

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1919. Heft I

Januar- bis Märzszung

---

München 1919

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Formeln für die Geländeaufnahme aus der Luft.

Von F. v. Dalwigk in Marburg i. H.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 8. Februar 1919.

1. Sollen zwei oder mehrere aus der Luft gemachte photographische Aufnahmen eines und desselben Geländestückes gemeinsam bearbeitet werden, so galt es bisher anscheinend als wesentlich, zunächst für jedes Bild den Aufnahmeort  $O$ , die Neigung der optischen Achse und die Verkantung zu bestimmen. Ich habe Ostern 1918 ein anderes Verfahren für vollständig graphische und für teils graphische, teils rechnende Arbeit entworfen und bald darauf erprobt.

Bei jeder Aufnahme müssen drei Geländepunkte, die Festpunkte, der Lage nach genau bekannt sein, und ihnen müssen auf dem Bild deutlich erkennbare Punkte entsprechen. Das Bilddreieck bestimmt durch seine Lage in bezug auf den zweiten Hauptpunkt des Objektivs die Bildpyramide, und in deren abgewinkelten Mantel werden die Seiten des im Kartenmaßstab verkleinerten Festpunktdreiecks eingepaßt. Wenn der Aufnahmeort  $O$  dem gefährlichen Ort<sup>1)</sup> nicht nahe liegt, so wird man bei dieser Einpassung unter den verschiedenen möglichen Lösungen ziemlich leicht die richtige auswählen können. Zugleich wird dann bei sorgfältiger Arbeit in genügend großem Maßstab ein guter Genauigkeitsgrad erreicht.

Die Pyramide, welche den Aufnahmeort  $O$  zur Spitze und das Festpunktdreieck zur Basis hat, nenne ich die Fest-

<sup>1)</sup> Vgl. Das Rückwärtseinschneiden im Raum, von S. Finsterwalder und W. Scheufele. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akad. der Wiss., 23. Bd., 1903, S. 591.

punktpyramide. Ihre von  $O$  ausgehenden Kanten  $r_1, r_2, r_3$  sind durch die geschilderte Konstruktion gefunden. Sie spielen in 3 eine wichtige Rolle und lassen sich — falls ihr graphischer Genauigkeitsgrad nicht ausreicht — mit wenig Zeitaufwand und Mühe durch Rechnung verbessern, worauf ich jetzt nicht eingehe. An die Einpassung der Seiten des Festpunktdreiecks schließt sich eine Konstruktion an, welche die räumliche Lage von  $O$  liefert. Das ist der „Rückwärtseinschnitt“. Auch hier läßt sich das Ergebnis der Konstruktion durch Rechnung auf verschiedene Arten genauer gestalten; ich komme später darauf zurück.

Auf die Bestimmung der Neigung und der Verkantung verzichte ich vollständig. Ich übertrage statt dessen die Bildpunkte perspektivisch in die Ebene des Festpunktdreiecks und bilde von dieser Figur den Grundriß. So ist wenigstens der Gedankengang; tatsächlich wird nur die Grundrißfigur hergestellt, nicht die wahre Gestalt der Figur in der Festpunktebene.

2. Der Aufstellung der Transformations-Formeln mag folgende Überlegung vorangehen. Die Bildebene ist perspektivisch der Festpunktebene zugeordnet; die Festpunktebene wird durch Orthogonalprojektion auf die Kartenebene, die Grundrißebene, bezogen. Dadurch besteht zwischen der Bildebene und der Grundrißebene eine Kollineation (nach bekanntem Satz sogar eine Zentralkollineation, worauf es jetzt aber nicht ankommt). In der Kartenebene benutzt man rechtwinklige Koordinaten  $x, y$ . Dadurch sind die Festpunktebene und das Gelände auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen.

