Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über unendliche Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. M.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 15. November 1919.

1. Der eingliedrig-periodische Kettenbruch: $\left[\dot{\frac{a}{1}}\right] = \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \cdots$, wo a eine beliebige Zahl ist, konvergiert bekanntlich, mit Ausnahme der reellen Werte von a, die $< -\frac{1}{4}$ sind und für die er wesentlich divergiert. Die nächsteinfache Klasse von Kettenbrüchen, die eingliedrig-limitärperiodischen[1]) Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, wo $\lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = a$ eine bestimmte Zahl ist — wobei aber die reellen a, die $\leq -\frac{1}{4}$ sind, von der Betrachtung ausgeschlossen werden — sind zunächst nur im weiteren Sinne konvergent; sie konvergieren auch schlechthin, abgesehen von gewissen Ausnahmefällen. Herr Perron[2]) hat weiter erkannt, daß es dazu genügt, wenn nur

[1]) Nach der Bezeichnung von A. Pringsheim: Diese Berichte, Jahrg. 1910, Abh. 6, S. 36.

[2]) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, § 56, Satz 40. — Herr Perron behandelt dort Kettenbrüche von der etwas allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo die a_ν bzw. b_ν in der Nähe zweier Zahlen a bzw. b liegen. Die im Text vorgenommene Beschränkung auf die Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ist keine wesentliche, da ja jene allgemeinere Form durch äquivalente Transformation stets in die speziellere übergeführt werden kann.

von einem ν an alle a_ν in einer gewissen Nähe von a liegen (ohne daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ sein müßte); solche Kettenbrüche mag man nach dem Vorgange von Herrn Pringsheim als nahezu eingliedrig-periodisch bezeichnen. Ist diese Bedingung schon von $\nu = 2$ an erfüllt, so ist der Kettenbruch stets schlechthin (und dann unbedingt) konvergent; man kann auch sagen, ein derartiger Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ liege in der Umgebung des Kettenbruches $\left[\frac{\dot{a}}{1}\right]$.

Das Perronsche Resultat besagt, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn die a_ν in einem gewissen Kreise um den Punkt a liegen. Herr von Pidoll hat dasselbe in seiner Inaugural-Dissertation[1]) aufs neue bewiesen und neuerdings hat Herr Pringsheim[2]) eine vereinfachte Fassung und Herleitung des betreffenden Satzes angegeben. Inzwischen hatte ich das Perronsche Problem dahin verallgemeinert, daß ich Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ betrachtete, die in der Umgebung eines andern Kettenbruches $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (also mit von ν abhängigen Teilzählern c_ν an Stelle der oben mit a bezeichneten festen Zahl) liegen[3]). Die hierbei angestellten Überlegungen haben mich dazu geführt, auch dem auf Kettenbrüche der zuvor erwähnten spezielleren Form bezüglichen Perronschen Resultat eine erheblich verbesserte Fassung zu geben. Dieselbe liefert als Konvergenzbedingung eine formal überraschend einfache „Um-

---

[1]) Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, München 1912; insbesondere § 3.

[2]) Diese Berichte, Jahrg. 1918, S. 65—92; insbesondere § 2.

[3]) Journ. f. Math. 147 (1917), S. 132—160. — Mathematikai és Természettudományi Értesítö, Budapest, Bd. 35 (1917), p. 503—543. — Ich benutze daselbst, wie Herr Perron, die allgemeinere Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$.

gebung" $|a - a_\nu| \leq r$, welche nicht nur alle bisher gefundenen umfaßt oder überragt, sondern auch den speziellen Vorzug besitzt, nicht, wie jene, gleichzeitig mit a gegen Null abzunehmen, und auch für $a = 0$ Geltung behält[1]); doch erfordert die vollständige Einordnung dieses Falles in das Hauptresultat die Heranziehung des bekannten Konvergenzkriteriums $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$[2]). Zugleich erkennt man, daß der auf diese Weise für $a = 0$ zum Vorschein kommende Umgebungsradius $|a_\nu| = \frac{1}{4}$ wirklich mit diesem Werte sein Maximum erreicht, da ja der periodische Kettenbruch $\left[\frac{-\frac{1}{4} - a}{1}\right]$ $(a > 0)$ bereits divergiert. Aus dem-

[1]) Nur die Pidollsche Fassung kann leicht dahin ergänzt werden, daß sie auch für $a = 0$ eine Umgebung liefert.

