

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1914. Heft III

November- und Dezembersitzung

---

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



# Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Dezember 1914.

## Einleitung.

### Stellung der Aufgabe und Gang der Lösung.

Die Bewegung paralleler geradliniger Wirbelfäden, die unendlich kleinen Querschnitt haben und in endlicher oder auch unendlicher Anzahl in einer Flüssigkeit vorhanden sind, ist von Helmholtz<sup>1)</sup> untersucht worden; später hat Kirchhoff<sup>2)</sup> die Helmholtzsche Untersuchung in eine sehr elegante Form gebracht und einige Integrale der Bewegungsgleichungen angegeben, die zur vollständigen Beschreibung der ganzen Bewegung hinreichen, wenn die Anzahl der Wirbelfäden nicht größer als drei ist.

Ein Wirbelfaden, oder wie wir unter ausschließlicher Betrachtung einer Ebene der ebenen Strömung sagen wollen, ein Wirbelpunkt bringt eine Potentialbewegung der umgebenden Flüssigkeit hervor. Sind noch weitere Wirbelpunkte vorhanden, so werden sie sich in dieser Potentialströmung bewegen, soferne man sie nicht in besonderer Weise festlegt. Physikalisch

1) Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 46.

2) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, S. 255 u. f.

geschieht dies dadurch, daß man die Wirbelbewegung durch eine Zirkulation um einen festen kleinen Körper ersetzt, das wirbelnde Flüssigkeitselement also gar nicht existieren läßt; analytisch dadurch, daß man den Wirbelpunkt als singuläre Stelle des Integrals der Potentialgleichung durch einen kleinen Kreis aus der komplexen Ebene ausschließt.

Im folgenden sind alle Wirbelpunkte beweglich. Jedes nicht wirbelnde Flüssigkeitselement bewegt sich also unter dem Einfluß des Geschwindigkeitspotentials sämtlicher Wirbelpunkte; ein Wirbelpunkt selbst aber unter dem Einfluß des Geschwindigkeitspotentials der übrigen Wirbelpunkte; denn jeder Wirbelpunkt bringt an der Stelle, wo er sich selbst befindet, zwar eine drehende, aber keine fortschreitende Bewegung hervor, obwohl letztere in unmittelbarer Nähe sogar unendlich groß wird<sup>1)</sup>.

Helmholtz und Kirchhoff setzen voraus, daß die Wirbelbewegung in der unendlich ausgedehnten, einfachen und einfach zusammenhängenden Ebene stattfindet und daß die Flüssigkeit, von der Wirbelbewegung abgesehen, in Ruhe ist; die gesamte Strömung soll also quellenfrei, im Unendlichen in Ruhe, und außer an einzelnen Stellen auch wirbelfrei sein; die ganze Bewegung wird dann durch das von diesen Wirbelstellen bewirkte zyklische Potential geleitet.

Die von Helmholtz und Kirchhoff angenommenen Beschränkungen zu beseitigen und Beispiele für allgemeinere Bewegungen einzelner Wirbelpunkte zu geben, ist der Zweck dieser Untersuchung.

Zunächst wird angenommen, daß außer dem durch die beweglichen Wirbel hervorgebrachten Geschwindigkeitspotential noch ein weiteres additiv hinzutretendes Geschwindigkeitspotential existiert. Dieses kann stationär oder mit der Zeit veränderlich sein. Es kann sehr wohl durch im Endlichen liegende Wirbel<sup>2)</sup> oder Quellen hervorgerufen sein, die dann

<sup>1)</sup> Kirchhoff, Mechanik, S. 258.

<sup>2)</sup> Auch die Wirbelstärke mit der Zeit zu verändern ist unzulässig.

als fast angenommen werden müssen und aus der komplexen Ebene auszuschließen sind<sup>1)</sup>). Bewegung im Unendlichen ist zulässig. Zweitens soll es möglich sein, daß Bewegung der Wirbel im Innern oder Äußern eines endlichen geschlossenen Gebietes vor sich geht, dessen Grenzen von der Flüssigkeit nicht überschritten werden dürfen. Wenn die Wirbel nach Lage, Stärke, Drehsinn gewisse Symmetriebedingungen erfüllen, bildet sich eine Stromlinie aus, die während der Bewegung ihre Gestalt nicht ändert und als feste Grenze genommen werden kann. Derartige Fälle, von denen das Wirbelpaar das wichtigste ist, sind von Helmholtz u. a. behandelt worden<sup>2)</sup>). Im allgemeinen werden indessen die eingeschlossenen Wirbel zusammen mit dem gegebenen Geschwindigkeitspotential, das im Bereiche auch feste Singularitäten haben kann, eine Strömung hervorbringen, die den Rand des Bereiches überschreitet. Soll das vermieden werden, so muß noch eine weitere Potentialströmung hinzugefügt werden, die im Innern bzw. Äußern des Bereiches singularitätenfrei ist und deren Normalgeschwindigkeit am Rande des Bereiches der Normalgeschwindigkeit der vorhandenen Strömung entgegengesetzt gleich ist. Um diese Zusatzströmung zu finden, muß eine Randwertaufgabe gelöst werden; die Lösung ist für das Innere eines Bereiches eindeutig, für das Äußere tritt noch eine Zirkulation hinzu, die eine willkürliche Konstante hereinbringt<sup>3)</sup>). Mit der Auffindung dieses Zusatzpotentials ist die zweite Erweiterung der Helmholtzschen Aufgabe auf die erste zurückgeführt.

1) Quellen sind ebenso wie Wirbel in der Strömung beweglich, wenn man die Quellpunkte nicht aus der komplexen Ebene ausschließt. In den in der Natur auftretenden Flüssigkeitsströmungen kommen indessen bewegliche Quellen, zum Unterschied von beweglichen Wirbeln, kaum vor.

2) Helmholtz, l. c., S. 48. — Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik S. 263 u. f.

3) Vgl. Kutta, Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. — Literatur: Mathematische Enzyklopädie II, A. 7b. Burkhardt und Meyer, Potentialtheorie 17, S. 486 u. f.

Man wird im allgemeinen nicht mit Sicherheit erwarten können, daß das Zusatzpotential einwertig ist. Um uns von Strömungen, die durch mehrwertige Potentiale geleitet werden, ein Bild zu machen, bedienen wir uns Riemannscher Flächen<sup>1)</sup>. Mit ihrer Hilfe läßt sich eine dritte Erweiterung der Helmholtz-Kirchhoffschen Aufgabe behandeln. Man kann verlangen, daß die Wirbel und die ganze Strömung sich zwar in der unendlichen Ebene bewegen können, daß aber gewisse Linien dabei nicht überschritten werden dürfen. Man kann kurz von der Strömung um ein Hindernis sprechen. In diesem Fall kann man die Ebene zu einer Riemannschen Fläche erweitern, indem man längs der Linien, welche von der Flüssigkeit nicht überschritten werden dürfen, ein zweites Blatt anheftet. In der so entstandenen Riemannschen Fläche ist nun die Randwertaufgabe zu lösen. Ob allerdings die zweiblätterige Fläche genügt oder ob eine höhere Riemannsche Fläche verwendet werden muß, um die Zusatzfunktion zu einer eindeutigen Funktion des Ortes zu machen, wird im voraus nicht immer mit Sicherheit zu entscheiden sein. Von Wichtigkeit ist noch, daß während in der Ebene alle einzelnen Wirbel von gleicher Art sind und sich nur durch 3 Konstante unterscheiden, in einer Riemannschen Fläche mit der Erweiterung des Bereiches der einwertigen Funktionen auch Wirbel besonderer Art möglich sind, neben den Wirbeln der schlichten Ebene.

Die folgenden Beispiele sind so gewählt, daß die eigentliche Lösung der Randwertaufgabe durch Anwendung des Spiegelungsprinzipes zu vermeiden ist. Außer der Bewegung eines Wirbels in einem von zwei Parallelen begrenzten Kanal ist vor allem die Bewegung eines Wirbelspaares in einer zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit zwei Verzweigungspunkten untersucht; sie führt auf die Bewegung eines Wirbels um ein geradliniges Hindernis von endlicher oder unendlicher Aus-

<sup>1)</sup> Es darf nicht übersehen werden, daß auch die Wirbelpunkte selbst wenigstens für das Potential, nicht für die Geschwindigkeit, Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung sind, die hier außer acht gelassen werden.

dehnung; über die sonstige Bewegung der Flüssigkeit sind mehrere Annahmen zulässig, für die das Problem der Behandlung zugänglich ist.