Man kann mittelst der Koordinaten der Festpunkte  $P_1, P_2, P_3$  den allgemeinen Punkt  $R$  der Festpunktebene  $\mathcal{E}$  baryzentrisch so darstellen:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\ y &= \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\ z &= \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Formeln für sich genommen geben in der  $x, y$ -Ebene den Grundriß  $R'$  von  $R$ . Die besprochene kollineare Zuordnung von  $R'$  zum Punkt  $Q(\xi, \eta)$  der Bildebene liefert Ausdrücke von der Form

$$x = \frac{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1}{a \xi + b \eta + c}, \quad y = \frac{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2}{a \xi + b \eta + c}.$$

Beide Darstellungsweisen für die Koordinaten von  $R'$  geben zusammengenommen

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 &= \mu(a_1 \xi + b_1 \eta + c_1) \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 &= \mu(a_2 \xi + b_2 \eta + c_2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \mu(a \xi + b \eta + c). \end{aligned}$$

Man kann auch  $\mu$  als 1 nehmen, weil es auf einen gemeinsamen Faktor der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  nicht ankommt. Die Auflösung der linearen Gleichungen für  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  gibt einen von 0 verschiedenen und konstanten Nenner, gleich dem doppelten Inhalt des Grundrißdreiecks  $P_1' P_2' P_3'$ , die Zähler sind lineare Funktionen von  $\xi, \eta$ . Damit ist gefunden

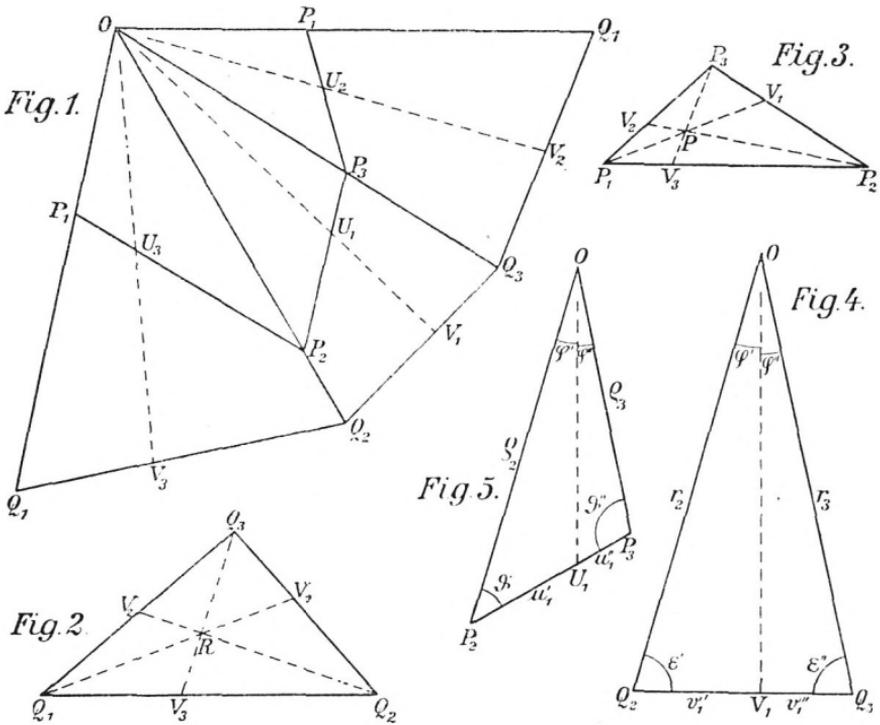
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \\ \lambda_2 &= A_2 \xi + B_2 \eta + C_2 \\ \lambda_3 &= A_3 \xi + B_3 \eta + C_3. \end{aligned}$$

Die baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sind ganze lineare Funktionen der Koordinaten  $\xi, \eta$  des Bildpunktes  $Q$ .

3. Die wirkliche Bestimmung der  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  erfolgt aus den Figuren 1 bis 5. Ein Punkt  $Q$  des Bilddreiecks liefert durch die Ecktransversalen die Punkte  $V_1, V_2, V_3$  auf den Seiten. Ihnen entsprechen nach der räumlichen perspektivischen Zuordnung die Stellen  $U_1, U_2, U_3$  auf den Seiten des Festpunktdreiecks. Die Ecktransversalen geben den Punkt  $R$ , welcher im Raum dem Bildpunkt  $Q$  perspektivisch entspricht; alles ist darstellend-geometrisch sehr einfach zu übersehen.  $Q$  ist in der Bildebene im Innern des Bilddreiecks angenommen, die Lage außerhalb bietet nichts neues. Die doppelten Flächeninhalte der Dreiecke  $Q Q_2 Q_3, Q Q_3 Q_1, Q Q_1 Q_2$  sind

$$J_1 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Für einen innern Punkt  $Q$  sind die drei Größen positiv.



