. Dehn, Über die Starrheit konvexer Polyeder (Math. Annalen 77, 1916, S. 466—473).

²⁾ Vgl. W. Blaschke, Über affine Geometrie, XXVI, Wackelige Achtfache (Math. Zeitschrift 6, 1920, S. 85—94). — „Wackeligkeit“ ist übrigens nicht nur *affin invariant*, sondern *projektiv invariant*! (Vgl. unten § 4, Nr. 2.)

³⁾ F. Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung, § 11, S. 116—118 (Math. Annalen 7, 1874, S. 56—143).

eck, die Ecken noch mit zwei weiteren Knotenpunkten durch Stäbe verbunden).

Der Zweck dieser Aufstellung war, die Gleichung für den *gefährlichen Ort* zu finden, d. h. für die Fläche, an die ein Knotenpunkt P_i gebunden ist, wenn bei Festlegung der übrigen Knotenpunkte im Raum der Ausnahmefall vorliegen soll. Dabei fand sich in Nr. 2 Gelegenheit, die erhaltene Gleichungsform der F_3 mit einem Knotenpunkt zur Ableitung der bekannten Eigenschaften dieser Fläche¹⁾ zu verwenden.

In Nr. 3 wird dann das Fachwerk vom Doppelpyramidentypus (n -Eck, jede Ecke noch mit zwei weiteren Knotenpunkten verbunden; $k = n + 2$, $s = 3n = 3k - 6$) heuristisch behandelt als Verallgemeinerung der in Nr. 1 und 2 besprochenen Fälle $n = 4$, $n = 5$. Zur völligen Aufklärung über die dort aufgestellten Vermutungen müßten jedenfalls weitergehende kombinatorische Hilfsmittel herangezogen werden.

Die Entwicklung der Fachwerkdeterminante in eine Summe von Produkten drei- bzw. vierreihiger Determinanten führte ganz von selbst zur Verwendung einer Symbolik (vgl. § 3, Nr. 2, Formel (1), ferner § 4, Nr. 2, Fußnote usw.), deren sich der früh verstorbene Mathematiker M. Reiff mit großem Erfolg bedient hat²⁾. Seine Leistungen, im allgemeinen wenig beachtet³⁾, sind neuerdings von Study wieder zu einem wichtigen Instrument der Forschung erhoben und ausgebaut worden.

¹⁾ Vgl. z. B. Pascals Repertorium der höheren Mathematik II (Erste Auflage), Leipzig 1902, Kap. XI, insbesondere S. 289.

²⁾ M. Reiff, Analytisch-geometrische Studien. Math. Annalen 2 (1870), S. 385–426. — Auf diese Arbeit hat mich mein verehrter Kollege F. Engel hingewiesen, nachdem meine Untersuchungen abgeschlossen waren.

³⁾ Weder der einschlägige Enzyklopädieartikel I A 2 von E. Netto noch G. Kowalewskis Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig 1909) würdigen die Verdienste von M. Reiff. Dagegen vergleiche man E. Pascal (Die Determinanten, übersetzt von H. Leitzmann, Leipzig 1900, S. 84) und E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1902, S. 127.

Reiß hatte sich eine Aufgabe gestellt, die wir, spezialisiert auf (ebene) algebraische Kurven C_n und auf algebraische Flächen F_n , so aussprechen können. Gegeben seien die rechtwinkligen oder die homogenen Koordinaten von

$$c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ bzw. } f_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Punkten. Es soll die Determinante D , deren Verschwinden besagt, daß die c_n (f_n) Punkte auf einer C_n (F_n) liegen, in eine übersichtliche Form gebracht werden¹⁾. Diese neue Determinante „ E “, zu der Reiß gelangt, hat nun gerade die Gestalt, welche die Fachwerkdeterminante D durch Laplacesche Entwicklung ganz von selbst annimmt. Sie ist nämlich eine Summe von Produkten von Determinanten, die bei Benützung rechtwinkliger Koordinaten die Bedeutung von Dreiecks- (bzw. Tetraeder-)inhalten haben, abgesehen von den Zahlenfaktoren zwei (und sechs). Bei der Determinante E sind die Eckpunkte dieser Figuren gewisse Tripel (Quadrupel) der c_n (f_n) Punkte, welche auf der C_n (F_n) liegen sollen, bei der Fachwerkdeterminante selbstverständlich Knotenpunkte des Fachwerks²⁾.

In § 4 werden einige allgemeine Sätze über die Fachwerkdeterminante D bewiesen. Dabei ist vorerst (Nr. 1) die Beschränkung auf Fachwerke mit mindestens einem Stabdreieck angebracht, weil andernfalls erst weitere Untersuchungen über die Abhängigkeit der $(3k-9)$ -reihigen Determinante der Fach-

¹⁾ Die Reißsche Darstellung der C_n (F_n), die auf diesem Wege erhalten wird — und deren Durchführung nach dem Zeugnis des Entdeckers (a. a. O., S. 394) im einzelnen Schwierigkeiten zu überwinden hat — „enthält die wahre analytische Darstellung der Graßmannschen Erzeugung von Kurven und Flächen“ (briefliche Äußerungen von F. Engel). Vgl. Graßmanns Werke, herausgegeben von F. Engel, Band III, 2, Leipzig 1911, S. 105–108.

²⁾ Diese besondere Struktur der Fachwerkdeterminante hat — für Trigonalpolyeder — bereits Dehn a. a. O. herangezogen bei seinem Beweis des Cauchyschen Satzes über konvexe Polyeder.

werk-*Matrix* (vgl. § 4, Nr. 4) von $3k - 6$ Zeilen und $3k$ Reihen der vermutlich sehr umständlichen Durchführung im einzelnen bedurft hätten¹⁾. Sodann wird (Nr. 2) die projektive Invarianz von D bewiesen und dabei der Grad g_λ für den „gefährlichen Ort“ (s. oben) eines beliebigen Knotenpunktes P_λ erkannt. Er ist

$$g_\lambda = \sigma_\lambda - 2,$$

wobei σ_λ die Anzahl der von P_λ ausgehenden Stäbe ist²⁾. Endlich wird noch gezeigt (Nr. 3), daß D auch bei Einführung projektiver Maßbestimmung invarianten Charakter zeigt, und daß (Nr. 4) auch in der nichtenklidischen Geometrie — ohne Beschränkung auf Fachwerke mit Stabdreiecken — statischer und kinematischer Ausnahmefall sich decken.

Wie schon diese Übersicht erkennen läßt, war mehrfach Gelegenheit, Fragen zu streifen, deren endgültige Erledigung noch über den Rahmen der hier begründeten Ergebnisse hinausgeht.

§ 2. Der Ausnahmefall beim Oktaeder.

1. Die notwendige und hinreichende Bedingung. Es möge ein Oktaederfachwerk vorliegen, also vier in Knotenpunkte verbundene Stäbe (12), (23), (34) und (41); die Knotenpunkte 1 bis 4 sind noch mit zwei weiteren Punkten 5 und 6 durch Stäbe verbunden³⁾.

Wir erörtern den Ausnahmefall zunächst statisch, fragen also: Welche Bedingungen sind dem Fachwerk aufzuerlegen, damit innere Spannungen möglich sind, die in jedem Knoten die Resultante Null für die Gelenkdrücke ergeben?

¹⁾ Die Hilfsmittel dazu liegen vor. (Pascal, Determinanten, § 29 bis 31 (S. 119—124).

²⁾ L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme (Leipzig 1911) gibt für den Grad des „gefährlichen Ortes“, oder nach seiner Ausdrucksweise, der „Grenzfläche“, S. 665 richtig $g_\lambda = 2$ bei $\sigma_\lambda = 4$, dagegen S. 669 $g_\lambda = 4$ (statt 3) bei $\sigma_\lambda = 5$.

³⁾ Wir bezeichnen hier die Knotenpunkte zumeist durch Ziffern 1, 2... und nur ausnahmsweise mit P_1 , P_2 usw. die Stäbe durch die Ziffern der Endpunkte in () gesetzt, entsprechend die Stabdreiecke.