### Bewegung einzelner Wirbel in der einfachen Ebene.

#### Allgemeine Sätze.

Die Geschwindigkeit, die ein Wirbelpunkt  $a, b$  in einem beliebigen Aufpunkt der unendlich ausgedehnten Ebene hervorbringt, hat die Komponenten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

wenn die „Stromfunktion“

$$\psi = -\mu \lg r = -\mu \lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}^1)$$

ist. Dabei ist  $\mu$  eine Konstante, die als Wirbelstärke bezeichnet werden soll.  $\psi$  ist der imaginäre Teil einer Funktion  $w$  der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$ ; es ist nämlich, wenn noch  $c = a + ib$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} w &= -i\mu \lg(z-c) = -i\mu \lg((x-a) + i(y-b)) \\ &= \mu \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} - i\mu \lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}. \end{aligned}$$

Setzt man also  $w = \varphi + i\psi$ , so wird

$$\varphi = \mu \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} \text{ das Geschwindigkeitspotential}$$

- 1)  $\psi = -\mu \lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  die Stromfunktion  
 $w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg((x-a) + i(y-b))$  das komplexe Potential

1) Kirchhoff, Mechanik, S. 298. Kirchhoff benutzt durchgehend diese Stromfunktion. Wegen der später hinzutretenden Potentialbewegung ist hier, um die beiden Summanden nicht verschieden behandeln zu müssen, das Potential stärker betont.

der durch den Wirbelpunkt erzeugten Flüssigkeitsbewegung: die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\mu \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ \frac{dy}{dt} = v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2}. \end{aligned}$$

Die Größe der Geschwindigkeit ist

$$V \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{\mu}{r}.$$

Ihre Richtung ist durch

$$\frac{v}{u} = -\frac{x-a}{y-b} = \frac{dy}{dx}; \quad (x-a)dx + (y-b)dy = 0$$

gegeben. Die Stromlinien sind Kreise um  $a, b$ , die im positiven Sinn (gegen den Uhrzeiger) durchflossen werden, wenn  $\mu$  eine positive Zahl ist.

Bemerkenswert ist noch die Beziehung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv.$$

Sind  $n$  Wirbelpunkte mit den Wirbelstärken  $\mu_k$  ( $k = 1, 2 \dots n$ ) an den Stellen  $a_k, b_k$  vorhanden und tritt zu der durch sie bewirkten Bewegung noch eine Strömung mit dem Potential  $\Phi$  und der Stromfunktion  $\Psi$ , so ist das komplexe Potential der ganzen Bewegung

$$3) \quad \Phi + i\Psi - i \sum_1^n \mu_k \lg((x - a_k) + i(y - b_k))$$

also das Geschwindigkeitspotential

$$3a) \quad \Phi + \sum_1^n \mu_k \operatorname{arctg} \frac{y - b_k}{x - a_k}$$

und die Stromfunktion

$$3b) \quad \Psi - \sum_1^n \mu_k \lg \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2}.$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich

$$4) \quad \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \sum_1^n \mu_k \frac{y - b_k}{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2} \\ v &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \sum_1^n \mu_k \frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2}. \end{aligned}$$

Setzt man in (4) an Stelle eines beliebigen Aufpunktes  $x, y$  die Koordinaten eines Wirbelpunktes  $a_i, b_i$  ein, so erhält man

$$5) \quad \begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} - \sum_1^{n'} \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2} \\ \frac{db_i}{dt} &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} + \sum_1^{n'} \mu_k \frac{a_i - a_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}. \end{aligned}$$

Weil ein Wirbelpunkt an der Stelle, wo er sich selbst befindet, keine Komponenten der Fortschrittggeschwindigkeit hervorbringt, ist der Wert  $k = i$  aus der Summation auszuschließen, was durch den Strich (') am Summenzeichen angedeutet werden soll. Die  $2n$  Gleichungen (5) mit den  $2n + 1$  Veränderlichen  $a_k, b_k, t$  bestimmen die Wirbelbahnen und den zeitlichen Verlauf der Bewegung der Wirbelpunkte. Setzt man die aus (5) als Funktionen von  $t$  berechneten Größen  $a_k, b_k$  in (3) bzw. (4) ein, so bestimmen diese Gleichungen den Verlauf der ganzen Flüssigkeitsbewegung.

Helmholtz definiert durch die Gleichungen

$$6) \quad x_0 = \frac{\sum_1^n \mu_i a_i}{\sum_1^n \mu_i}; \quad y_0 = \frac{\sum_1^n \mu_i b_i}{\sum_1^n \mu_i}$$

den Schwerpunkt eines Wirbelsystems; unter den von Helmholtz gemachten Voraussetzungen ändert er seine Lage nicht.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \frac{da_i}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} \\ &\quad - \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \sum_1^{n'} \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}. \end{aligned}$$

Die auf der rechten Seite auftretende Doppelsumme

$$\sum_1^n \sum_1^{n'} \mu_i \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$

ist identisch Null, weil jede Differenz  $b_i - b_k$  zweimal mit verschiedenen Zeichen auftritt. Folglich ist

$$7) \quad \frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}},$$

ebenso

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich in jedem Moment so, als ob den Wirbelstärken gleiche Massen in der Potentialströmung  $\Phi$  verteilt wären, die Wirbelbewegung selbst aber gar nicht existierte.

Ein einzelner Wirbel, der sein eigener Schwerpunkt ist, bewegt sich nach

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} \\ \frac{db}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} \end{aligned}$$

auf einer Stromlinie der Potentialströmung mit der Geschwindigkeit, die die Strömung an dieser Stelle hätte, wenn sie nicht durch den Wirbel gestört wäre; die Bewegung aller

anderen Flüssigkeitsteilchen wird durch den Wirbel verändert. Man kann häufig in fließendem Wasser beobachten, daß ein einzelner Wirbel geradlinig in Richtung der Strömung fortschreitet, während rings um ihn das Wasser eine kreisende Bewegung hat.

Ist  $\Phi$  eine lineare Funktion

$$\Phi = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

so ist die Geschwindigkeit der ursprünglichen Strömung an allen Stellen parallel und gleich groß;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_2.$$

Der Schwerpunkt eines Wirbelsystems, das sich in der Flüssigkeit befindet, schreitet nach (7) mit der gleichen Geschwindigkeit

$$\frac{dx_0}{dt} = c_1, \quad \frac{dy_0}{dt} = c_2$$

in der Strömung fort. Die Geschwindigkeit der einzelnen Wirbel des Systems wird nach (5)

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= c_1 - \sum_1^n \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2} \\ \frac{db_i}{dt} &= c_2 + \sum_1^n \mu_k \frac{a_i - a_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}. \end{aligned}$$

Die Relativbewegung des ganzen Wirbelsystems wird also durch die Strömung nicht geändert; das System schreitet als Ganzes mit der Geschwindigkeit der Strömung gleichmäßig fort. Auch dieser Satz läßt sich durch Beobachtungen stützen. Man kann oft in fließendem Wasser Systeme von 2 (oder mehreren) Wirbeln sehen, die längere Zeit gerade so umeinander rotieren, wie sie es der Theorie <sup>1)</sup> nach in stehendem Wasser tun müßten, während

<sup>1)</sup> Vgl. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 263; Kirchhoff, Mechanik, S. 260.

gleichzeitig das ganze System ohne nennenswerte Formänderung mit der Strömung geradlinig fortschreitet.