[2]) Vgl. Pringsheim, Diese Berichte, Bd. 28, 1898, S. 295—324, insbesondere S. 322. Daselbst gibt Herr Pringsheim unter anderem die Konvergenzbedingung

$$|a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_\nu| \leq \tfrac{1}{4} \ (\nu \geq 3),$$

wobei er später (Diese Berichte, Bd. 35, 1905, S. 359—380, insbesondere S. 369—372) auch den Fall $|a_2| = \frac{1}{2}$ berücksichtigt. Es ist erwähnenswert, daß das Konvergenzkriterium $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$ $(\nu \geq 2)$ schon J. Slechinsky (Mémoires de la section mathématique de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie, Odessa, Bd. X, 1889, S. 201—255) gefunden hat. Soweit ich aus den Formeln der in russischer Sprache geschriebenen Arbeit ersehen konnte, geht Slechinsky, ebenso wie Herr Pringsheim, von dem Konvergenzkriterium

$$|b_\nu| \geq |a_\nu| + 1, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ aus, und sein Beweis für dieses Kriterium scheint dem Pringsheimschen ganz analog zu sein. Übrigens kann das Kriterium $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$ $(\nu \geq 2)$ schon einer viel älteren Arbeit von J. Worpitzky [Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche. Friedrichs-Gymnasium und Realschule, Jahresbericht (S. 3—39), Berlin 1865; insbesondere § 22] entnommen werden. — Ohne Hinzuziehung dieses Kriteriums erhalte ich allenfalls noch alle inneren Punkte des Kreises mit dem Radius $\frac{1}{4}$, d. h. die Konvergenz-Umgebung $|a_\nu| \leq \frac{\varrho}{4}$, wo $0 < \varrho < 1$. Vgl. hierzu die Fußnote auf S. 403.

selben Grunde ist dann offenbar für alle Stellen der Strecke $0 > a > -\frac{1}{4}$ die größte Umgebung $|a_\nu - a| \leqq \frac{1}{4} + a$[1]).

2. Das Resultat, das sich im folgenden ergeben wird, kann so zusammengefaßt werden:

Die Teilzähler des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ seien beliebige komplexe Zahlen, die Null inbegriffen; a sei eine beliebige Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, die $\leqq -\frac{1}{4}$ sind. Die Wurzeln z, z' der Gleichung

$$(1) \qquad y^2 - y - a = (y - z)\,(y - z') = 0$$

sind dann ungleichen absoluten Betrages, und es sei

$$(2) \qquad |z| > |z'|, \quad \frac{z'}{z} = q.$$

Ist dann

$$(3) \qquad |a - a_\nu| \leqq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2, \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ im allgemeinen konvergent, und nur in gewissen Ausnahmefällen außerwesentlich divergent. Die Konvergenz besteht ausnahmslos, wenn außerdem $|q| \leqq \frac{1}{3}$ ist; sie besteht auch

---

[1]) Für den Grenzfall $a = -\frac{1}{4}$ läßt sich noch eine Konvergenz-Umgebung des periodischen Kettenbruches $\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1}\right]$ bestimmen, wenn man den Begriff „Umgebung" allgemeiner faßt, so daß der Kreis, in dem a_ν liegen soll, einen von ν abhängigen Radius r_ν hat. Natürlich muß nach obigem $\lim\limits_{\nu \to \infty} r_\nu = 0$ sein. Eine solche Umgebung habe ich in meinen auf S. 396, Fußn. 3 zitierten Arbeiten (S. 147—148 bzw. S. 527—528) bestimmt. Bei dieser Gelegenheit sei ein sinnstörender Schreibfehler berichtigt: auf S. 148 bzw. 528 soll es $a_{\nu+1} + \frac{1}{4}$ statt $a_{\nu+1} - \frac{1}{4}$ heißen.