Die Spannungen in den Stäben des Dreiecks (3 4 5) ergeben Gelenkdrücke

$$K_{34} = -K_{43}, \quad K_{45} = -K_{54}, \quad K_{53} = -K_{35}.$$

Es sei ferner

$$K_3 = K_{34} + K_{35},$$

$$K_4 = K_{43} + K_{45},$$

$$K_5 = K_{53} + K_{54}.$$

Dann haben die Kräfte K_3 , K_4 und K_5 zusammen die Resultante Null, ihre Angriffslinien gehen also durch einen

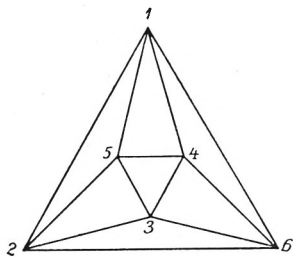


Fig. 1

Punkt der Ebene E_{345} . K_3 soll sich dann in zwei Kräfte zerlegen lassen, K_{32} und K_{36} nach den Stäben (32) und (36), also muß die Angriffslinie von K_3 mit diesen Stäben in einer Ebene liegen, sie ist also die Spur der Ebene E_{236} auf E_{345} , und Entsprechendes gilt für K_4 und K_5 . (Vgl. die schematische, nur als Merktafel der Bezifferung gedachte Figur 1.)

Es gilt also der Satz: Damit beim Oktaederfachwerk der Ausnahmefall eintritt, müssen die Spuren der drei Ebenen (z. B. E_{236} , E_{641} , E_{152}), in denen die an ein Dreieck, z. B. (261) mit einer Kante angrenzenden Dreiecke liegen, auf der Ebene des Gegendreiecks (hier (345)) durch einen Punkt gehen.

Oder kürzer (Blaschke):

Die Ebenen von je vier Dreiecken, die keine Kante gemein haben, müssen durch einen Punkt gehen.

Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, kann nachträglich durch Angabe eines — bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmten — Systems innerer Spannungen bewiesen werden, die zunächst in (34), (45), (53) so angenommen werden, daß die Gelenkdrücke in 3, 4, 5 die Spuren der Ebenen E_{236} , E_{641} , E_{152} zu Angriffslinien haben und eine Resultante vom

Betrag Null besitzen; die Fortpflanzung der Spannungen in den Stäben ist dann leicht anzugeben.

Dieselbe Bedingung erhält man kinematisch so: Wenn eine (unendlich kleine) starre Bewegung des Dreiecks (345) möglich sein soll, bei der die Punkte 1, 2, 6 ihre Lage nicht ändern, so müssen dabei die Punkte 3, 4, 5 Bahnelemente beschreiben, die zu den Ebenen E_{236} , E_{641} , E_{152} senkrecht stehen. Diese Ebenen sind also die den drei Punkten zugeordneten „Nullebenen“ des zur geforderten infinitesimalen Bewegung gehörigen Nullsystems. Die Nullebenen dreier Punkte 3, 4, 5 einer Ebene E_{345} gehen aber durch einen Punkt dieser Ebene — und damit ist also nochmals gezeigt, daß, um „Wackeligkeit“ zu erreichen, die bezeichneten vier Ebenen durch einen Punkt gehen müssen.

2. Gestalt der wackeligen Achtfläche. Fachwerke die die abgeleitete Bedingung erfüllen, sind leicht herzustellen. Man geht von (345) aus und legt die drei Ebenen $\bar{E}_3$, $\bar{E}_4$ und $\bar{E}_5$ durch einen beliebig auf der Ebene E_{345} angenommenen Punkt P (zwei Freiheitsgrade) und die Geraden $P3$, $P4$, $P5$ (weitere drei Freiheitsgrade). 6, 1 und 2 sind dann drei im übrigen beliebige Punkte auf den drei Geraden $\bar{E}_3 \times \bar{E}_4$, $\bar{E}_4 \times \bar{E}_5$, $\bar{E}_5 \times \bar{E}_3$. Es bleiben also nach Festlegung von (345) noch acht Freiheitsgrade¹⁾.

Ein einfacher, in der Praxis bei krahnnähnlichen Gerüsten vielleicht nicht ausgeschlossener Spezialfall hievon ist das folgende Fachwerk: Die Punkte 1, 2, 3, 4 liegen in einer Ebene, es seien die Schnittpunkte (g_{12}, g_{34}) bzw. (g_{23}, g_{41}) noch mit 7 und 8 bezeichnet; wir fordern, daß 5 und 6 in einer Ebene durch g_{78} liegen.

¹⁾ Bricards Konstruktion des Oktaeder-Mechanismus (octaèdre articulé) zeigt nach Wahl eines Dreiecks ABC noch zwei Freiheitsgrade; sie beginnt auch mit Wahl eines willkürlichen Punktes in der Ebene des Dreiecks (Journal de Math. (5) B, (1897) p. 144).

In diesem Falle liegen

2 3 6 8	in der Ebene	E_{236} ,
1 4 6 8	" " "	E_{146} ,
1 2 5 7	" " "	E_{125} ,
3 4 5 7	" " "	E_{345} .

Die Spuren von E_{236} und E_{146} auf E_{345} gehen daher durch den Schnittpunkt der beiden Geraden g_{68} und g_{57} ; die Spur von E_{125} auf E_{345} aber ist die Gerade g_{57} , also gehen in der Tat die drei Spuren durch einen Punkt.

Im allgemeinen Fall ist 1 2 3 4 ein windschiefes Vierseit. Um dann bei gegebenem 5 die Lagebeschränkung für 6 ausfindig zu machen, denken wir uns durch 5 die Treffgerade g' von g_{12} und g_{34} , also die Schnittgerade von E_{125} und E_{345} , und durch 6 die Treffgerade g'' von g_{23} und g_{41} , also die Schnittgerade von E_{236} und E_{146} gelegt. Diese vier Ebenen sollen durch einen Punkt gehen, also müssen g' und g'' einander treffen. Dies bedeutet aber, daß der Punkt 6 auf der Fläche zweiten Grades liegt, die die vier Geraden g_{12} , g_{23} , g_{34} , g_{41} und den Punkt 5 enthält. (Vgl. die schematische Figur 2.)

Da bei dieser Betrachtung die Punkte (1, 2, 3, 4, 5, 6) mit (2, 5, 4, 6; 3, 1) und (1, 5, 3, 6; 2, 4) vertauscht werden können (vgl. Fig. 1), so ergibt sich noch der Satz: Liegen die

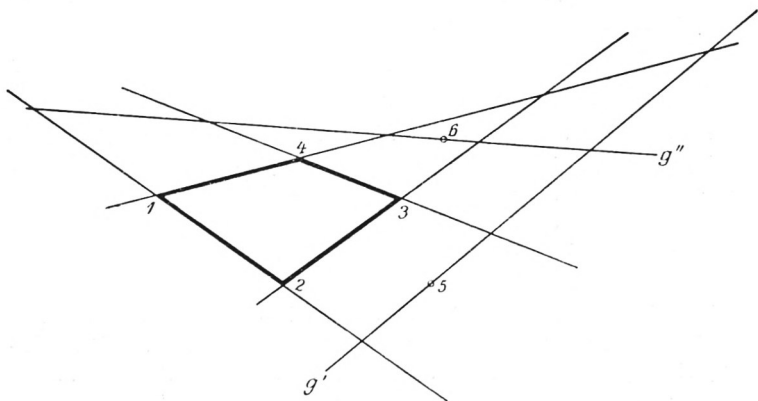


Fig. 2

Punkte 5 und 6 beide auf derselben F_2 , die g_{12} , g_{23} , g_{34} und g_{41} enthält, so liegen auch 1 und 3 auf derselben g_{25} , g_{54} , g_{46} , g_{62} enthaltenden F_2 und 2 und 4 beide auf derselben g_{15} , g_{53} , g_{36} , g_{61} enthaltenden F_2 .

Im Hinblick auf das in § 3, Nr. 3 zu besprechende Fachwerk vom Doppelpyramidentypus wollen wir hier bereits darauf aufmerksam machen, daß durch den Punkt 6 (später P_{n+2}) zwei dem gefährlichen Ort angehörige Gerade gehen, nämlich die Treffgeraden von g_{12} , g_{34} und von g_{23} , g_{41} . (In § 3, Nr. 2 begegnen uns dann fünf mit römischen Ziffern bezeichnete Gerade durch einen bestimmten Knotenpunkt usw.)

Wiederholt man die hier gegebene Konstruktion genau für den Fall, daß 1, 2, 3, 4 in einer Ebene liegen, so kommt man nur darauf, daß 5 und 6 beide in dieser Ebene E_{1234} liegen. Der zuvor besprochene Spezialfall muß also durch besondere Konstruktion genommen werden, was unschwer gelingt. Man sieht, daß die Ebenen E_{345} und E_{125} den Punkt 7 ($g_{12} \times g_{34}$) und die Ebenen E_{236} , E_{146} den Punkt 8 ($g_{23} \times g_{41}$) enthalten; der Grundforderung entsprechend, daß die vier Ebenen durch einen Punkt gehen sollen, müssen also die Schnittgerade g_{57} des ersten und die Schnittgerade g_{68} des zweiten Ebenenpaares einander treffen, also in einer Ebene liegen.