Man kann fragen, ob es noch andere Strömungen gibt, in denen der Schwerpunkt eines Wirbelsystems auf einer Stromlinie mit der durch das Geschwindigkeitspotential bestimmten Geschwindigkeit fortschreitet. Dann muß nach (7)

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

sein, also muß sowohl  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  als  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  eine lineare Funktion in  $x$  und  $y$ , folglich  $\Phi$  vom 2. Grad sein. Außerdem muß  $\Phi$  der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

genügen. So ergibt sich

$$\Phi = x^2 - y^2 + 2c_{12}xy + 2c_1x + 2c_2y$$

(bis auf eine additive und eine multiplikative Konstante). Die zugehörige Stromfunktion ist

$$\Psi = c_{12}(y^2 - x^2) + 2xy - 2c_2x + 2c_1y.$$

Dann ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x + c_{12}y + c_1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(c_{12}x - y + c_2).$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts wird nach (7)

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{1}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n 2\mu_i [x + c_{12}y + c_1]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} \\ &= \frac{2}{\sum_1^n \mu_i} \sum_1^n [\mu_i a_i + c_{12} \mu_i b_i + c_1 \mu_i] \\ \frac{dx_0}{dt} &= 2x_0 + 2c_{12}y_0 + 2c_1 = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}. \end{aligned}$$

Ebenso wird

$$\frac{dy_0}{dt} = 2c_{12}x_0 - 2y_0 + 2c_2 = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Die Strömung selbst ist wohlbekannt<sup>1)</sup>; die Flüssigkeit bewegt sich auf gleichseitigen Hyperbeln, mit gemeinsamen Asymptoten; die Potentialkurven sind ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, die aus den Stromlinien durch Drehung um 45° erhalten werden. Die Strömung kann als Flüssigkeitsbewegung im Raum eines rechten Winkels betrachtet werden. Der Schwerpunkt eines Wirbelsystems in dieser Strömung beschreibt also eine gleichseitige Hyperbel; dabei werden sämtliche Stromlinien, auch die Asymptoten, deformiert. Die Randwertaufgabe der Bewegung eines Wirbelsystems im Raum eines rechten Winkels ist also damit nicht gelöst<sup>2)</sup>.

Von den Differentialgleichungen der Wirbelbahnen (5) läßt sich stets ein Integral finden, das mit einem der von Kirchhoff angegebenen Integrale verwandt ist, wenn die überlagerte Potentialströmung stationär ist.

1) Lamb, Hydrodynamik, S. 86.

2) Die Bewegung eines Wirbels in einem Rechten-Winkelraum unter der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit sonst in Ruhe ist, ist übrigens bekannt. Lamb, S. 266 u. 267. Demnach bietet es auch keine Schwierigkeiten, wenigstens die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Wirbels aufzustellen, der sich in einer Hyperbelströmung innerhalb eines rechten Winkels befindet.

Setzt man

$$Q = \sum_1^n \mu_i [\Psi]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \sum_1^n \mu_i \Psi_i$$

so ist

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \mu_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial a_i} = \mu_i \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = - \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i} = \mu_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial b_i} = \mu_i \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \mu_i \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}.$$

Setzt man ferner

$$P = - \sum_1^n \sum_1^{n'} \mu_i \mu_k \lg V \sqrt{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$

so ist

$$\frac{\partial P}{\partial a_i} = - \mu_i \sum_1^{n'} \mu_k \frac{a_i - a_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial b_i} = - \mu_i \sum_1^{n'} \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}.$$

Dann gehen die Gleichungen (5) über in

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{da_i}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial b_i} + \frac{\partial P}{\partial b_i} \\ \mu_i \frac{db_i}{dt} &= - \frac{\partial Q}{\partial a_i} - \frac{\partial P}{\partial a_i}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial(P+Q)}{\partial a_i} da_i + \frac{\partial(P+Q)}{\partial b_i} db_i = 0,$$

also auch

$$\sum_1^n \frac{\partial(P+Q)}{\partial a_i} da_i + \sum_1^n \frac{\partial(P+Q)}{\partial b_i} db_i = 0.$$

Dieser Ausdruck ist ein vollständiges Differential; also ist

$$8) \quad P + Q = \text{const.} \quad \text{oder} \\ \sum_1^n \mu_i [\Psi]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} - \sum_1^n \sum_1^{n'} \mu_i \mu_k \lg \sqrt{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2} = \text{const.}$$

ein Integral der Differentialgleichungen der Wirbelbahnen.

Es muß noch bemerkt werden, daß ein System von Wirbelpunkten, das in einem Moment symmetrisch ist, immer symmetrisch bleibt, weil die symmetrische Lage auch symmetrische Geschwindigkeiten zur Folge hat. Hieran ändert sich auch nichts, wenn dem Wirbelsystem eine weitere wirbelfreie Strömung mit gleicher Symmetrieachse überlagert ist.

Die Gleichung (8) wenden wir auf die Bewegung eines Wirbelpaares an, das sich in einer zur X Achse symmetrischen stationären Strömung bewegt. Es sei

$$a_1 = a_2 = a; \quad b_1 = -b_2 = b \\ \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}} = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}}; \quad \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = - \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}.$$

Also ist bis auf eine willkürliche additive Konstante

$$\left[ \Psi \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = - \left[ \Psi \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}.$$

oder einfacher

$$\Psi(a, b) = - \Psi(a, -b).$$

Setzt man

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1,$$

so wird aus (8)

$$\Psi(a, b) - \Psi(a, -b) + \lg 2b = \text{const.}$$

oder

$$9) \quad 2 \Psi(a, b) + \lg b = \text{const.}$$

Das ist die Gleichung der Wirbelbahn in der positiven Halbebene in endlicher Form. Damit ist die Bahn eines einzelnen Wirbels gefunden, der sich in einer be-

liebigen durch eine feste Wand begrenzten stationären Strömung bewegt. Die Untersuchung des zeitlichen Verlaufs erfordert eine Elimination und eine Quadratur.

Es seien weiter in einer symmetrischen Strömung mit dem komplexen Potential

$$W = \Phi + i\Psi$$

zwei symmetrische Wirbel mit den komplexen Potentialen

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 \quad \text{und} \quad w_2 = \varphi_2 + i\psi_2$$

an den Stellen  $a, b$  und  $a, -b$  vorhanden.

Dann ist

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} &= \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}; & \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} &= - \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}} \\ \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} &= \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}; & \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} &= - \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}. \end{aligned}$$

Der untere Wirbel bewegt sich im Strömungsfeld des Potentials und des oberen Wirbels; also ist

$$\frac{da}{dt} = \left[ \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}; \quad -\frac{db}{dt} = \left[ \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d(W + w_1)}{dz} &= \frac{\partial(W + w_1)}{\partial x} = \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial x} + i \frac{\partial(\Psi + \psi_1)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial x} - i \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Also

$$10) \quad \left[ \frac{d(W + w_1)}{dz} \right]_{\substack{x=a \\ y=-b}} = \frac{da}{dt} + i \frac{db}{dt}.$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeitskomponenten des Wirbels selbst, dessen Potential auf der linken Seite differenziert wird; sie gilt auf Riemannschen

Flächen geradeso wie in der einfachen Ebene. Ihre Anwendung vereinfacht die Aufstellung der Differentialgleichungen der Wirbelbahnen wesentlich.

### Verhalten der Wirbelbahnen bei der konformen Abbildung.

Aus jedem System von Wirbelpunkten samt der zugehörigen Strömung geht durch jede beliebige konforme Abbildung ein neues hervor; ob jedoch aus den Wirbelbahnen des alten Systems auch die Wirbelbahnen des Bildes hervorgehen, bedarf der Untersuchung.

Die Bahn eines Wirbels hat in jedem Punkt die Richtung der Stromlinie derjenigen Flüssigkeitsströmung, die durch Weglassung dieses Wirbels entsteht. Die Bedingung dafür, daß aus einem Linienelement einer Wirbelbahn bei der Abbildung wieder ein Linienelement der Bahn des Bildwirbels hervorgeht, ist die, daß die Strömung, die in der Bildebene durch Weglassung eines Wirbels entsteht, durch konforme Abbildung aus der Strömung entsteht, die man durch Weglassung des entsprechenden Wirbels in der gegebenen Strömung erhält. Hierzu ist vor allem notwendig, daß die Abbildung ein-eindeutig ist, gleichgültig ob als Beziehung zwischen einfachen Ebenen oder Riemannschen Flächen. Ferner dürfen durch die Abbildung keine neuen Singularitäten hereingebracht werden; da insbesondere im Feld eines Wirbels der unendlich ferne Punkt die Eigenschaften eines Wirbelpunktes hat, um den die Strömung zirkuliert, darf ihm bei der Abbildung kein im Endlichen gelegener Punkt entsprechen.

Aus diesem Grund ist z. B. die Inversion  $z = \frac{1}{\zeta}$  auszuschließen. Aus einem Wirbel mit dem komplexen Potential

$$w = -i\mu \lg(z - c)$$

geht durch Inversion ein Wirbelpaar

$$w = -i\mu \lg\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\gamma}\right) = -i\mu \lg \frac{\gamma - \zeta}{\gamma \zeta} = -i\mu [\lg(\gamma - \zeta) - \lg \zeta - \lg \gamma]$$

hervor, das aus einem festen Wirbel an der Stelle  $\zeta = 0$  und einem beweglichen Wirbel an der Stelle  $\zeta = \gamma$  besteht.  $i\mu \lg \gamma$  tritt als additive Konstante zu dem Potential und ist ohne Einfluß auf die entstehende Strömung.