In den oben zitierten Arbeiten von Herrn Perron, Pidoll und von mir spielt die von Herrn Pringsheim (s. die auf S. 395, Fußn. 1 zitierte Arbeit) zur Behandlung des limitärperiodischen Kettenbruches angewandte Methode eine wichtige Rolle; ihr Kernpunkt besteht in einer gewissen Auflösung der dreigliedrigen Rekursionsformel $D_{\nu+1} = D_\nu + a_{\nu+1} D_{\nu-1}$. Das Nähere wird aus Nr. 2 ersichtlich.

ohne diese Einschränkung jedenfalls in dem engeren Bereich

(4) $$|a - a_\nu| \leq \frac{(|z| - |z'|)^3\,[2 - |z'|(1 - |q|)]}{[2 + |z|(1 - |q|)^2]^2}, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

Insbesondere ist in jedem Fall

(5) $$|a - a_\nu| \leq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2 (1 - |q|), \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

ein Konvergenzbereich. Die Konvergenz ist bei beliebiger Veränderlichkeit der a_ν gleichmäßig im Bereich (3) für $|q| \leq \frac{1}{3}$, und im Bereich (4) bezw. (5) für irgend ein a; die Konvergenz ist auch unbedingt.

Für den Beweis bemerke man zunächst, daß wegen (1) und (2)

(6) $$z + z' = 1, \quad zz' = -a, \quad |z'| < |z|$$

ist, und daß dann der eingliedrig-periodische Kettenbruch $\left|\begin{matrix}\dot{a} \\ 1\end{matrix}\right|$ konvergiert und den Wert $-z'$ hat.

Es sei nun z_1' eine zunächst beliebige Zahl, und die Zahlen $z_1, z_2', z_2, z_3', \ldots$ seien nach und nach aus den Gleichungen berechnet

(7) $$z_\nu + z_\nu' = 1, \quad z_{\nu+1}' z_\nu = -a_{\nu+1}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots;$$

diese Bestimmung ist eindeutig, wenn kein z_ν verschwindet. Es sei ferner α_1 eine positive Zahl, die der Bedingung

(8) $$\alpha_1 < |z| - |z'|$$

genügt, und man setze

(9) $$\alpha_2 = \alpha_1(|z| - |z'| - \alpha_1).$$

Nun führe ich die Bedingungen ein:

(10) $$|a - a_\nu| \leq \alpha_2, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

und

(11) $$|z_1' - z'| \leq \alpha_1;$$

ich zeige zunächst, daß dann

$$(12) \qquad |z - z_\nu| \leqq a_1 \text{ und } z_\nu \neq 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist. Für $\nu = 1$ folgt dies sofort, denn es ist nach (6), (7) und (11)

$$|z - z_1| = |z_1' - z'| \leqq a_1;$$

sodann ergibt sich hieraus mit Rücksicht auf die Ungl. (8)

$$|z_1| = |z_1 - z + z| \geqq |z| - |z - z_1| \geqq |z| - a_1 > |z'| \geqq 0.$$

Angenommen nun (12) gelte bereits für $\nu = n$ $(n \geqq 1)$, so ist z_{n+1} eindeutig bestimmt und ich beweise die Gültigkeit von (12) für $\nu = n + 1$. Man erhält nämlich aus (7)

$$z_{n+1} = 1 - z'_{n+1} = 1 + \frac{a_{n+1}}{z_n},$$

und dann wird mit Rücksicht auf (6)

$$z - z_{n+1} = 1 - z' - z_{n+1} = -z' - \frac{a_{n+1}}{z_n} = -\frac{z_n z' + a_{n+1}}{z_n};$$

fügen wir hier im Zähler $zz' + a$ $(= 0)$ hinzu, so folgt

$$z - z_{n+1} = \frac{1}{z_n}\left[z'(z - z_n) + a - a_{n+1}\right].$$

Da nun nach Voraussetzung $|z - z^n| \leqq a_1$ ist, so erhält man mit Hilfe von (10)

$$|z - z_{n+1}| \leqq \frac{1}{|z_n|}(a_1 |z'| + a_2);$$

ferner ist

$$(13) \qquad |z_n| = |z_n - z + z| \geqq |z| - |z_n - z| \geqq |z| - a_1,$$

und nach (9)

$$a_1 |z'| + a_2 = a_1(|z| - a_1),$$

somit wird

$$|z - z_{n+1}| \leqq \frac{a_1 |z'| + a_2}{|z| - a_2} = a_1.$$

Schließlich erhält man

$$|z_{n+1}| \geqq |z| - |z_{n+1} - z| \geqq |z| - a_1 > 0;$$

somit gilt (12) und auch (13) allgemein.