Demnach lautet das Ergebnis in vervollständigter Fassung: Sind 1, 2, 3, 4 vier getrennte ein Viereck bildende Punkte und liegt 5 auf keiner der vier Geraden g_{12} , g_{23} , g_{34} , g_{41} , so ist der gefährliche Ort für 6 die durch die vier Geraden gelegte, den Punkt 5 enthaltende F_2 , wenn die Punkte 1 bis 4 ein windschiefes Viereck bilden. Liegen die vier Punkte aber in einer Ebene E_{1234} , so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Liegt 5 in dieser Ebene, so ist 6 gar keiner Beschränkung unterworfen; liegt aber 5 nicht in E_{1234} , so liegt 6 entweder ebenfalls in dieser Ebene, oder in der durch 5 und die Schnittpunkte 7 von g_{12} , g_{34} und 8 von g_{23} , g_{41} gelegten Ebene E_{578} ¹⁾.

¹⁾ Welche Ausartungen zeigt in diesen Spezialfällen der von Blaschke a. a. O. in Gestalt eines Möbiusschen Doppeltetraeders an-

§ 3. Wackelige Fachwerke vom Doppelpyramidentypus.

1. Das Oktaeder. Es soll jetzt das Oktaeder analytisch untersucht werden. Von den zwölf Gleichungen, auf die die Forderung unveränderter Stablängen führt:

$$(x_i - y_k)(\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k)(\delta y_i - \delta y_k) + (z_i - z_k)(\delta z_i - \delta z_k) = 0,$$

wobei für $i k$ die Ziffernpaare (1, 2) (2, 3) (3, 4) (4, 1); (1, 5) (2, 5) (3, 5) (4, 5); (1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) einzusetzen sind, lassen wir die zu (1, 2), (5, 1) und (5, 2) gehörigen fort; dementsprechend setzen wir auch

$$\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0 \quad (i = 1, 2, 5).$$

Das darf gestehen, denn auf die „Wackeligkeit“ des Oktaeders hat es keinen Einfluß, wenn man die Ecken des Stabdreiecks (1 2 5) festhält. Dann bleiben für die neun übrigen Koordinatenvariationen neun lineare homogene Gleichungen, deren Determinante wir in leicht verständlicher Symbolik so schreiben können:

$$D = \begin{vmatrix} r_{23} & 0 & 0 \\ r_{53} & 0 & 0 \\ r_{63} & 0 & r_{36} \\ r_{43} & r_{34} & 0 \\ 0 & r_{14} & 0 \\ 0 & r_{54} & 0 \\ 0 & r_{64} & r_{46} \\ 0 & 0 & r_{16} \\ 0 & 0 & r_{26} \end{vmatrix}.$$

Hier sind immer je drei Reihen zusammengefaßt, z. B. bedeutet r_{23} die drei hintereinander stehenden Elemente

gegebene reziproke Kräfteplan der inneren Spannungen? — Interessanter, aber schwieriger zu behandeln wäre die Frage: Wie sondert man aus den wackeligen Achtfachen die Bricardschen Oktaedermechanismen aus? (Vgl. die vorige Fußnote, sowie Math. Enzyklopädie IV, 3 [Kinematik von A. Schoenflies] Nr. 21, S. 242).

$$x_2 - x_3 \quad y_2 - y_3 \quad z_2 - z_3$$

und jede Null vertritt drei hintereinanderstehende Nullen.

Führt man noch die Abkürzung ein

$$D(\kappa \lambda \mu \nu) = \begin{vmatrix} x_\kappa - x_\lambda & y_\kappa - y_\lambda & z_\kappa - z_\lambda \\ x_\kappa - x_\mu & y_\kappa - y_\mu & z_\kappa - z_\mu \\ x_\kappa - x_\nu & y_\kappa - y_\nu & z_\kappa - z_\nu \end{vmatrix}$$

so kann man die entwickelte Determinante D einfach schreiben und erhält als analytischen Ausdruck für die Forderung der „Wackeligkeit“ die Gleichung:

$$D \equiv D(2356) D(1345) D(1246) \\ - D(2345) D(1456) D(1235) = 0.$$

Hieraus sind unsere oben (§ 2, Nr. 2) gefundenen Ergebnisse wieder abzulesen: Hält man die Punkte 1 bis 5 fest, so beschreibt 6 eine Fläche zweiten Grades. Wählt man 6 so, daß

$$D(1246) = D(1236) = 0,$$

so ist die Gleichung erfüllt, also gehört die Gerade g_{12} dem angegebenen gefährlichen Ort F_2 an; dasselbe läßt sich für g_{23} , g_{34} und g_{41} nachweisen. Der Punkt 5 liegt auf der Fläche wegen

$$D(2355) = D(1455) = 0.$$

Liegen 1, 2, 3, 4 in einer Ebene E_{1234} , so spaltet sich von der Gleichung ein linearer Faktor ab, der gleich Null gesetzt, die Gleichung dieser Ebene ist, und der andere Faktor gibt, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Ebene durch 5 und die Schnittpunkte 7 und 8 der Geradenpaare g_{12} , g_{34} und g_{23} , g_{41} .

Es ist angebracht, noch ein Beispiel anzugeben: Bei der Koordinatenwahl

$$P_1 : 0 \ 0 \ 0$$

$$P_2 : a \ 0 \ 0$$

$$P_3 : 0 \ a \ 0$$

$$P_4 : 0 \ 0 \ a$$

$$P_5 : x_0 \ y_0 \ z_0$$

$$P_6 : x \ y \ z$$

erhält man für den gefährlichen Ort von P_6 die Gleichung

$$x_0 y (z_0 (a - x - y) - z (a - x_0 - y_0)) \\ + z (x_0 y - y_0 x) (a - x_0 - y_0 - z_0) = 0.$$

2. Das Dekaed. In derselben Weise wollen wir ein Dekaederfachwerk behandeln von folgender Gestalt: Fünf Punkte $P_1(000)$, $P_2(aaa)$, $P_3(a00)$, $P_4(0a0)$, $P_5(00a)$ sind durch die Stäbe (12) (23) (34) (45) (51) verbunden und jeder noch mit $P_6(x_0 y_0 z_0)$ und $P_7(xyz)$ durch einen Stab — wir haben gleich auch Koordinatenwerte beigelegt, die als Grundlagen für ein Beispiel dienen sollen.

Führt man bei diesem Fachwerk mit 7 Knotenpunkten und $3 \cdot 5 = 15 = 3 \cdot 7 - 6$ Stäben die entsprechende Rechnung durch, so erhält man die Fachwerkdeterminante hier als dreigliedrige Summe, jedes Glied ist wieder Produkt von drei Determinanten der Form $D(\kappa \lambda \mu \nu)$. Das erste Glied wird z. B.

$$D(6345) D(7124) D(7623) D(7651).$$

Man beachte, daß dieser Ausdruck je vom zweiten Grad in den Koordinaten der Punkte 1 bis 5, dagegen vom dritten Grad in den Koordinaten der Punkte 6 und 7 ist! Das gilt auch für die beiden anderen Glieder, und wir haben hier deutlich das in § 1 bereits mitgeteilte, in § 4, Nr. 2 zu beweisende allgemeine Gesetz vor Augen, daß der Grad in den Koordinaten eines Knotenpunktes gleich ist der Anzahl der von ihm ausgehenden Stäbe, vermindert um zwei Einheiten.