Ein Wirbelpaar geht durch Inversion wieder in ein Wirbelpaar über; die Singularität im Punkt  $\zeta = 0$  verschwindet jedoch nur deshalb, weil dort zwei gleich starke Wirbel von entgegengesetztem Umlaufssinn auftreten. Läßt man in der gegebenen Ebene den einen Wirbel weg, um seine Bahnrichtung im Feld des anderen zu bekommen, so verschwindet in der Bildebene außer dem Bildwirbel auch der eine der Wirbel im Nullpunkt; infolgedessen tritt der andere Wirbel im Nullpunkt wieder auf und beeinflusst die Strömung.

Aus einem Element der Bahnkurve eines Wirbels geht also dann ein Element der Bahnkurve in der Bildebene hervor, wenn die Abbildung ein-eindeutig und singularitätenfrei ist und wenn der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung in Ruhe bleibt.

Daraus folgt indessen noch nicht notwendig, daß die ganzen Bahnkurven bei der Abbildung einander entsprechen.

In der gegebenen Ebene ist die Geschwindigkeit eines Wirbelpunktes:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial n},$$

wo  $ds$  das Linienelement der Bahnkurve,  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$  den Differentialquotient des Potentials  $\varphi'$ , welches aus dem Gesamtpotential der Strömung durch Weglassung des Potentials des betrachteten Wirbels entsteht, in Richtung der Normalen der Potentialflächen, also der Bahnkurve bedeutet. Diese Gleichung bleibt bei der konformen Abbildung nicht erhalten. Denn  $ds$  ändert sich um einen Faktor, den Maßstab der Abbildung  $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ ; um den reziproken Wert dieses Faktors ändert sich  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ . Wenn

also  $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$  nicht etwa den Wert 1 hat, geht die Bahngeschwindigkeit eines Wirbels nicht in die Bahngeschwindigkeit des Bildwirbels über.

Wenn also ein Wirbel der gegebenen Ebene in einer unendlich kleinen Zeit ein Linienelement seiner Bahn durchläuft, so wird der Bildwirbel in einer anderen unendlich kleinen Zeit das Bild dieses Linienelementes durchlaufen. Betrachtet man die gleichzeitigen unendlich kleinen Ortsänderungen sämtlicher Wirbel des gegebenen Systems, so wird das System der Bildwirbel nur dann gleichzeitig in die Bildpunkte der gegebenen Wirbel einrücken können, wenn der Faktor, um den sich die Geschwindigkeit der Wirbel in ihrer Bahn bei der Abbildung ändert, für sämtliche Wirbel den gleichen Wert hat. Es muß also der Maßstab der Abbildung an sämtlichen Punkten, an denen sich die Wirbel des Systems gleichzeitig befinden, immer denselben Wert haben. Diese Bedingung wird nur in besonderen Fällen erfüllt sein; z. B. in folgendem:

Es seien nur 2 gleichstarke Wirbel von entgegengesetzter Drehrichtung vorhanden, die sich in einer zur Mittelsenkrechten der beiden Wirbelpunkte, etwa der  $X$  Achse, symmetrischen Strömung befinden. Bildet man die Strömung mittels einer Funktion, die zur selben Geraden symmetrisch ist, ab, so hat auch  $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$  an symmetrisch gelegenen Punkten denselben Wert.

Wenn also eine symmetrische Strömung mit zwei Wirbeln durch konforme Abbildung in eine neue symmetrische Strömung übergeführt wird, und wenn die früheren Voraussetzungen erfüllt sind, so geht die Wirbelbahn eines jeden der gegebenen Wirbel durch die konforme Abbildung in die des Bildwirbels über; jedoch befindet sich ein Wirbel der gegebenen Strömung und sein Bild zu entsprechenden Zeiten nicht in entsprechenden Punkten.

Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Bewegung sind dann nach (5) Eliminationen und eine Quadratur nötig.

### Bewegung eines Wirbels in einem von 2 Parallelen begrenzten Kanal.

Wenn sich ein Wirbel in einer von einer Geraden begrenzten Halbebene befindet, kann man die Normalkomponente der Strömung an der Geraden dadurch zum Verschwinden bringen, daß man einen zweiten Wirbel in der anderen Halbebene hinzufügt, der nach Lage und Umlaufssinn das Spiegelbild des gegebenen Wirbels ist. So entsteht im einfachsten Fall das *Wirbelpaar*. Beide Wirbel bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel der Geraden fort, nämlich mit der Geschwindigkeit, die die von jedem Wirbel hervorgerufene Strömung am Orte des anderen Wirbels hat.

Befindet sich ein Wirbel in einem von zwei Parallelen begrenzten Kanal, so genügt es nicht, den Wirbel an beiden Seiten zu spiegeln; denn jedes dieser Spiegelbilder macht zwar die Normalkomponente der Strömung auf der einen Seite zu Null, hat aber ein Überströmen der anderen Seite zur Folge. Vollständig auf das Innere des Kanals beschränkt wird die Strömung erst, wenn man die unendlich vielen Spiegelbilder hinzunimmt, die durch fortwährendes Widerspiegeln an beiden Seiten des Kanals entstehen.

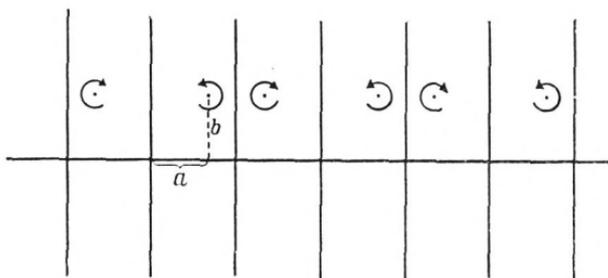


Fig. 1.

Ist  $\pi$  die Breite des Kanals und sind  $a, b$  die Koordinaten des Wirbels, so sind  $a + 2k\pi, b$  die Koordinaten der Spiegelbilder von gleichem,  $2k\pi - a, b$  die der Spiegelbilder von entgegengesetztem Umlaufssinn.

Das Geschwindigkeitspotential wird

$$\varphi = \mu \sum_{-\infty}^{\infty} k \left[ \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-(2k\pi+a)} - \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-(2k\pi-a)} \right].$$

Ordnet man die Wirbel nach der Entfernung von dem Aufpunkt  $x, y$  an, so nehmen die Reihenglieder fortwährend ab (natürlich ist immer der kleinste Wert des  $\operatorname{arctg}$  zu nehmen); zugleich haben die Glieder abwechselnde Vorzeichen; die Reihe ist also sicher konvergent.

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = -\mu \sum_{-\infty}^{\infty} k \left[ \frac{y-b}{(x-(2k\pi+a))^2 + (y-b)^2} - \frac{y-b}{(x-(2k\pi-a))^2 + (y-b)^2} \right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = \mu \sum_{-\infty}^{\infty} k \left[ \frac{x-(2\pi k+a)}{(x-(2k\pi+a))^2 + (y-b)^2} - \frac{x-(2k\pi-a)}{(x-(2k\pi-a))^2 + (y-b)^2} \right].$$

Über die Konvergenz dieser Reihen gilt dasselbe wie oben.

An der Stelle  $x = a, y = b$  bringt der dort selbst befindliche Wirbel keine Geschwindigkeitskomponente hervor; es wird also

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0 \\ \frac{db}{dt} &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = -\frac{\mu}{2a} + \mu \sum_{-\infty}^{\infty} k \left[ \frac{-1}{2k\pi} - \frac{1}{2a - 2k\pi} \right] \\ &= -\frac{\mu}{2\pi} \left[ \frac{1}{a} + \sum_{-\infty}^{+\infty} k \left( \frac{1}{\pi - k} + \frac{1}{k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von  $\frac{db}{dt}$  ist eine einfach periodische Funktion, die an allen Stellen  $a = k\pi$ , wo  $k$  eine beliebige ganze positive oder negative Zahl einschließlich Null ist, einen einfachen Pol hat; und zwar ist

$$v = \frac{db}{dt} = -\frac{\mu}{2} \cotg a^1).$$

1) Vgl. z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, S. 144 u. f.

