Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

AKADEMIE D. WISS

Über die Differentialgleichung $y' = Ay^p + By^q$.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am **12.** Juli **1919.**

Es sei eine Differentialgleichung der Form

$$y' = Ay^p + By^q \tag{1}$$

gegeben, wo A und B Funktionen von x bedeuten. Wir machen die Substitution

$$y = S^m \cdot T^n, \tag{2}$$

wo T durch die Gleichung

$$T = \int P \cdot S^\nu \, dx + \text{Konst.} \tag{3}$$

definiert sei, indem P eine zu bestimmende Funktion von x bedeutet. Die Gleichung (1) wird dann

$$m \cdot S^{m-1} \cdot T^n \cdot S' + n \cdot S^{n+\nu} T^{n-1} \cdot P = A \cdot S^{mp} \cdot T^{np} + B \cdot S^{nq} \cdot T^{nq},$$

und diese befriedigen wir durch den Ansatz:

$$m S^{m-1} T^n S' = A S^{mp} T^{np},$$
$$n S^{m+\nu} T^{n-1} P = B S^{mq} T^{nq},$$

oder:

$$m S' = S^{m(p-1)+1} \cdot T^{n(p-1)} \cdot A, \tag{4}$$

$$m + \nu = mq, \quad n - 1 = nq, \quad nP = B. \tag{5}$$

Durch Differentiation von (4) ergibt sich

$$m S'' = (mp - m + 1) S^{m(p-1)} \cdot T^{n(p-1)} \cdot S' \cdot A + S^{mp-m+1} \cdot T^{np-n} \cdot A' + (np - n) S^{mp-m+\nu+1} \cdot T^{np-n-1} \cdot A \cdot P$$

oder, wenn man den Wert für T aus (4) einsetzt und beiderseits mit S dividiert:

$$
(6) \qquad \begin{aligned} m\frac{S''}{S} &= (mp-m+1)\cdot m\cdot S^{-2}S'^2 + \frac{A'}{A}\,m\,\frac{S'}{S} \\ &+ n(p-1)\left(\frac{mS'}{A\,S^{mp-m+1}}\right)^{\frac{np-n-1}{np-n}}\cdot S^{mp-m+r}\cdot A\cdot P. \end{aligned}
$$

Im zweiten Gliede ist der Exponent von S' identisch gleich dem Exponenten von S^{-1}:

$$\frac{np-n+1}{np-n} = mp-m+r-(mp-m+1)\frac{np-n-1}{np-n};$$

wir bezeichnen diese Zahl mit μ; dann wird, wenn man die ersten beiden Gleichungen (5) hinzunimmt:

$$(7) \qquad n = \frac{-1}{q-1}, \quad \mu = 1+\frac{q-1}{p-1} = \frac{p+q-2}{p-1}, \quad r = m(q-1).$$

Sind also p und q gegeben, so sind n und μ bestimmt; von den Zahlen m und r bleibt aber eine willkürlich. Es darf nur nicht $r=0$ oder $m=0$ gewählt werden. Die Zahl p muß von 1 verschieden sein. Die Gleichung (6) wird jetzt:

$$(8) \qquad \frac{S''}{S} = F\left(\frac{S'}{S}\right)^2 + G\left(\frac{S'}{S}\right)^{\mu} + H\,\frac{S'}{S},$$

wo nun:

$$(9) \qquad F = mp-m+1, \quad G = (p-1)\,m^{\mu-1}\cdot B\cdot A^{1-\mu}, \quad H = \frac{A'}{A}.$$

Setzen wir also noch:

$$(10) \qquad \Sigma = \frac{S'}{S}, \quad S = e^{\int \Sigma\, dx},$$

so geht (8) über in:

$$(11) \qquad \Sigma' = m(p-1)\,\Sigma^2 + G\,\Sigma^{\mu} + H\,\Sigma.$$

Durch die Substitution (2), in der S durch (10) und (11), T durch (3), und P durch (5), n und μ durch (7) bestimmt sind, wird also die gegebene Gleichung (1) in die Gleichung (11) übergeführt, in der statt der beiden Potenzen p, q nur noch der eine Exponent μ (neben 1 und 2) vorkommt.