Nun schätze ich den Quotienten $\frac{z'_\nu}{z_\nu}$ ab; es ist nach (6) und (7)

$$\frac{z'_\nu}{z_\nu} = \frac{z'}{z} + \frac{z'_\nu}{z_\nu} - \frac{z'}{z} = \frac{z'}{z} + \frac{(1-z_\nu)z - (1-z)z_\nu}{z z_\nu} = \frac{z'}{z} + \frac{z - z_\nu}{z z_\nu},$$

also mit Berücksichtigung von (12) und (13)

$$(14) \qquad \left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| < \left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{a_1}{|z|(|z| - a_1)}.$$

Setzt man daher voraus, daß

$$(15) \qquad \left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{a_1}{|z|(|z| - a_1)} < 1$$

ist, so wird sicherlich die Reihe

$$(16) \qquad \sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\frac{z'_2 \ldots z'_\nu}{z_2 \ldots z_\nu}\right|$$

konvergent. Nun folgt aus (7)

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{a_1}{z_1 + z'_1}, \frac{-z_{\nu-1} z'_\nu}{z_\nu + z'_\nu}\right]_2^\infty,$$

und vermöge einer bekannten Eulerschen Formel erhält man[1])

$$\left[\frac{a_1}{z_1 + z'_1}, \frac{-z_{\nu-1} z'_\nu}{z_\nu + z'_\nu}\right]_2^n = \begin{cases} \frac{a_1}{z_1}\left(1 + \frac{z'_2}{z_2} + \frac{z'_2 z'_3}{z_2 z_3} + \cdots + \frac{z'_2 \ldots z'_n}{z_2 \ldots z_n}\right) & \text{für } z'_1 = 0 \\ \frac{a_1}{z'_1}\left(1 + \cfrac{1}{1 + \frac{z'_1}{z_1} + \cdots + \frac{z'_1 \ldots z'_n}{z_1 \ldots z_n}}\right) & \text{für } z'_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Im Falle $z'_1 = 0$ folgt hieraus nach (16) ohne weiteres die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, während im Falle $z'_1 \neq 0$ noch im allgemeinen Konvergenz auftritt, abgesehen von dem Ausnahmefalle

[1]) Vgl. meine auf S. 396, Fußn. 3 zitierten Arbeiten; daselbst ist nur vorausgesetzt: $z_\nu \neq 0$ $(\nu \geqq 1)$, während z'_ν auch Null sein darf.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z'_1 \dots z'_\nu}{z_1 \dots z_\nu} = -1;$$

in diesem Falle ist der Kettenbruch außerwesentlich divergent.

Ich setze zunächst

$$z'_1 = 0;$$

die Bedingung (11) geht dann in

$$|z'| \leqq a_1$$

über. Wählt man speziell

$$a_1 = \frac{|z| - |z'|}{2},$$

so heißt dies

$$2|z'| \leqq |z| - |z'|,$$

oder

(17) $$\left|\frac{z'}{z}\right| < \frac{1}{3}.$$

Zugleich wird

$$a_2 = \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2,$$

und die Bedingung (10) lautet nun

(18) $$|a - a_\nu| \leqq \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Aus der Bedingung (15) wird schließlich

$$\left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{|z| - |z'|}{|z|(|z| + |z'|)} < 1,$$

oder

$$\frac{1 - |q|}{|z| + |z'|} < 1 - |q|,$$

das heißt

$$1 < |z| + |z'|.$$

Dies gilt in der Tat (nach (6)) mit der einzigen Ausnahme, daß z und z' dieselbe Amplitude haben. In letzterem Falle sind aber wegen (6) z und z' reell und $\geqq 0$, also a reell und $\leqq 0$; somit ist

$$-\tfrac{1}{4} < a \leqq 0.$$

Eine leichte Rechnung ergibt nun

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad z' = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

$$a_1 = \frac{|z| - |z'|}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4a},$$

und aus (10) wird

$$|a - a_\nu| \leq \tfrac{1}{4}(1 + 4|a|), \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