Der Wirbel bewegt sich parallel den Wänden des Kanals; Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit hängt von seiner Entfernung von den beiden Wänden ab. In der Mitte des Kanals ist die Geschwindigkeit Null; sie wächst immer rascher, je näher der Wirbel einer der beiden Wände liegt; die Richtung, in der der Wirbel fortschreitet, ist dieselbe, in der sich die Flüssigkeit zwischen dem Wirbelpunkt und der näher gelegenen Wand bewegt.

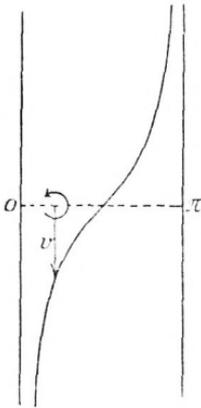


Fig. 2.  
Schaulinie der Geschwindigkeitsverteilung in einem Kanal.

Wenn man den Kanal mit einem neben ihm liegenden Spiegelbild zusammenfaßt und die trennende Wand entfernt, so entsteht ein Kanal von doppelter Breite  $2\pi$ , in dem sich ein zur Mittellinie symmetrisches Wirbelpaar befindet. Sind die Wirbel von den Wänden um ein Viertel der Kanalbreite entfernt, so bleiben sie in Ruhe; es herrscht ein übrigens sehr unstabiles Gleichgewicht; rücken sie näher, so bewegen sie sich in derselben Richtung wie ein Wirbelpaar im freien Raum mit um so größerer Geschwindigkeit, je kleiner ihre Entfernung ist; rücken sie den Wänden näher, so kehrt sich die Fortschreitungsrichtung um, der Einfluß der benachbarten Wand überwiegt den Einfluß des anderen Wirbels.

Der ganzen Bewegung kann man noch eine geradlinige fortschreitende Bewegung von gleichmäßiger Geschwindigkeit im ganzen Kanal überlagern, ohne daß dadurch die Relativbewegung des Wirbelsystems gestört wird.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich die Bewegung eines Wirbels im Innern eines Rechtecks untersuchen. Die Geschwindigkeitskomponenten sind durch elliptische Funktionen ausdrückbar, die in der Partialbruchentwicklung auftreten. Auch die Bahnkurve selbst ist in sehr einfacher Weise durch elliptische Funktionen darzustellen.

### Fälle von Wirbelbewegung in der zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit einem im Endlichen liegenden Verzweigungspunkt.

a) Ein Wirbel in ruhender Flüssigkeit.

Aus einem Wirbel mit dem komplexen Potential

$$w = -i\mu \lg(z - c)$$

geht durch konforme Abbildung mittels der Gleichung

$$z = \sqrt{\zeta}, \quad c = \sqrt{\gamma},$$

wo  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\gamma = a + i\beta$  ist, ein neuer Wirbel mit dem komplexen Potential

$$11) \quad w = -i\mu \lg(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\gamma})$$

hervor. Diese Gleichung (11) definiert eine Strömung, die in der zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit den Verzweigungspunkten  $\zeta = 0$  und  $\zeta = \infty$ , in der  $\sqrt{\zeta}$  eine eindeutige Funktion des Ortes wird, ebenfalls eindeutig ist; die Funktion  $w$  hat 2 wesentlich singuläre Stellen, um die herum die Strömung zyklisch wird, nämlich die Stelle  $\zeta = \infty$ , die in den  $\infty$  fernen Verzweigungspunkt fällt, und die Stelle  $\zeta = \gamma$ , die jedoch nur in dem einen Blatt singulär ist, in dem  $\sqrt{\zeta}$  dem eindeutig definierten Wert  $\sqrt{\gamma}$  gleich wird.

Zunächst sind die gestaltlichen Verhältnisse dieses für die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel charakteristischen Wirbels zu untersuchen (Fig. 3a S. 398 und Fig. 3b S. 399). Das Potential der Bewegung ist der reelle, die Stromfunktion der imaginäre Teil der Funktion  $w$ . Wir haben also

$$11') \quad w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg(\sqrt{\xi + i\eta} - \sqrt{a + i\beta})$$

in den reellen und imaginären Teil zu zerlegen.

Setzt man in Polarkoordinaten

$$12) \quad \begin{aligned} z &= r e^{i\varphi} & c &= r_0 e^{i\varphi_0} \\ \zeta &= \rho e^{i\theta} & \gamma &= \rho_0 e^{i\theta_0}, \end{aligned}$$

so wird die Abbildungsformel

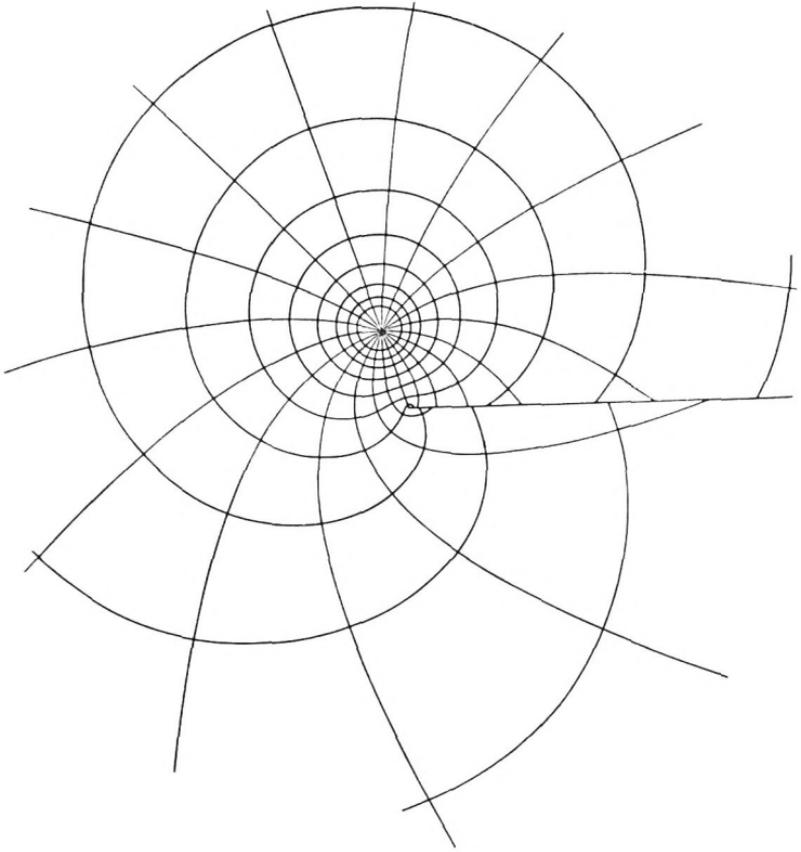


Fig. 3a. Feld eines Wirbels (oberes Blatt).

$$r e^{i\varphi} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}},$$

also 13)

$$r = \varrho^{\frac{1}{2}} \quad \varphi = \frac{\vartheta}{2}.$$

Die Kreise der  $z$  Ebene um den Anfangspunkt gehen in Kreise der Riemannschen Fläche über, die den Anfangspunkt zweimal umlaufen, während die Radien durch den Anfangspunkt der Ebene in ebensolche durch den Anfangspunkt der Fläche mit doppeltem Polarwinkel übergehen. Während  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  wächst, wächst  $\vartheta$  von 0 bis  $4\pi$ ; alle Winkel, die

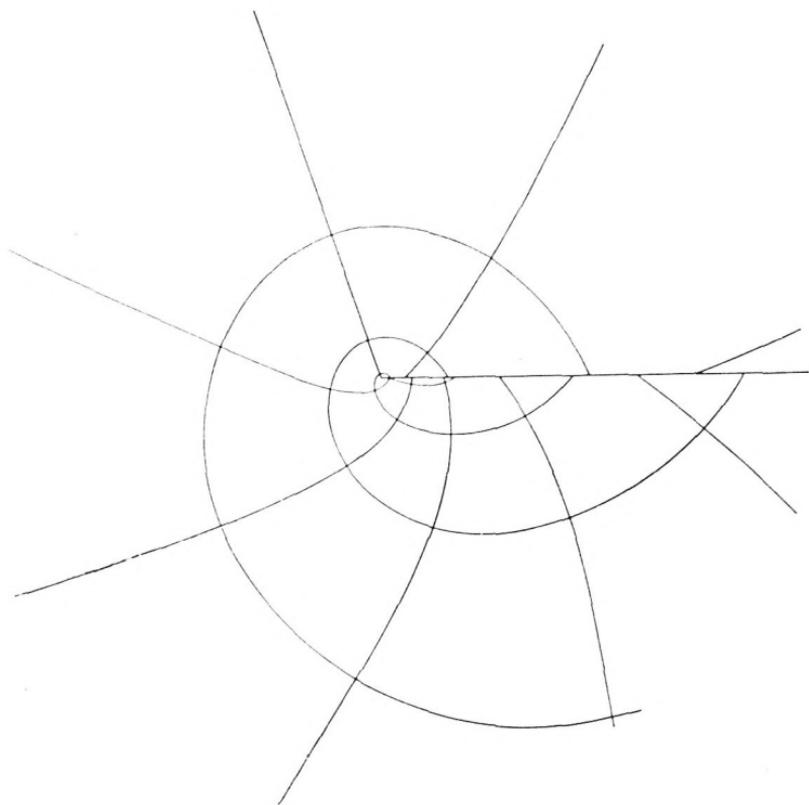


Fig. 3b. Feld eines Wirbels (unteres Blatt).