Wir bedienen uns jetzt der von Reiß benützten Symbolik: Zunächst führen wir homogene Koordinaten ein durch die Beziehung

$$x_k : y_k : z_k : 1 = x_{1k} : x_{2k} : x_{3k} : x_{4k},$$

sodann schreiben wir $(\kappa \lambda \mu \nu)$ für die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_{1\kappa} & \cdot & \cdot & x_{4\kappa} \\ x_{1\lambda} & \cdot & \cdot & x_{4\lambda} \\ x_{1\mu} & \cdot & \cdot & x_{4\mu} \\ x_{1\nu} & \cdot & \cdot & x_{4\nu} \end{vmatrix}$$

Dann ist z. B.

$$D(6345) = (6345) \frac{1}{x_{46} x_{43} x_{44} x_{45}},$$

und wir können zufolge des mitgeteilten Aufbaus der Determinante aus allen drei Gliedern der Entwicklung den Faktor

$$(x_{41} x_{42} x_{43} x_{44} x_{45})^{-1} (x_{46} x_{47})^{-3}$$

abspalten. Die Gleichung $D = 0$ nimmt damit die übersichtliche Normalform an:

$$(1) \quad \begin{aligned} & (6345)(7124)(7623)(7651) \\ & + (6451)(7512)(7634)(7623) \\ & + (6234)(7123)(7651)(7645) = 0. \end{aligned}$$

Man erhält also, wenn $P_1 \cdots P_6$ festgehalten werden, als „gefährlichen Ort“ für P_7 eine Fläche dritter Ordnung F_3 ; auf ihr muß P_7 liegen, wenn das Dekaedер „wackelig“ sein soll. P_6 ist ein konischer Punkt der Fläche, und zwar erhält man die Gleichung des Berührungskegels daselbst, wenn man jedesmal in der zweiten Klammer 7 (bzw. $x_{17}, x_{27}, x_{37}, x_{47}$) ersetzt durch 6 ($x_{16}, x_{26}, x_{36}, x_{46}$). — Geschrieben in den rechtwinkligen Koordinaten, die als Grundlage bei dem Beispiel gewählt wurden, wird die Gleichung der F_3 :

$$\begin{aligned} & (y-z)(x_0 y - y_0 x)(x_0 + y_0 - z_0 - a)(x(a - y_0 - z_0) - x_0(a - y - z)) \\ & + (z-x)(x_0 y - y_0 x)(x_0 + y_0 + z_0 - a)((x-a)(y_0 - z_0) \\ & \quad - (x_0 - a)(y - z)) \\ & + (x-y)x_0(z_0(a - x - y) - z(a - x_0 - y_0))((x-a)(y_0 - z_0) \\ & \quad - (x_0 - a)(y - z)) = 0. \end{aligned}$$

Wir kehren zur allgemeinen Untersuchung zurück und heben nochmals hervor, daß wir die Koordinaten der Punkte P_1 bis P_6 als fest gegeben, nur die von P_7 als veränderlich betrachten.

Bei der Aufstellung von (1) wurden die Ecken des Stabdreiecks (126) nicht variiert, genau wie oben beim Oktaeder die Punkte 1, 2, 5. Daraus ergibt sich auch hier eine gewisse Unsymmetrie der Gleichung. Man müßte aber notwendig zu

genau derselben Lagebeziehung gelangen, wenn man statt der Ecken von (1 2 6) die von (2 3 6), (3 4 6), (4 5 6) oder (5 1 6) festhalten würde.¹⁾ Hieraus folgt:

Zyklische Vertauschung von 1, 2, 3, 4, 5 kann nur die Form der Gleichung (1) ändern.

Das ist im folgenden zu berücksichtigen, wo diese äquivalenten Formen der Gleichung des gefährlichen Ortes F_3 für P_7 gelegentlich herangezogen werden müssen.

Die Gleichung (1) stellt, wie schon bemerkt wurde, eine F_3 mit Knotenpunkt in P_6 dar. Die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$(7\ 1\ 2\ 3) = (7\ 1\ 2\ 4) = (7\ 5\ 1\ 2) = 0,$$

also liegt die Gerade g_{12} auf der F_3 ; dasselbe gilt für die Geraden g_{23} , g_{34} , g_{45} , g_{51} .

Auch die weiteren 16 Geraden der F_3 sind aus der Gleichungsform abzulesen. Die Gleichung (1) ist erfüllt für

$$(7\ 6\ 2\ 3) = (7\ 6\ 4\ 5) = 0,$$

also enthält die F_3 die fünf Geraden I (II, III, IV, V) durch den Knotenpunkt P_6 , in denen die Ebenenpaare einander schneiden, die P_6 und je zwei nicht benachbarte Geraden des Fünfecks enthalten. (Vgl. die schematische Figur 3.)

Von den zehn bisher angegebenen Geraden der Fläche liegen je drei in den Ebenen $E_{612} \dots E_{651}$.

Je eine weitere Gerade liegt noch in den fünf Ebenen E_{123} , $E_{234} \dots E_{512}$ und wir können die Ebenen $\bar{E}_2, \bar{E}_3 \dots \bar{E}_1$

¹⁾ Es ist eine nützliche Übung, dies an dem gegebenen Beispiel zu bestätigen. Allgemein wäre es durch die Untersuchung des analytischen Zusammenhangs zwischen den verschiedenen Formen von (1) zu bestätigen und wegen weiterer Spezialfälle, die durch identisches Verschwinden von Faktoren sich auszeichnen, nachzuprüfen.

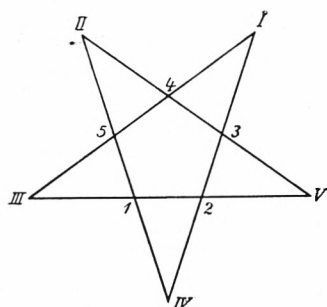


Fig. 3

unschwer angeben, die durch ihre Schnitte mit $E_{123} \dots$ diese fünf Geraden $h_2, h_3 \dots h_1$ bestimmen und überdies P_6 enthalten. Der Schnitt von E_{123} mit der F_3 liegt z. B., wie aus (1) zu entnehmen ist, teils auf E_{623} , also

$$(7623) = 0,$$

teils auf der F_2

$$(2) \quad (6345)(7124)(7651) + (6451)(7512)(7634) = 0.$$

An Stelle der Gleichung der Ebene E_{123} oder

$$(7123) = 0$$

kann man aber auch setzen

$$\frac{(7124)}{(4123)} = \frac{(7512)}{(5123)}.$$

Setzt man diese Proportion in (2) ein, so erkennt man, daß die dritte, außer g_{12} und g_{23} noch in E_{123} gelegene, der F_3 angehörige Gerade h_2 zugleich auf der durch P_6 gehenden Ebene E_2 liegt, die durch

$$(3) \quad (6345)(4123)(7651) + (6451)(5123)(7634) = 0$$

gegeben ist, und die, nebenbei bemerkt, II enthält.

Fünf Gerade der F_3 liegen dann noch in den Ebenen (I II), (II III), (III IV), (IV V), (V I).

Schließlich fehlt bei dieser Ableitung, die, von P_6 und dem Fünfeck ausgehend, fünfzehn weitere Gerade der F_3 erkennen läßt, noch die letzte, wieder P_6 enthaltende Gerade VI. Sie ist gemeinsame Achse der Ebenen $\overline{E}_1 \dots \overline{E}_5$ und läßt sich darstellen durch die Proportion:

$$(4) \quad \begin{aligned} & (7612):(7623):(7634):(7645):(7651) \\ & \quad = \lambda_{12}:\lambda_{23}:\lambda_{34}:\lambda_{45}:\lambda_{51}. \end{aligned}$$

Hierin ist zu setzen

$$\lambda_{51} = (6451)(6512)(5123)(6234),$$

und die anderen λ gehen daraus durch zyklische Vertauschung hervor.

Eine Abzählung zeigt übrigens (vgl. die folgende Nummer), daß die F_3 mit Knotenpunkt P_6 durch die fünf Geraden $g_{12} \dots g_{51}$, die auf ihr liegen sollen, vollständig bestimmt ist. Demnach lautet das Ergebnis:

Ein Fachwerk von besonderem Dekaedertypus sei gegeben, bestehend aus den fünf Stäben eines windschiefen Fünfecks 1 2 3 4 5 und den zehn Stäben, die die Ecken mit zwei weiteren Punkten 6 und 7 verbinden.

Der gefährliche Ort für 7 ist dann die F_3 , die 6 zum Knotenpunkt hat und die fünf Geraden $g_{12} \dots g_{51}$ enthält.

Wir dürfen nochmals hervorheben:

Die aus der Forderung der „Wackeligkeit“ des Dekaeders erhaltene Form der Flächengleichung (1) gestattet es, die Eigenschaften der F_3 einheitlich abzuleiten.

Auf jeden Fall ist hiermit ein Beitrag zu dem von F. Engel a. a. O. (Graßmann III, 2, Seite 108) aufgestellten Programm gegeben, wo in diesem Zusammenhang der Name von M. Reiß leider nicht genannt ist.

Eine Ausartung sei noch erwähnt: Liegen 1 2 3 4 5 in einer Ebene, so zerfällt der gefährliche Ort in diese Ebene und den Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitelpunkt 6, der noch die fünf Nebenecken des Fünfecks (1 2 3 4 5) enthält. Auf alle Ausartungen kann an dieser Stelle unmöglich eingegangen werden.