Dann ist aber

$$|a_\nu| \leq |a| + \tfrac{1}{4} + |a| = \tfrac{1}{4}, \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

und hieraus folgt in bekannter Weise die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$.[1])

Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert (und dann offenbar unbedingt), wenn (17) und (18) gilt. Es ist auch leicht zu sehen, daß die Konvergenz gleichmäßig gilt, wenn die a_ν im Bereich (18) beliebig variieren.

Wähle ich $z_1' \neq 0$, so kann die Bedingung (11) stets erfüllt werden (man braucht ja nur $z_1' = z'$ oder hinreichend nahe an z' zu setzen), also unter der alleinigen Voraussetzung (18) ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ im allgemeinen konvergent und nur in Ausnahmefällen außerwesentlich divergent.

---

[1]) Will man dieses bekannte Kriterium (vgl. Fußn. 2 auf S. 397) nicht heranziehen, so setze man $a_1 = \frac{|z| - |z'|}{2}(1 - \vartheta)$ $(\vartheta > 0)$; man erkennt leicht, daß dann die Bedingung (15) stets erfüllt ist und erhält für $|q| < \frac{1}{4}$ den Umgebungsradius $a_2 = \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2 (1 - \vartheta^2)$ $(\vartheta > 0)$. Speziell für $a = 0$ wird $a_2 = \frac{1 - \vartheta^2}{4}$.

Für hinreichend kleine $|a|$ liefert das Kriterium $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$ auch eine Konvergenz-Umgebung, nämlich diese:

$$|a - a_\nu| \leq \tfrac{1}{4} - |a|, \qquad \nu = 2, 3, \ldots$$

Man sieht leicht ein, daß dieser Bereich stets in (18) enthalten ist.

Um hier mit Sicherheit auf Konvergenz im engeren Sinne schließen zu können, ist eine weitere Abschätzung nötig. Offenbar ist

$$\left|\frac{z'_1 \ldots z'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu} - \left(\frac{z'}{z}\right)^\nu\right| \leq \prod_{\lambda=1}^{\nu}\left\{\left|\frac{z'}{z}\right| + \left|\frac{z'_\lambda}{z_\lambda} - \frac{z'}{z}\right|\right\} - \left|\frac{z'}{z}\right|^\nu,$$

und

$$\left|\frac{z'_\lambda}{z_\lambda} - \frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{z - z_\lambda}{z\, z_\lambda}\right| < \frac{a_1}{|z|\,(|z| - a_1)},$$

wobei für $\lambda = 1$ sicher das $<$ Zeichen gilt, wenn z'_1 — worüber wir ja im Rahmen der Bedingung (11) verfügen können — hinreichend nahe an z' gewählt ist.

Somit wird

$$(19)\qquad \left|\frac{z'_1 \ldots z'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu} - \left(\frac{z'}{z}\right)^\nu\right| < \left(\left|\frac{z'}{z}\right| + \frac{a_1}{|z|\,(|z| - a_1)}\right)^\nu - \left|\frac{z'}{z}\right|^\nu,$$

setzt man zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z'_1 \ldots z'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu} = s, \qquad \left|\frac{z'}{z}\right| = q,$$

so folgt aus (19), (falls (15) gilt)

$$(20)\qquad \left|s - \frac{q}{1-q}\right| < \frac{1}{1 - q - \dfrac{a_1}{|z|\,(|z| - a_1)}} - \frac{1}{1-q}.$$

Nun ist

$$|1 + s| = \left|\frac{1}{1-q} + s - \frac{q}{1-q}\right| \geq \frac{1}{1+q} - \left|s - \frac{q}{1-q}\right|,$$

und daher $|1 + s| > 0$, wenn nur

$$\left|s - \frac{q}{1-q}\right| < \frac{1}{1+q}$$

ist; hierzu genügt aber nach (20):

$$\frac{|z|\,(|z| - a_1)}{|z|\,(|z| - a_1)(1 - q) - a_1} - \frac{1}{1-q} \leq \frac{1}{1+q}.$$

Dies mit (10) und (15) zusammen zieht also stets die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ nach sich.