den Anfangspunkt zum Scheitel haben, werden verdoppelt; aus einer Geraden durch den Anfangspunkt der Ebene gehen zwei Halbgerade der Fläche hervor, die in beiden Blättern übereinanderliegen.

Nun ergibt sich unter Einführung der Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
 w = \varphi + i\psi &= -i\mu \lg \left[ \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}} \right] \\
 &= -i\mu \lg \left[ \left( \varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta_0}{2} \right) + i \left( \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \right) \right] \\
 14) \quad &= -i\mu \left[ \frac{1}{2} \lg \left( \varrho + \varrho_0 - 2\varrho^{\frac{1}{2}} \varrho_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \right) + i \operatorname{arctg} \frac{\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta_0}{2}}{\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta_0}{2}} \right].
 \end{aligned}$$

Demnach ist die Gleichung der Potentialkurven unter Einführung eines neuen Koordinatensystems, dessen  $\xi$  Achse durch den Punkt  $\varrho_0, \vartheta_0$  geht:

$$\frac{\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}}} = \lambda = \text{const} = \text{tg} \frac{\varphi}{\mu}.$$

Daraus:

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} - \lambda \varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} = -\lambda \varrho_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\varrho \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - 2\lambda \varrho \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + \lambda^2 \varrho \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \lambda^2 \varrho_0$$

$$\varrho \frac{1 - \cos \vartheta}{2} - \lambda \varrho \sin \vartheta + \lambda^2 \varrho \frac{1 + \cos \vartheta}{2} = \lambda^2 \varrho_0.$$

In rechtwinkligen Koordinaten:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \frac{\lambda^2 + 1}{2} + \xi \frac{\lambda^2 - 1}{2} - \eta \lambda = \lambda^2 \varrho_0.$$

Quadriert man, so sieht man, daß die Potentialkurven durch das System von Parabeln

$$\xi^2 \lambda^2 + \lambda(\lambda^2 - 1)\xi\eta + \eta^2 \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2}\right)^2 - \lambda^2(\lambda^2 - 1)\varrho_0\xi + 2\lambda^3\varrho_0\eta - \lambda^4\varrho_0^2 = 0.$$

die durch den Punkt  $\varrho_0, \vartheta_0$  hindurchgehen, gebildet werden.

Eine einfache Umformung ergibt

$$\left(\frac{2\lambda\xi + (\lambda^2 - 1)\eta}{\lambda^2 + 1}\right)^2 - 4\frac{\lambda^2\varrho_0}{\lambda^2 + 1} \left(\frac{(\lambda^2 - 1)\xi - \lambda\eta}{\lambda^2 + 1}\right) - 4\left(\frac{\lambda^2\varrho_0}{\lambda^2 + 1}\right)^2 = 0$$

oder mit veränderter Bezeichnung

$$\eta'^2 - 4f\xi' - 4f^2 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Anfangspunkt der Brennpunkt sämtlicher Parabeln ist; ihre Brennweite ist

$$f = \frac{\lambda^2\varrho_0}{\lambda^2 + 1}.$$

Vertauscht man  $\lambda$  mit  $-\lambda$  und  $\eta'$  mit  $-\eta'$ , so bleibt die Gleichung der Potentialkurven erfüllt; das Parabelsystem ist zur  $\xi'$  Achse, die durch den Wirbelpunkt hindurchgeht, symmetrisch.

Die Gleichung der Stromlinien wird, auf dasselbe Koordinatensystem bezogen:

$$\varrho + \varrho_0 - 2\varrho^{\frac{1}{2}}\varrho_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} = r = \text{const} = e^{-\frac{2v}{\mu}}.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$4\varrho\varrho_0\cos^2\frac{\vartheta}{2} = (r - \varrho_0)^2 - 2(r - \varrho_0)\varrho + \varrho^2.$$

Eine Umrechnung in rechtwinklige Koordinaten gibt

$$[\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\varrho_0 + (r - \varrho_0)^2]^2 = 4r^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Die Stromlinien sind Kurven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten, die zur  $\xi$  Achse symmetrisch sind, also Pascalsche Schneckenlinien. 2 Doppelpunkte sind die  $\infty$  fernen Kreispunkte, der dritte liegt auf der  $\xi$  Achse an der Stelle  $\xi = \varrho_0 - r$ ;  $\eta = 0$ ; seine Tangenten können reell oder imaginär sein.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Gleichungen der Potential- und Stromlinien in der Riemannschen Fläche auch durch Transformation der entsprechenden Gleichungen in der Ebene zu erhalten wären<sup>1)</sup>.

#### b) Ein Wirbelpaar in ruhender Flüssigkeit.

Ein Wirbelpaar in der Ebene, gebildet durch 2 Wirbel von den Stärken  $\mu$  und  $-\mu$ , die sich an 2 Punkten  $c = a + ib$  und  $\bar{c} = a - ib$  befinden, die spiegelbildlich zur  $X$  Achse liegen, bestimmt eine Strömung, deren Potentialkurven ein Kreisbüschel durch die Wirbelpunkte, deren Stromlinien ein Kreisbüschel

<sup>1)</sup> Vgl. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, § 55, S. 122 u. f. Ein Teil des oberen Blattes ist gezeichnet, Fig. 34.

um die Wirbelpunkte als Nullkreise bilden. Jeder Wirbel bewegt sich unter dem Einfluß des anderen parallel zur  $X$  Achse mit konstanter Geschwindigkeit; die  $X$  Achse ist Stromlinie und kann als feste Grenze der Strömung aufgefaßt werden. Man erhält dann die Bewegung eines Wirbels längs einer Wand.

Bei der Abbildung geht, wie schon erwähnt, die ganze  $X$  Achse in die positive  $\Xi$  Achse über; die beiden Wirbelpunkte  $\gamma = a + i\beta$ ,  $\bar{\gamma} = a - i\beta$  liegen zu ihr spiegelbildlich. Nimmt man die  $+$   $\Xi$  Achse als Übergangslinie, so liegen die beiden Wirbel in verschiedenen Blättern. Die Übergangslinie ist Stromlinie, die auf beiden Seiten nach verschiedenen Richtungen durchströmt wird; sie kann als natürliche Begrenzung der Bewegung dienen. Schneidet man die Riemannsche Fläche längs der Übergangslinie auf, so erhält man zwei Ebenen, deren jede längs der positiven  $\Xi$  Achse aufgeschnitten ist. In jeder Ebene befindet sich ein Wirbel, in bewegter Flüssigkeit, welche die positive  $\Xi$  Achse nicht überschreitet; der Wirbel selbst bewegt sich unter dem Einfluß des zweiten Wirbels, der im anderen Blatt liegt.

Die Wirbelbahn im oberen Blatt der zerschnittenen Riemannschen Fläche geht aus der geradlinigen Wirbelbahn in der positiven Halbebene durch konforme Abbildung hervor, weil sich bei der Abbildung der Ebene auf die Riemannschen Fläche die unendlich fernen Punkte entsprechen und neue Singularitäten durch die Abbildungsfunktion nicht hereingebracht werden, außerdem die Bedingung der Symmetrie vor und nach der Abbildung erfüllt ist.