Anmerkung: In Fig. 2 ist statt  $R$   $Q$  zu lesen, in Fig. 3 statt  $P$   $R$ .  
 In Fig. 4 ist  $r$  mit  $q$ , in Fig. 5  $q$  mit  $r$  zu vertauschen.

Das Teilungsverhältnis  $Q_2 V_1 : V_1 Q_3 = v_1' : v_1''$  ist gleich dem negativen Verhältnis der von  $Q_2$  und  $Q_3$  auf  $Q_1 Q$  gefällten Lote und damit auch gleich  $+J_3 : J_2$  (nicht  $J_2 : J_3$ ).

So hat man

$$\begin{aligned} v_1' : v_1'' &= J_3 : J_2 \\ v_2' : v_2'' &= J_1 : J_3 \\ v_3' : v_3'' &= J_2 : J_1. \end{aligned}$$

Im Festpunktdreieck treten auf den Seiten entsprechende Teilungsverhältnisse  $u_1' : u_1''$ ,  $u_2' : u_2''$ ,  $u_3' : u_3''$  auf. Aus projektiv-

geometrischen Gründen müssen sie bis auf konstante Faktoren gleich  $v'_1 : v''_1, v'_2 : v''_2, v'_3 : v''_3$  sein.

In den beiden Dreiecken  $Q Q_2 V_1$  und  $Q Q_3 V_1$  der Figur 4 wendet man den Sinussatz so an, daß  $v'_1, v''_1$  und  $O V_1$  vorkommen. Die Verbindung der Formeln ergibt

$$\frac{v'_1}{v''_1} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi''} \cdot \frac{\sin \varepsilon''}{\sin \varepsilon'}.$$

Entsprechend folgt aus den Dreiecken  $O P_2 U_1$  und  $O P_3 U_1$  (Fig. 5)

$$\frac{u'_1}{u''_1} = \frac{\sin \vartheta'}{\sin \vartheta''} \cdot \frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta'}.$$

Man erhält

$$\frac{u'_1}{u''_1} = \frac{v'_1}{v''_1} \cdot \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon''} \cdot \frac{\sin \vartheta''}{\sin \vartheta'} \quad \text{oder} \quad \frac{u'_1}{u''_1} = \frac{v'_1}{v''_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_3}.$$

Damit ist das Formelsystem gefunden:

$$\begin{aligned} \frac{u'_1}{u''_1} &= \frac{v'_1}{v''_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \frac{J_3}{J_2} \cdot \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_3} \\ \frac{u'_2}{u''_2} &= \frac{v'_2}{v''_2} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \frac{J_1}{J_3} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{\varrho_3}{\varrho_1} \\ \frac{u'_3}{u''_3} &= \frac{v'_3}{v''_3} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2}. \end{aligned}$$

Im Festpunktdreieck wurden schon die baryzentrischen Koordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  eingeführt.  $R$  hat im Raum die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\ y &= \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\ z &= \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}; \end{aligned}$$

$U_1$  z. B. hat die Koordinaten

$$x = \frac{\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad y = \frac{\lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_2 + \lambda_3}, \quad z = \frac{\lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_2 + \lambda_3},$$

und deshalb ist  $\lambda_3 : \lambda_2$  das bisher mit  $u'_1 : u'_2$  bezeichnete Teilungsverhältnis.