Man kann somit a_1 durch die Gleichung bestimmen

$$|z|(|z|-a_1)(1-|q|^2)=2|z|(|z|-a_1)(1-|q|)-2a_1,$$

woraus sich

$$a_1=\frac{(|z|-|z'|)^2}{2+|z|(1-|q|)^2}=\frac{(|z|-|z'|)^2}{2+\frac{1}{|z|}(|z|-|z'|)^2}$$

ergibt. Man bestätigt leicht, daß dann die Bedingung (15) erfüllt ist, denn diese lautet nach einer einfacheren Umformung

$$a_1<\frac{|z|(|z|-|z'|)}{1+|z|-|z'|},$$

und es ist in der Tat

$$\frac{|z|-|z'|}{2+\frac{1}{|z|}(|z|-|z'|)^2}<\frac{|z|}{1+|z|-|z'|},$$

denn die rechte Seite ist hier $>\frac{|z|}{2}$.

Aus (9) wird jetzt schließlich

$$a_2=\frac{(|z|-|z'|)^3[2-|z|(1-|q|)]}{[2+|z|(1-|q|)^2]^2}.$$

Es ist bemerkenswert, daß wir hier einen für alle Werte von a gültigen Umgebungsradius erhalten, der auch für $a=0$ einen brauchbaren Wert $\left(a_2=\frac{2}{9}\right)$ liefert.

Für $|q|\leq\frac{1}{3}$ haben wir in (18) einen besseren Konvergenzbereich, und für $|q|>\frac{1}{3}$ läßt sich a_2 durch einen einfacheren, allerdings zugleich kleineren Wert ersetzen. Schreibt man nämlich a_2 in der Gestalt

$$a_2=\frac{(|z|-|z'|)^3}{|z|}\cdot\frac{\frac{2}{|z|}-|q|(1-|q|)}{\left[\frac{2}{|z|}+(1-|q|)^2\right]^2},$$

und benutzt man die Beziehung

$$\frac{1}{|z|} = \left|\frac{z+z'}{z}\right| < 1 + |q|,$$

so ergibt sich zunächst mit bekannten Hilfsmitteln der Differentialrechnung leicht

$$\frac{\frac{2}{|z|} - |q|(1-|q|)}{\left[\frac{2}{|z|} + (1-|q|)^2\right]^2} < \frac{2+|q|+|q|^2}{(3+|q|^2)^2},$$

und dieser Bruch ist für $1 > |q| > \frac{1}{3}$ stets $> \frac{1}{4}$. Somit ist für $|q| > \frac{1}{3}$

$$|a - a_\nu| < \left(\frac{|z| - |z'|}{2}\right)^2 (1 - |q|), \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

ein Konvergenzbereich; wegen (18) gilt dies auch für $|q| < \frac{1}{3}$.

Auch hier ist, wie leicht zu sehen, die Konvergenz gleichmäßig bei beliebiger Veränderlichkeit der a_ν im Konvergenzbereich. Aus der Form der Ungleichungen folgt auch unmittelbar, daß die Konvergenz eine unbedingte ist.

Somit ist der eingangs formulierte Satz in vollem Umfange bewiesen.

Berichtigung

zu meiner Arbeit: Über nichtnegative trigonometrische Polynome, diese Berichte, Jahrg. 1917.

S. 309, Formel (2), statt $s = 1, 2, \ldots$ lies: $\nu = 1, 2, \ldots$

S. 313, die Formel in Z. 10 ist mit der Nr. (9) zu versehen.

S. 320, letzte Formel, statt $\frac{2 \cdot 1}{\nu - 1}$ lies: $\frac{2 \cdot 1}{\nu + 1}$.