Die Gleichung (11) wird als eine Vereinfachung zu betrachten sein, wenn μ eine ganze positive Zahl ist, falls p und q solche Zahlen waren. Dies tritt z. B. ein für

$$p = 0, \quad \mu = 2 - q, \quad \text{also } q = 2,$$

wodurch indessen keine Erniedrigung erzielt wird; ferner (da $p = 1$ ausgeschlossen ist) für

$$p = 2, \quad \mu = q, \tag{12}$$

was auch nicht auf eine Vereinfachung führt; sodann für

$$p = 3, \quad \mu = \tfrac{1}{2}(q + 1).$$

Ist also q gleich einer ungeraden Zahl $2\varkappa + 1$, so wird die Differentialgleichung:

$$y' = A\,y^3 + B\,y^{2\varkappa+1} \tag{13}$$

durch die Substitution (2) auf die Gleichung

$$\Sigma' = m(p - 1)\,\Sigma^2 + G\,\Sigma^{\varkappa+1} + H\,\Sigma \tag{14}$$

zurückgeführt; und dabei ist:

$$n = \frac{-1}{2\varkappa}, \quad \nu = m \cdot 2\varkappa.$$

Der Fall (12) sei noch besonders besprochen. Die Differentialgleichung (11) hängt dann von einer willkürlichen Konstanten m ab, und zwar sowohl in dem Faktor von Σ^2 als in dem Faktor von Σ^μ. Man müßte ein partikuläres Integral dieser Gleichung kennen, um aus demselben vermöge der Substitution (2) ein Integral der Gleichung (1) mit einer willkürlichen Konstanten abzuleiten. Hier enthält aber die Funktion T vermöge (3) eine zweite Konstante. Zwischen beiden Konstanten muß eine Relation bestehen, die durch die Gleichung (4) gegeben wird. Eine weitere Konstante wird durch den Übergang von Σ zu S eingeführt und tritt als Faktor von S auf; dieselbe hebt sich aber aus der Formel (2) vollständig heraus und kommt deshalb nicht in Betracht; es ist nämlich infolge der Gleichungen (7):

$$m(p-1)+rn(p-1)=m(p-1)(1+n(q-1))=0.$$

Trotzdem genügt es nicht, ein partikuläres Integral von (11) zu kennen, denn nicht für jedes solche Integral kann die Gleichung (4) befriedigt werden, wie man leicht an einem elementaren Beispiele erkennt.

Um das allgemeine Integral der Gleichung

$$y' = Ay^2 + By^q \tag{15}$$

zu finden, hat man also das allgemeine Integral der Gleichung (11), d. i.

$$\Sigma' = m\Sigma^2 + m^{q-1}\cdot A^{1-q}\cdot B\cdot\Sigma^q + \frac{A'}{A}\Sigma \tag{16}$$

zu suchen, sodann S gemäß (10) aus Σ zu berechnen und die Substitution (2)

$$y = S^m\cdot\left[\frac{1}{n}\int BS^{m(q-1)} + C\right]^{-\frac{1}{q-1}} = S^m\cdot T^n, \tag{17}$$
$$\text{wo } n(q-1) = -1,$$

auszuführen, wobei zwischen den Konstanten m, C und den Konstanten des allgemeinen Integrals von (16) Relationen bestehen, die aus der Gleichung (4), d. i.

$$mS' = S^{m(p-1)+1}\cdot T^{-\frac{p-1}{q-1}}\cdot A \tag{18}$$

gewonnen werden, indem man für x spezielle Werte einsetzt.

Besonders bemerkenswert ist der Fall, wo

$$p+q-2=0$$

ist. Dann wird die Hilfsgleichung (11) von der Form

$$\Sigma' = m(p-1)\Sigma^2 + \frac{A'}{A}\Sigma + m^{-1}AB.$$

In diesem Falle wird also die Integration der Gleichung (1) auf diejenige einer Riccatischen Gleichung zurückgeführt.

Ist $A =$ Konst, so wird die Gleichung (11)

$$\Sigma' = m(p-1)\Sigma^2 + G\Sigma^\mu. \tag{19}$$

Wendet man nun auf diese Gleichung wieder die Substitution (2) an:

$$\Sigma = Q^{m'} R^{n'} \quad \text{wo} \quad R = \int P_1 Q^{\nu'} dx,$$

so ergibt sich aus (7), da hier $p = 2$, $q = \mu$:

$$n' = \frac{-1}{\mu - 1}, \quad \mu' = \mu, \quad \nu' = m'(\mu - 1), \quad n' P_1 = G,$$

also aus (9):

$$U' = m' U^2 + m'^{\mu-1}(mp - m)^{1-\mu} G U^\mu. \tag{20}$$

Die Gleichung (4) wird, wenn $Q = \frac{U'}{U}$ gesetzt wird:

$$m' Q' = Q^{m'+1} \cdot R^{n'} \cdot m(p-1).$$

Die neue Gleichung (20) ist somit von derselben Form wie die Gleichung (19), und es ergibt sich kein wesentlicher Vorteil.