So entstehen die Formeln

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{J_3}{J_2} \cdot \frac{r_3 \varrho_2}{r_2 \varrho_3}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{J_1}{J_3} \cdot \frac{r_1 \varrho_3}{r_3 \varrho_1}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{r_2 \varrho_1}{r_1 \varrho_2}$$

Sie werden erfüllt durch

$$\lambda_1 = J_1 \cdot \frac{r_1}{\varrho_1}$$

$$\lambda_2 = J_2 \cdot \frac{r_2}{\varrho_2}$$

$$\lambda_3 = J_3 \cdot \frac{r_3}{\varrho_3}$$

Auf einen gemeinsamen Faktor, der etwa noch hinzugefügt werden kann, kommt es nicht an. Entsprechend zu 2. sind  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  wirklich ganze lineare Funktionen von  $\xi, \eta$ .

4. Zwei Aufnahmen werden nun betrachtet. Ein allgemeiner Geländepunkt sei  $P$ ; ihm entspreche im ersten Bild  $Q_I$ , im zweiten  $Q_{II}$ .  $Q_I$  liefert bei der perspektivischen Abbildung auf die Ebene  $\mathfrak{E}_I$  des ersten Festpunktdreiecks den Punkt  $R_I$ ,  $Q_{II}$  gibt ebenso auf  $\mathfrak{E}_{II}$  den Punkt  $R_{II}$ . Die Grundrisse von  $R_I$  und  $R_{II}$  sind  $R'_I$  und  $R'_{II}$ . Die Punkte werden nach den berechneten Koordinaten (3) in einen Plan großen Maßstabs eingetragen, in ein Quadratnetz, wie der Geodät Punkte „kartiert“. Ebenso werden die Grundrisse  $O'_I$  und  $O'_{II}$  der beiden Aufnahmepunkte  $O_I$  und  $O_{II}$  eingetragen, vorläufig mögen sie als zugängliche Punkte gelten.

Im Raum trifft der Strahl  $O_I P$  die erste Festpunktsebene  $\mathfrak{E}_I$  in  $R_I$ , und der Strahl  $O_{II} P$  trifft  $\mathfrak{E}_{II}$  in  $R_{II}$ . Man kennt nun in der Zeichnung die Grundrisse  $O'_I R'_I$  und  $O'_{II} R'_{II}$  beider Strahlen und findet  $P'$  als den Schnittpunkt dieser Linien.

Es handelt sich noch um die Höhe von  $P$ . Man kennt im Raum  $R_I$  und  $O_I$ , damit auch das Gefälle der Geraden  $O_I R_I$  für die Längeneinheit im Grundriß. Hieraus ergibt sich mittelst der Strecke  $R'_I P'_I$  die relative Höhe von  $P$  über  $R_I$ , die übrigens auch negativ sein kann. Entsprechend findet man den Höhenunterschied von  $P$  und  $R_{II}$  und hat damit eine Probe.

Durch Verwendung von mehr als zwei Aufnahmen erhält man  $P'$  als Schnittpunkt von mehr als zwei Geraden, durch graphischen Ausgleich. Ebenso hat man weitere Höhenproben. — Wenn  $O'_I$  und  $O'_{II}$  über die Zeichnungsfläche hinausfallen, so stört dies nicht wesentlich, denn die Richtungen  $R'_I O'_I$  und  $R'_{II} O'_{II}$  erhält man leicht aus Rechnung.

Ein besonderer Vorteil des Verfahrens liegt darin, daß man die Aufnahmepunkte  $O_I$  und  $O_{II}$  nicht sehr genau nötig hat. Das beruht darauf, daß eine mäßige Unsicherheit von  $O'_I$  und  $O'_{II}$  die Richtungen der Geraden  $R'_I O'_I$  und  $R'_{II} O'_{II}$  nur unbedeutend beeinflusst; der Schnittpunkt  $P'$  wird deshalb wegen seiner Nähe an  $R'_I$  und  $R'_{II}$  nicht störend beeinträchtigt. Ebenso wenig leidet die Höhenbestimmung des  $P$  unter der Unsicherheit der Grundrisse und der Höhen von  $O_I$  und  $O_{II}$ . Es lassen sich für alles leicht Fehlerabschätzungen bilden, zur praktischen Erprobung — wenigstens durch Bearbeitung einer größeren Reihe von Aufnahmen — bot sich noch keine Gelegenheit.

---