3. Verallgemeinerung. Es liegt nunmehr nahe, zu untersuchen, welche Fläche der gefährliche Ort für den Knotenpunkt P_{n+2} des Fachwerks vom Typus der n -seitigen Doppelpyramide wird. Dieses Fachwerk besteht aus $n+2$ Knotenpunkten und $3n = 3(n+2) - 6$ Stäben,

$$P_\nu P_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$P_n P_1$$

$$P_i P_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$P_i P_{n+2}.$$

Zu erwarten ist als gefährlicher Ort eine Fläche F_{n-2} mit $(n-3)$ -fachem Knotenpunkt P_{n+1} , also ein sogenanntes

Homaloid. Diese Fläche wird die n Geraden $g_{12}, g_{23} \dots g_{n1}$ enthalten, außerdem wahrscheinlich noch (mindestens)

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Gerade durch P_{n+1} , entsprechend den in Nr. 2 angegebenen Geraden I bis V für den Fall $n = 5$. Die Geraden sind zu erhalten als Schnitte der Ebenen, die durch den Knotenpunkt und die Geraden $g_{12} \dots g_{n1}$ gehen¹⁾, die Träger der Seiten des n -ecks sind. Von den so erhaltenen Schnittgeraden sind aber alle fortzulassen, die P_{n+1} mit einer der Ecken des n -ecks verbinden. Verfährt man so, dann stimmt die Abzählung, außerdem bleibt man in Einklang mit den vollständig untersuchten Spezialfällen ($n = 4, n = 5$).

Eine Fläche n -ter Ordnung hat

$$f_n - 1 = \frac{n}{6} (n^2 + 6n + 11)$$

wesentliche Konstanten, eine F_{n-2} also

$$f_{n-2} - 1 = \frac{n-2}{6} (n^2 + 2n + 3).$$

Ein seiner Lage im Raume nach vorgeschriebener Knotenpunkt m -ter Ordnung legt

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

Konstanten der Fläche fest; in unserm Fall wäre $m = n - 3$ zu setzen.

Wenn nun die F_{n-2} außerdem die n Geraden $g_{12} \dots g_{n1}$ enthält, so enthält sie zunächst die Punkte $P_1 \dots P_n$, außerdem aber ist zu verlangen, daß sie von jeder Geraden noch je $n - 3$ weitere Punkte enthält, damit die Geraden völlig auf der F_{n-2} verlaufen. Dadurch wären dann weitere

¹⁾ Daß die namhaft gemachten Geraden dem gefährlichen Ort angehören, müßte sich auch direkt graphostatisch erkennen lassen.

$$n(n-2)$$

Konstanten festgelegt. Da nun

$$\begin{aligned} n(n-2) + \frac{n-3}{3} + \frac{(n-3)^2}{2} + \frac{(n-3)^3}{6} \\ = \frac{n-2}{6} (n^2 + 2n + 3), \end{aligned}$$

so stimmt diese Abzählung zu der Vermutung über den gefährlichen Ort.

Aber auch eine dritte Abzählung steht damit in Einklang.

Bei Ausartung, dann also, wenn das n -seit in einer Ebene liegt, ist der Zerfall der Fläche in diese Ebene und einen Kegel $(n-3)$ -ter Ordnung zu erwarten, dessen Scheitelpunkt P_{n+1} ist. Der in einer P_{n+1} nicht enthaltenden Ebene E gelegene Schnitt C_{n-3} dieses Kegels müßte die Schnittpunkte dieser Ebene mit den oben genannten $\frac{n(n-3)}{2}$ Geraden durch P_{n+1} enthalten und durch sie bestimmt sein, hiermit ist in Einklang

$$\frac{n(n-3)}{2} = c_{n-3} - 1.$$

[Schneiden wir die F_{n-2} mit einer den Knotenpunkt P_{n+1} nicht enthaltenden Ebene E , so ist diese Schnittkurve durch

$$c_{n-2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Punkte überbestimmt. (So sind z. B. die Schnittpunkte der sechs Kanten des Oktaeders (§ 2, 2) mit einer Ebene auf einer C_2 gelegen.) Außer den n Schnittpunkten von E mit $g_{12} \dots g_{n1}$ kommen ja noch die Schnittpunkte mit den oben angegebenen $\frac{n(n-3)}{2}$ Geraden durch P_{n+1} hinzu, und in der Tat ist

$$n + n \frac{(n-3)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = c_{n-2}].$$

Diese dreierlei Abzählungen sprechen dafür, daß der gefährliche Ort für P_{n+2} tatsächlich die F_{n-2} mit $(n-3)$ -fachem Knotenpunkt P_{n+1} ist, die die Geraden $g_{12} \dots g_{n1}$ enthält und noch die c_{n-3} genannten Geraden durch P_{n+1} .

Für diese Klasse von Homaloïden wäre dann noch folgende Reziprozität zu erweisen, die daraus zu erschließen ist, daß in der Bedingung für die „Wackeligkeit“ die Punkte P_{n+1} , P_{n+2} ihre Rollen vertauschen können aus rein geometrischen Gründen.

Es sei P_{n+2} ein auf dem durch das n -Eck $P_1 \dots P_n$ und den $(n-3)$ -fachen Knotenpunkt P_{n+1} bestimmten gefährlichen Ort F_{n-2} gelegener Punkt, dann liegt umgekehrt P_{n+1} auf dem durch P_{n+2} und das n -Eck bestimmten gefährlichen Ort F_{n-2} .

Dieser (für $n=4$ noch triviale) Satz zeigt, wie überhaupt jede der vorausgegangenen Betrachtungen, die heuristische Tragweite der von Möbius, Cremona u. a. geschaffenen Verbindung von Statik und Geometrie, die sich auch in der Flächentheorie bewährt hat.

§ 4. Die Invarianz der Fachwerkdeterminante.

1. Raumbachwerke mit einem Stabdreieck. Die folgende Untersuchung befaßt sich mit der Feststellung des Ausnahmefalls bei Fachwerken, die mindestens ein eigentliches, nicht zu einer Strecke zusammenschrumpfendes Stabdreieck enthalten, sie gilt also insbesondere für Dreiecksflechtwerke.

Übrigens zeigt die einschlägige Literatur, daß wohl nur Fachwerke behandelt worden sind, bei denen diese Voraussetzung zutrifft.

Andersartige Fachwerke lassen sich unschwer angeben. Man erhält z. B. ein Fachwerk ohne Stabdreieck, wenn man vier Punkte mit sechs weiteren Punkten durch Stäbe verbindet; dann ist $k=10$, $s=4 \cdot 6=24=3k-6$, ohne daß ein Stabdreieck auftritt. Von solchen Fällen sehen wir ab.

Durch diese Beschränkung sollte erreicht werden, daß das zu untersuchende Fachwerk an Freiheitsgraden der inneren

Beweglichkeit nicht verliert, wenn man drei Punkten, nämlich den Ecken des Stabdreiecks feste Koordinaten zuweist, dafür aber die drei Bedingungen fortläßt, die die Forderung unveränderter Länge der drei Seiten analytisch wiedergeben. Es bleiben dann also für die $3k - 9$ Koordinatenvariationen der $k - 3$ übrigen Punkte genau $3k - 9 = s - 3$ lineare homogene Gleichungen übrig, deren Determinante zu untersuchen ist.

Gewiß ist die Verminderung der Koordinatenvariationen um neun Stücke „im allgemeinen“ gestattet, jedoch bleibt die Frage zu erörtern: Gegeben sei ein Raumfachwerk ($s = 3k - 6$), das zum mindesten einen Freiheitsgrad der inneren Beweglichkeit besitzt. Ist es immer (durch Stabvertauschung) möglich, drei Knotenpunkte festzulegen und dafür drei Bedingungen fortzulassen, ohne daß der Freiheitsgrad verloren geht? Aber die Beantwortung dieser Frage würde sich in Spezialuntersuchungen zersplittern.

Bei ebenen Fachwerken ($s = 2k - 3$) tritt diese formale Schwierigkeit überhaupt nicht ein, denn sie verlieren keinen Freiheitsgrad der inneren Beweglichkeit, wenn man beide Endpunkte eines Stabes festhält. Dann ist nur noch die Determinante von

$$s - 1 = 2k - 4$$

linearen homogenen Gleichungen zwischen $2(k - 2)$ Koordinatenvariationen zu untersuchen¹⁾.