Ein Wirbelpaar in der Ebene besitzt das komplexe Potential

$$\begin{aligned} w &= \varphi + i\psi = -i\mu \lg [(x-a) + i(y-b)] + i\mu \lg [(x-a) + i(y+b)] \\ &= -i\mu \left[ \frac{1}{2} \lg \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(x-a)^2 + (y+b)^2} + i \operatorname{arctg} \frac{-2b(x-a)}{(x-a)^2 + y^2 - b^2} \right]. \end{aligned}$$

Die Potentialkurven sind die Kreise des Büschels

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - b^2 - 2\lambda b(x-a) = 0,$$

wo  $\lambda$  der Parameter ist; oder in Polarkoordinaten

$$r^2 - 2(a + \lambda b)r \cos \varphi + (a^2 - b^2 + 2\lambda ab) = 0.$$

Die Stromlinien sind die Kreise des orthogonalen Büschels

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 + b^2 - 2rby = 0$$

mit dem Parameter  $r$ ; in Polarkoordinaten

$$r^2 - 2ar \cos \varphi - 2rbr \sin \varphi + a^2 + b^2 = 0.$$

Die Abbildung in die Riemannsche Fläche ergibt als Gleichung der Potentialkurven<sup>1)</sup>:

$$\varrho - 2(a + \lambda b)\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + (a^2 - b^2 + 2\lambda ab) = 0.$$

Will man diese Kurven in ihrer Lagebeziehung zu den Wirbelpunkten, durch die sie hindurchgehen müssen, untersuchen, so ist auch auf die Größen  $a$  und  $b$  die Transformation anzuwenden; handelt es sich nur um die Art der Kurven, so kann man die Bezeichnung vereinfachen:

$$\varrho - 2A\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} + B = 0.$$

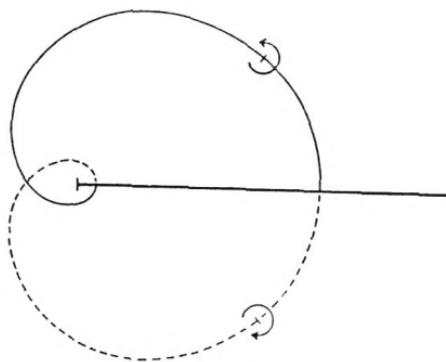


Fig. 4.

<sup>1)</sup> Bei Holzmüller, l. c., ist dieses Kurvensystem nur erwähnt, ein Spezialfall (Symmetrie zur  $\Xi$  Achse) teilweise gezeichnet, Fig. 35.

Zweimaliges Quadrieren und Einführen von Kartesischen Koordinaten gibt

$$(\xi^2 + \eta^2 - 2A^2\xi + B^2)^2 = 4(A^2 - B^2)(\xi^2 + \eta^2).$$

Die einzelnen Kurven sind von derselben Art wie die Stromlinien eines Wirbels in der zweiblätterigen Fläche; sie haben außer in den Kreispunkten einen Doppelpunkt auf der negativen  $\Xi$  Achse und schneiden die positive  $\Xi$  Achse, die Übergangslinie, in zwei Punkten senkrecht (Fig. 4).

Die Gleichung der Stromlinien in der Riemannschen Fläche ist

$$\varrho - 2A\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} - 2B\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + C = 0$$

in Kartesischen Koordinaten

$$[\xi^2 + \eta^2 - 2(A^2 - B^2)\xi - 4AB\eta + C^2]^2 = 4(\xi^2 + \eta^2)(A^2 - B^2 - C^2).$$

Diese Kurven 4. Ordnung besitzen die Symmetrieachse

$$(A^2 - B^2)\xi + 2AB\eta = 0,$$

die für jede von ihnen eine andere Lage hat und aus dem Durchmesser des Kreises in der Ebene entsteht, der durch den Koordinatenanfang geht. Führt man diese Symmetrieachse als neue  $\Xi'$  Achse ein und kürzt die Bezeichnung, so wird die Gleichung der Stromlinien:

$$[\xi'^2 + \eta'^2 - 2A'\xi' + C^2]^2 = 4B'(\xi'^2 + \eta'^2).$$

Von den schon wiederholt aufgetretenen Kurven 4. Ordnung unterscheiden sich diese Stromlinien durch das Fehlen des im Endlichen liegenden Doppelpunktes.

Es ist jetzt die Bewegung des Wirbels in der aufgeschnittenen Ebene zu untersuchen. Die Wirbelbahn erhält man durch konforme Abbildung aus der Wirbelbahn in der positiven Halbebene

$$y = b,$$

in Polkoordinaten

$$r \sin \varphi = b.$$

Die Abbildung gibt

$$\rho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} = b.$$

Quadrieren und Einführen rechtwinkliger Koordinaten gibt

$$\eta^2 = 4\xi b^2 + 4b^4.$$

Die Bahnkurve ist also eine Parabel mit der Brennweite  $b^2$ , deren Brennpunkt der Koordinatenanfang und deren Achse die Übergangslinie ist (Fig. 5).

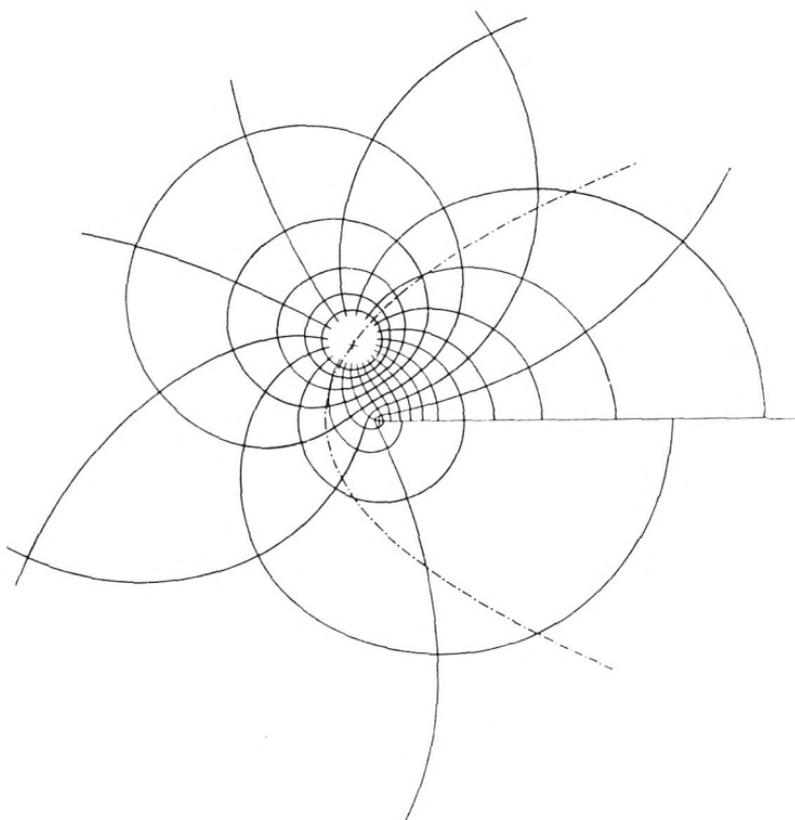


Fig. 5.

Feld eines Wirbelpaares in der Fläche (oberes Blatt)  
und Wirbelbahn.

Um die Differentialgleichungen der Bewegung des Wirbels im oberen Blatt der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche aufzustellen, hat man auf das komplexe Potential dieses Wirbels

$$w = -i\mu \lg(V\zeta - V\gamma)$$

die Gleichung (10) anzuwenden, die folgende Gestalt annimmt:

$$15) \quad \frac{da}{dt} + i \frac{d\beta}{dt} = \left[ \frac{dw}{d\zeta} \right]_{\substack{z=\alpha \\ \eta=-\beta}}.$$

Dabei ist noch darauf zu achten, daß das Spiegelbild  $\alpha, -\beta$  des Punktes  $\alpha, \beta$  im anderen Blatt der aufgeschnittenen Fläche liegt.