Die Beweisführung der Sätze, die in den drei folgenden Abschnitten für Raumfachwerke bewiesen werden, verläuft

¹⁾ Als Beispiel führen wir das bekannte, von Müller-Breslau zuerst untersuchte Beispiel des ebenen Fachwerks $s = 9$, $k = 6$ an, das aus einem Sechseck mit drei Diagonalen (14), (25), (36) besteht. Läßt man bei der kinematischen Untersuchung die Bedingung $\delta r_{12} = 0$ fort und setzt $\delta x_1 = \delta y_1 = \delta x_2 = \delta y_2 = 0$, so erhält man als Determinante der übrigen Gleichungen

$$D = (136)(145)(234)(256) - (134)(156)(236)(245),$$

wobei ($\varepsilon \lambda \mu$) der doppelte Inhalt des Dreiecks mit den Ecken $\varepsilon, \lambda, \mu$ ist. $D = 0$ weist bei Festhaltung von fünf Punkten dem sechsten als gefährlichen Ort einen Kegelschnitt zu, und D ist geradezu das Reißsche Flächenprodukt von sechs Punkten (Reiß, a. a. O., S. 401).

für ebene Fachwerke genau so wie bei räumlichen und kann ausgelassen werden.

2. Projektive Transformationen. Wie dies zuvor in speziellen Beispielen ausgeführt worden ist (§ 3, Nr. 1 und 2), so wollen wir uns jetzt beim allgemeinen Fachwerk ($s = 3k - 6$) die Determinante der $s - 3$ Gleichungen für $3k - 9$ Koordinatenvariationen, die nach Auslassung eines Stabdreiecks übrig bleiben, der Laplaceschen Entwicklung unterworfen denken.

Wir erhalten dann

$$(1) \quad D = \sum \Pi(D(\kappa \lambda \mu \nu)),$$

wobei die Faktoren Determinanten sind von der in § 3, Nr. 1 angegebenen Form; jedes Produkt enthält $k - 3$ Faktoren. Der Grad von D in den $3k$ Koordinaten ist dann $3k - 9$.

Diesen Grad können wir noch in anderer Weise abzählen. Es sei $\sigma_1 [\sigma_\kappa]$ die Anzahl der vom Punkte $P_1 [P_\kappa]$ ausgehenden Stäbe, $g_1 [g_\kappa]$ der Grad von D in den Koordinaten des Punktes $P_1 [P_\kappa]$. Dann ist, das wollen wir für P_1 und damit allgemein für P_κ nachweisen

$$(2) \quad g_\kappa \leq \sigma_\kappa - 2 \quad (k = 1, 2, \dots k).$$

Um dies zu zeigen, bezeichnen wir für den Augenblick die mit P_1 durch Stäbe verbundenen Punkte durch $P_2 \dots P_m$ ($m = \sigma_1 + 1$). Wenn nun P_1 keiner der bei der Variation festgehaltenen Punkte ist, so gilt folgende Überlegung, bei der wir uns wieder der in § 3, Nr. 1 benützten Symbolik bedienen: Die erste Reihe wird, mit Zusammenfassung der drei ersten Glieder

$$r_{21}$$

$$r_{31}$$

$$\vdots$$

$$r_{m1}$$

$$0$$

$$\vdots$$

$$0,$$

außerdem kommt in der ersten Zeile noch einmal die Folge r_{12} , also $x_2 - x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1$ vor, in der zweiten Zeile noch

einmal r_{13} usw., doch stehen diese Folgen niemals untereinander. Ferner ist jede Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{\kappa 1} \\ r_{\lambda 1} \\ r_{\mu 1} \end{vmatrix}$$

vom ersten Grad in den Koordinaten des Punktes P_1 , und jede Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{1\kappa} \\ r_{1\gamma} \\ r_{1\varrho} \end{vmatrix}$$

ebenfalls. Demnach ist jedes einzelne Produkt, das in der Entwicklung (1) als Glied auftritt, in den Koordinaten des Punktes P_1 höchstens vom Grade

$$1 + m - 4 = \sigma_1 - 2,$$

also wird

$$g_1 \leq \sigma_1 - 2.$$

Wäre P_1 ein nicht variierter Punkt, so würden die $r_{\kappa 1}$ überhaupt nicht vorkommen, nur die $r_{1\kappa}$, und zwar in $\sigma_1 - 2$ verschiedenen Zeilen, also kommt man hier zu demselben Ergebnis

$$g_1 \leq \sigma_1 - 2.$$

Damit ist die Beziehung (2) bewiesen.

Um aus dieser Abzählung weitere Schlüsse zu ziehen, müssen wir beachten, daß jede Determinante $D(\kappa\lambda\mu\nu)$ in den Koordinaten der Punkte vom dritten und nicht vom vierten Grade ist. Demnach muß man, um den Grad eines Gliedes der Summe D zu erhalten, die durch Addition der Grade g_{κ} erhaltene Summe mit 3:4 multiplizieren und erhält

$$(3) \quad \Sigma g_{\kappa} = \frac{4}{3} (3k - 9) = 4k - 12.$$

Ferner ist die über alle Knotenpunkte erstreckte Summe

$$(4) \quad \Sigma \sigma_{\kappa} = 2s = 6k - 12,$$

denn in dieser Summe wird jeder Stab zweimal mitgezählt, seinen beiden Endpunkten entsprechend.

Aus (2) und (4) folgt also

$$(5) \quad \Sigma g_{\kappa} \leq \Sigma \sigma_{\kappa} - 2k = 4k - 12,$$

und hier gilt das erste Gleichheitszeichen nur, wenn in (2) überall das Gleichheitszeichen gilt. Dann zeigt aber der Vergleich von (3) und (5), daß nur diese Möglichkeit besteht, und damit ist also bewiesen, daß jedes einzelne Glied der Laplace'schen Entwicklung (1) in den Koordinaten des Punktes P_{κ} ($\kappa = 1, 2, \dots k$) genau vom Grad $\sigma_{\kappa} - 2$ ist, wobei σ_{κ} die Anzahl der von diesem Punkte ausgehenden Stäbe ist.

Nunmehr können wir homogenisieren¹⁾, wir setzen wie oben (§ 3, Nr. 2)

$$(6) \quad x_{\kappa} : y_{\kappa} : z_{\kappa} : 1 = x_{1\kappa} : x_{2\kappa} : x_{3\kappa} : x_{4\kappa},$$

und sodann D durch Multiplikation mit

$$\prod_1^k x_{4\kappa}^{\sigma_{\kappa}-2}$$

auf die Normalform bringen

$$(7) \quad \Sigma (II(\kappa \lambda \mu \nu))$$

mit Verwendung der Abkürzung

$$(8) \quad (\kappa \lambda \mu \nu) = \begin{vmatrix} x_{1\kappa} & x_{2\kappa} & x_{3\kappa} & x_{4\kappa} \\ x_{1\lambda} & x_{2\lambda} & x_{3\lambda} & x_{4\lambda} \\ x_{1\mu} & x_{2\mu} & x_{3\mu} & x_{4\mu} \\ x_{1\nu} & x_{2\nu} & x_{3\nu} & x_{4\nu} \end{vmatrix}.$$

Das Ergebnis ist also:

Durch Einführung homogener Koordinaten (6) kann die Fachwerkdeterminante (1) auf die Normalform (7) gebracht werden.

Sie ist homogen vom Grade $3k - 9$ in den $4k$ homogenen Koordinaten der Knotenpunkte und homogen vom Grade $\sigma_{\kappa} - 2$ in den homogenen Koordinaten der einzelnen Knotenpunkte P_{κ} .

¹⁾ Die vorausgehende Strukturuntersuchung, die, statt indirekt durch Ungleichheiten (2) auch direkt, aber umständlicher, durch Ränderungsprozesse geführt werden kann, war bei der Fachwerkdeterminante notwendig. Bei der Reiß'schen Determinante E ist die Homogenität und damit die projektive Invarianz von vorneherein selbstverständlich.

Dabei bedeutet σ_κ die Anzahl der von P_κ ausgehenden Stäbe.

Hieraus folgen unmittelbar zwei weitere Sätze.

1) Die Klasse der Ausnahmefachwerke ist gegenüber projektiven Transformationen invariant.

Bei linearen homogenen Substitutionen

$$y'_i = a_{i1} x_{1\kappa} + a_{i2} x_{2\kappa} + a_{i3} x_{3\kappa} + a_{i4} x_{4\kappa} \\ (i = 1, 2, 3, 4; \kappa = 1, 2, \dots k)$$

wird nämlich

$$(\kappa \lambda \mu \nu)' = |a| (\kappa \lambda \mu \nu),$$

woraus der Satz folgt, daß zunächst D , in der Form (7) geschrieben, eine Invariante ist, und hierin ist die vorangestellte Behauptung mit enthalten.

Außer bekannten Beispielen von ebenen „wackeligen“ Fachwerken war es gerade Blaschkes „wackeliges“ Achteck, dessen genauere Strukturuntersuchung zu der Vermutung führte, daß in der „Wackeligkeit“ eine projektiv invariante Eigenschaft vorliegt, die über den Rahmen der „Affingeometrie“ hinausgeht.

Man kann den Satz zu verschiedenen Zwecken benutzen, mit seiner Hilfe z. B. aus Fachwerken, die ohne weiteres als Mechanismen zu erkennen sind (vgl. § 1), wackelige Fachwerke ableiten.

2) Hält man im Fachwerk alle Knotenpunkte bis auf einen einzigen P_κ fest, so ist der gefährliche Ort für diesen Punkt, d. h. die Fläche, an die P_κ gebunden ist, wenn das Fachwerk beständig Ausnahmefachwerk bleiben soll, eine Fläche von der Ordnung

$$g_\kappa = \sigma_\kappa - 2.$$

Bei ebenen Fachwerken¹⁾ gilt der Satz 1 genau so, in den Aussagen des zweiten Satzes tritt an Stelle der Fläche von der Ordnung $\sigma_\kappa - 2$ eine Kurve von der Ordnung $\sigma_\kappa - 1$.

¹⁾ Vgl. hierzu das oben in der Fußnote besprochene Beispiel von Müller-Breslau.

3. Projektive Maßbestimmung. Es sei im Raume (x, y, z) eine projektive Maßbestimmung eingeführt unter Zugrundelegung der nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades

$$(9) \quad F(x, y, z) \equiv x f_1(x, y, z) + y f_2(x, y, z) + z f_3(x, y, z) + f_4(x, y, z) = 0.$$

Dabei ist gesetzt

$$a_{i1} x + a_{i2} y + a_{i3} z + a_{i4} = f_i(x, y, z)$$

und es ist

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$(10) \quad \begin{aligned} F(x_\nu, y_\nu, z_\nu) &= F_{\nu\nu}, \\ f_{i\nu} &= f_i(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ F_{\mu\nu} &= x_\mu f_{1\nu} + y_\mu f_{2\nu} + z_\mu f_{3\nu} + f_{4\nu} \\ &= x_\nu f_{1\mu} + y_\nu f_{2\mu} + z_\nu f_{3\mu} + f_{4\mu} = F_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Dann ist bekanntlich in der durch die Fundamentfläche (9) gegebenen projektiven Maßbestimmung die (nichteuclidische) Entfernung r'_{12} der Punkte P_1, P_2 bis auf einen von den Koordinaten unabhängigen Faktor gleich dem Logarithmus des Quotienten der beiden Wurzeln der Gleichung

$$F_{11} + 2\lambda F_{12} - \lambda^2 F_{22} = 0.$$

Setzt man also

$$\sqrt{F_{11} F_{22} - F_{12}^2} = W_{12},$$

so wird

$$dr'_{12} = \frac{d(F_{12} + W_{12})}{F_{12} + W_{12}} - \frac{d(F_{12} - W_{12})}{F_{12} - W_{12}}$$

und für

$$dr'_{12} = 0$$

kann man schreiben

$$F_{12} dW_{12} - W_{12} dF_{12} = 0$$

oder

$$2 F_{11} F_{22} dF_{12} - F_{11} F_{12} dF_{22} - F_{22} F_{12} dF_{11} = 0.$$

Diese Gleichung denken wir uns nach den Differentialen der Koordinaten von P_1 und P_2 geordnet, also in der Form $X_{12}dx_1 + Y_{12}dy_1 + Z_{12}dz_1 + X_{21}dx_2 + Y_{21}dy_2 + Z_{21}dz_2 = 0$ geschrieben; hierin ist also

$$X_{12} = 2 F_{11} F_{22} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_1} - F_{22} F_{12} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_{21} = 2 F_{11} F_{22} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} - F_{11} F_{12} \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2},$$

$$\dots \dots \dots$$

Um jetzt den (kinematischen!) Ausnahmefall zu erhalten, haben wir zu fordern, daß aus $s = 3$ der Gleichungen

$$dr'_{\mu\nu} = 0$$

oder

$$(11) \quad X_{\mu\nu}dx_\mu + Y_{\mu\nu}dy_\mu + Z_{\mu\nu}dz_\mu + X_{\nu\mu}dx_\nu + Y_{\nu\mu}dy_\nu + Z_{\nu\mu}dz_\nu = 0$$

sich die $dx_\mu : dy_\mu : dz_\mu$ (mit Auslassung der Ecken des festgehaltenen Stabdreiecks) als nicht sämtlich zu Null werdende Differentiale bestimmen lassen.

Ähnlich wie oben erhalten wir (statt (1)) die Determinante

$$(12) \quad D' = \Sigma H(D'(\kappa\lambda\mu\nu))$$

wobei noch zu setzen ist

$$(13) \quad D'(\kappa\lambda\mu\nu) = \begin{vmatrix} X_{\kappa\lambda} & Y_{\kappa\lambda} & Z_{\kappa\lambda} \\ X_{\kappa\mu} & Y_{\kappa\mu} & Z_{\kappa\mu} \\ X_{\kappa\nu} & Y_{\kappa\nu} & Z_{\kappa\nu} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten sind noch umzuformen, um sie mit den $D(\kappa\lambda\mu\nu)$ zu vergleichen. Dabei schreiben wir der Einfachheit halber 1234 statt der griechischen vier Buchstaben. Man sieht zunächst, daß aus den Zeilen von $D'(1234)$ die Faktoren F_{22} , F_{33} und F_{44} herausgestellt werden können. So- dann ist geeignete Ränderung anzuwenden; sie ergibt

$$F_{11} D'(1234) = F_{22} F_{33} F_{44} \begin{vmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ F_{12} 2 F_{11} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_1} - F_{12} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} & . & . & . \\ F_{13} 2 F_{11} \frac{\partial F_{13}}{\partial x_1} - F_{13} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} & . & . & . \\ F_{14} 2 F_{11} \frac{\partial F_{14}}{\partial x_1} - F_{14} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Hier multipliziert man die erste Reihe mit

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial z_1}$$

und addiert zu den drei folgenden Reihen. Sodann dividiert man diese Reihen je durch 2 und setzt den Faktor 8 heraus. Endlich multipliziert man die drei letzten Reihen mit

$$-x_1, \quad -y_1, \quad -z_1$$

und addiert zu ersten. Es kommt dann

$$\begin{aligned} D'(1234) &= 8 F_{11}^2 F_{22} F_{33} F_{44} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{42} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{vmatrix} \\ &= 8 |a| F_{11}^2 F_{22} F_{33} F_{44} D(1234). \end{aligned}$$

Jetzt ist der Zusammenhang zwischen $D'(12)$ und $D(1)$ leicht zu erkennen. Multipliziert man in D die Zeile

$$\dots x_\mu - x_\nu, y_\mu - y_\nu, z_\mu - z_\nu \quad 0 \dots \quad 0 \quad x_\nu - x_\mu, y_\nu - y_\mu, z_\nu - z_\mu \quad 0 \dots$$

mit $F_{\mu\mu} F_{\nu\nu}$, so gehen die Faktoren $D(\kappa\lambda\mu\nu)$ der Laplace'schen Entwicklung von D gerade über in die $D'(\kappa\lambda\mu\nu)$, wenn man von dem Faktor $8|a|$ absieht. Im übrigen unterscheidet sich dann D' von D nur von dem Faktor

$$H(F_{\mu\mu}^M),$$

wobei M die Anzahl der von P_μ ausgehenden Stäbe (also σ_μ) bedeutet, wenn P_μ kein festgehaltener Punkt ist; in diesem Falle aber hat man $\sigma_\mu - 2$ einzusetzen. Im ganzen ist der

Faktor, der D' von D unterscheidet, unwesentlich; er ist von Null verschieden, da wir selbstverständlich die Fundamentalfläche durch keinen der Knotenpunkte legen.

Es ergibt sich also der Satz:

Führt man im (euklidischen) Raum (x, y, z) des Fachwerks eine projektive (nichteuklidische) Maßbestimmung ein — mit Verwendung einer Fundamentalfläche, die keinen Knotenpunkt des Fachwerks enthält — so bleibt dabei der kinematische Charakter des Fachwerks erhalten.

Es ist also für beide Maßbestimmungen, die euklidische und die nichteuklidische, gleichzeitig „wackelig“ oder nicht.

4. Kinematischer und statischer Ausnahmefall. Wie schon in § 1 erwähnt worden ist, gilt die bekannte Analogie zwischen Statik und Kinematik (Zusammensetzung der Kräfte in einem Punkt und der infinitesimalen Rotationen) auch in der nichteuklidischen Geometrie. Aber es bedarf doch noch eines Beweises, daß auch bei projektiver Maßbestimmung kinematischer und statischer Ausnahmefall sich völlig decken.

Die Grundlagen für diesen Beweis sind übrigens gleichfalls in der in § 1 angeführten Arbeit von Lindemann gegeben.

Wenn auf die beiden Endpunkte eines Stabes $(\mu \nu)$ Kräfte wirken, so leisten sie bei einer infinitesimalen Ortsänderung eine Arbeit

$$(14) \quad \bar{X}_{\mu \nu} dx_{\mu} + Y_{\mu \nu} dy_{\mu} + \bar{Z}_{\mu \nu} dz_{\mu} + \bar{X}_{\nu \mu} dx_{\nu} + Y_{\nu \mu} dy_{\nu} \\ + \bar{Z}_{\nu \mu} dz_{\nu}.$$

Gehen von dem Punkt P_1 die Stäbe $r_1, \dots, r_{1 \sigma_1}$ aus, so wird von ihnen an P_1 die Arbeit geleistet

$$(\bar{X}_{11} \dots + \bar{X}_{1 \sigma_1}) dx_1 + (\bar{Y}_{11} + \dots + \bar{Y}_{1 \sigma_1}) dy_1 \\ + (\bar{Z}_{11} \dots + \bar{Z}_{1 \sigma_1}) dz_1.$$

Wenn diese Kräfte Gelenkdrücke sind, die keine äußere Resultante haben, so ist die Arbeit für jede Verschiebung gleich Null, also

$$(15) \quad \begin{aligned} \bar{X}_{11} + \dots + \bar{X}_{1\sigma_1} &= 0, \\ \bar{Y}_{11} + \dots + \bar{Y}_{1\sigma_1} &= 0, \\ \bar{Z}_{11} + \dots + \bar{Z}_{1\sigma_1} &= 0. \end{aligned}$$

Wegen (11) und (14) nimmt dann das Prinzip der virtuellen Verrückungen die Form an:

$$(16) \quad \begin{aligned} &\Sigma (\bar{X}_{\mu\nu} \delta x_\mu + \dots + \bar{Z}_{\nu\mu} \delta z_\mu) \\ &= \Sigma Q_{\mu\nu} (X_{\mu\nu} \delta x_\mu + \dots + Z_{\nu\mu} \delta z_\nu), \end{aligned}$$

also ist wegen (15)

$$(17) \quad \begin{aligned} \Sigma Q_{\mu\nu} X_{\mu\nu} &= 0, \\ \Sigma Q_{\mu\nu} Y_{\mu\nu} &= 0, \quad (S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}) \\ \Sigma Q_{\mu\nu} Z_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

Die Summen sind so zu verstehen: Der Index μ ist in jeder Summe fest und nimmt der Reihe nach die Werte $1, 2 \dots k$ an, und der Index ν durchläuft für $\mu = 1$ der Reihe nach die Werte $1, 2 \dots \sigma_1$; entsprechend für die anderen Indices. Man hat also für $s = 3k - 6$ Multiplikatoren im ganzen $3k$ Gleichungen. Es muß also jede $(3k - 6)$ -reihige Determinante der, so dürfen wir sie wohl nennen, *statischen Matrix* des Fachwerks von $3k - 6$ Reihen und $3k$ Zeilen zu Null werden. Die *kinematische Matrix*, die man erhält, wenn man fordert, daß von den $3k$ Koordinatenvariationen entsprechend den sechs äußeren Freiheitsgraden sechs beliebige willkürlich gewählt werden dürfen, und die übrigen dann bestimmt werden können, wird nach (11) sich von der statischen Matrix nur dadurch unterscheiden, daß Reihen und Zeilen vertauscht sind.

Diese Überlegung, die parallel zu dem bekannten Beweis des Föppl'schen Satzes von der Äquivalenz des statischen und des kinematischen Ausnahmefalls beim Fachwerk $s = 3k - 6$ im euklidischen Raum verläuft, zeigt uns also, daß auch in der nichteuklidischen Geometrie der statische mit dem kinematischen Ausnahmefall sich völlig deckt.

Die in Nr. 2 und 3 dieses Paragraphen unvermeidliche Beschränkung auf Fachwerke mit einem Stabdreieck ist also hier nicht mehr nötig.

Um diesem Ergebnis noch eine konkrete Gestalt zu geben, sei folgendes Beispiel hinzugefügt:

Liegt im euklidischen Raum irgend ein Ausnahmefachwerk vor, etwa Blaschkes „wackeliges Achteck“ oder unser „wackeliges Dekaed“, so erhält man daraus ein Ausnahmefachwerk im sphärischen Raum S_3 durch Zentralprojektion. Man ergänzt zunächst den R_3 zu einem euklidischen R_4 durch Hinzufügen einer vierten, auf den drei andern (x -, y -, z -Achse) im Nullpunkte senkrechten u -Achse. Auf dieser Achse nimmt man dann den Punkt $M(0, 0, 0, a > 0)$ als Mittelpunkt einer dreifach ausgedehnten Kugel S_3 . Von M aus projiziert man die Knotenpunkte des Fachwerks zentral auf S_3 und wählt von den beiden Schnittpunkten eines Projektionsstrahles MP_μ mit S_3 immer den Punkt Q'_μ aus, dessen vierte Koordinaten u'_μ kleiner als a ist.

Die Q'_μ mit ihren aus Hauptkreisbögen $Q'_\mu Q'_\nu$ bestehenden, den Stäben $(\mu \nu)$ entsprechenden Verbindungsstücken bilden dann im S_3 ebenfalls ein Ausnahmefachwerk.

Ganz entsprechend verläuft die Konstruktion von zweidimensionalen sphärischen Ausnahmefachwerken durch Zentralprojektion ebener Ausnahmefachwerke auf eine Kugel.

Mechanismen in der euklidischen Ebene ($s = 2k - 3$) bzw. im euklidischen Raume ($s = 3k - 6$) verwandeln sich dabei selbstverständlich nur ausnahmsweise wieder in Mechanismen auf der Kugel bzw. im S_3 ; überhaupt scheinen derartige „sphärische Fachwerkmechanismen“, die endliche innere Beweglichkeit besitzen, noch kaum bekannt zu sein.

Die in mancher Hinsicht überraschende Feststellung, daß die erörterten Fragen der Kinematik und Statik des Fachwerks einen invarianten Charakter gegenüber der Gruppe aller pro-

jektiven Transformationen zeigen, hat ihr Gegenstück in der Flächentheorie.

Darboux hat gezeigt — und er sagt mit Recht, „il est *intéressant* de voir . . .“ —, daß man aus den infinitesimalen Verbiegungen ξ , η , ζ einer Fläche F die $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ aller aus F durch projektive Transformationen hervorgehenden Flächen $\bar{F}$ gewinnen kann¹⁾.

Eine Anwendung hiervon darf zum Schluß noch mitgeteilt werden. Es ist nachgewiesen worden, daß man die infinitesimalen Verbiegungen aller Ordnungen und damit die allgemeinste analytische Verbiegung einer Fläche rekurrierend durch Quadraturen bestimmen kann, sobald man die ξ , η , ζ kennt²⁾. Da nun diese infinitesimalen Verbiegungen (erster Ordnung) für die Kugel auf verschiedenen Wegen und in verschiedener Form bestimmt worden sind³⁾, so ist die Bestimmung der analytischen Verbiegungen der Flächen zweiten Grades somit auf eine Kette rekurrierender Quadraturen zurückgeführt.

¹⁾ Théorie des surfaces IV (1. Aufl. 1896), p. 78. Ein kürzerer, einheitlicher Beweis dieses Satzes durch Anwendung homogener Koordinaten wäre im Sinne der Invariantentheorie wünschenswert.

²⁾ Diese Berichte (1920), S. 21—48. Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen.

³⁾ Vgl. z. B. S. 36—38 der oben angeführten Arbeit.