Wenn also

$$\alpha + i\beta = \gamma = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}$$

ist, wird

$$\alpha - i\beta = \bar{\gamma} = \varrho_0 e^{i(4\pi - \vartheta_0)} = \varrho_0 e^{-i\vartheta_0}.$$

Dann gibt (15)

$$\frac{da}{dt} + i \frac{d\beta}{dt} = -i\mu \left[ \frac{1}{2V\zeta(V\zeta - V\gamma)} \right]_{z=\bar{\gamma}} = -\frac{i\mu}{2} \frac{1}{\varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}} \left( \varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}} \right)}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist der reelle und imaginäre Teil zu trennen:

$$\frac{da}{dt} + i \frac{d\beta}{dt} = + \frac{\mu}{4\varrho_0} \frac{\cos \frac{\vartheta_0}{2} + i \sin \frac{\vartheta_0}{2}}{\sin \frac{\vartheta_0}{2}},$$

also 15')

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{4\varrho_0} \cotg \frac{\vartheta_0}{2}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu}{4\varrho_0}.$$

Durch Division erhält man

$$\frac{d\beta}{da} = \tg \frac{\vartheta_0}{2},$$

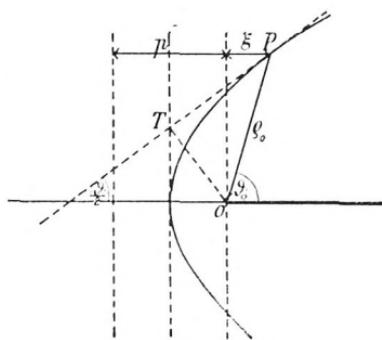


Fig. 6.

also halbiert die Tangente den Winkel des Fahrstrahls vom Anfangspunkt nach dem Berührungspunkt mit einer Parallelen zur Achse. Diese Eigenschaft ist für die Parabel charakteristisch. Wie schon durch konforme Abbildung gefunden, ist die Bahnkurve eine Parabel mit der positiven  $X$  Achse als Achse und dem Anfangspunkt als Brennpunkt.

Die Gleichung der Parabel ist, wenn  $p$  ihren Parameter bedeutet,

$$\varrho_0 = \xi_0 + p,$$

also ist ihr Parameter

$$p = \varrho_0 - \varrho_0 \cos \vartheta_0$$

$$p = 2\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2},$$

eine Gleichung, die wieder als Gleichung der Parabel aufzufassen ist.

Die Geschwindigkeit der Bewegung ist nach (15)

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2} = \frac{\mu}{4\varrho_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Nach der Figur 7 ist

$$\varrho_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} = 0 T,$$

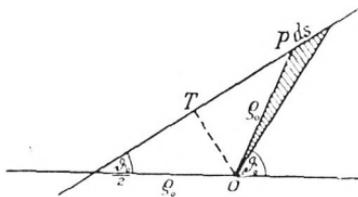


Fig. 7.

also

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{40T}.$$

Die vom Radiusvektor in der Zeit  $dt$  überstrichene Fläche ist

$$dF = \frac{1}{2} 0T \cdot ds = \frac{\mu}{8} dt.$$

Es gilt also der Flächensatz. Die Bewegung vollzieht sich unter dem Einfluß einer fingierten Zentralkraft, die dem Quadrat der Entfernung vom Brennpunkt 0 umgekehrt proportional ist. Durch Vergleich mit dem parabolischen Fall der Planetenbewegung ergibt sich, daß sich der Wirbel wie ein Massenpunkt bewegt, der im Unendlichen die Geschwindigkeit Null hat und von einer zweiten Masse im Verzweigungspunkt angezogen wird, die dem Quadrat der Stärke des bewegten Wirbels proportional ist.

### c) Ein Wirbelpaar in strömender Flüssigkeit.

Man kann nun versuchen, das durch die Gleichungen (8) bzw. (9) gegebene Integral der Bewegungsgleichungen eines Wirbelsystems in der Ebene so abzuändern, daß es für Wirbelsysteme unserer Riemannschen Fläche gilt. Die Funktionen  $\psi_i$  und  $Q$  bleiben unverändert bis auf die Bezeichnung und müssen Stromfunktionen darstellen, die in der Riemannschen Fläche eindeutig sind. An Stelle der Stromfunktionen in  $P$  haben Stromfunktionen von Wirbeln in der Riemannschen Fläche zu treten, die der Gleichung (14) entnommen werden können. Dann wird aus (8):

$$\sum_1^n \mu_i [\Psi]_{z=\alpha_i} - \sum_1^n \sum_1^n \mu_i \mu_k \lg \sqrt{\varrho_i + \varrho_k - 2\varrho_i^{\frac{1}{2}} \varrho_k^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta_i - \vartheta_k}{2}}$$

16)  $\quad \quad \quad = \text{const.}$

Sind nur zwei symmetrische Wirbel vorhanden, so ergibt sich aus (9):

$$\Psi(\alpha, \beta) - \Psi(\alpha, -\beta) + \mu \lg \sqrt{2\varrho_0 - 2\varrho_0 \cos \vartheta_0} = \text{const.}$$

oder

$$2\Psi(\alpha, \beta) + \mu \lg \sqrt{4\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}} = \text{const.}$$

17)  $\quad \quad \quad 2\Psi(\alpha, \beta) + \mu \lg \sqrt{\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}} = \text{const.}$

Ist außer den beiden symmetrischen Wirbeln keine überlagerte Potentialströmung vorhanden, so ist  $\Psi = 0$ , also

$$\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} = \text{const.}$$

Das ist die Gleichung der Parabel, die als Wirbelbahn bereits gefunden ist. Die Symmetrieachse wird von den beiden Halbgeraden der positiven  $\Xi$ -Achse gebildet, die als Übergangslinie angenommen sind, und als natürliche Grenze der Strömung dienen können.

Es lassen sich nun aus (17) auch die Bahnen eines Wirbels in beliebigen Strömungen angeben, die die Übergangslinie als Stromlinie und mithin als natürliche Grenze besitzen.

Eine Strömung in der Ebene um eine feste Halbgerade als Begrenzung wird von den konfokalen Parabeln gebildet, die diese Halbgerade als Achse und ihren Endpunkt als Brennpunkt haben. Die Potentialkurven sind das Orthogonalsystem von konfokalen Parabeln. Für unseren Zweck kommt alles darauf an, diese Parabelströmung als Strömung in der zwei-blätterigen Fläche aufzufassen.

Eine Doppelquelle von der Stärke 1 im Anfangspunkt der Ebene mit dem komplexen Potential

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$$

geht durch die Abbildung  $z = \sqrt{\xi}$  in eine Doppelquelle über, die in dem im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche liegt. Dann wird

$$w = \varphi + i\psi = \frac{1}{\sqrt{\xi + i\eta}},$$

also

$$(\varphi + i\psi)^2(\xi + i\eta) = 1.$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei reellen Gleichungen

$$(\varphi^2 - \psi^2)\xi - 2\varphi\psi\eta = 1$$

$$(\varphi^2 - \psi^2)\eta + 2\varphi\psi\xi = 0.$$

Durch Elimination von  $\psi$  bzw.  $\varphi$  erhält man die Stromlinien und Potentialkurven

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{(\xi^2 + \eta^2)\xi}{\varphi^2} - \frac{\eta^2}{4\varphi^4} = 0$$

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{(\xi^2 + \eta^2)\xi}{\psi^2} - \frac{\eta^2}{4\psi^4} = 0.$$

Jedes dieser beiden Systeme besteht aus ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven, die zur  $\Xi$  Achse symmetrisch sind; sie gehen durch Spiegelung an der  $H$  Achse ineinander über. Die Kurven sind Kardioiden; sie liegen in beiden Blättern kongruent übereinander. Die Flüssigkeit strömt vom Anfangspunkt in einen Blatt parallel der positiven  $\Xi$  Achse aus, im anderen Blatt in umgekehrter Richtung ebenfalls parallel der positiven  $\Xi$  Achse zurück. Über die Lage der Übergangslinie ist zunächst nichts festgesetzt.

In der Figur 8 ist der Verlauf einiger Stromlinien gezeichnet. Auch die positive  $\Xi$  Achse ist Stromlinie in beiden Blättern. Nimmt man sie als natürliche Grenze der Strömung, so zerfällt die Strömung in zwei Strömungen, deren jede eine aufgeschnittene Ebene erfüllt. Im oberen Blatt geht die

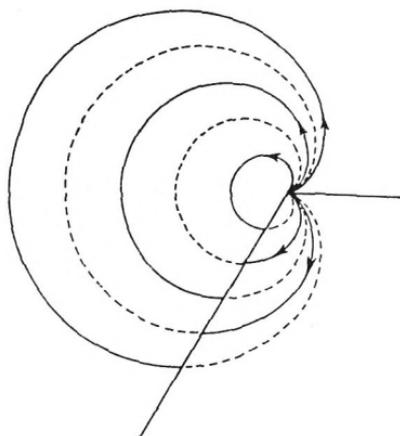


Fig. 8.

Strömung im 1. Quadranten vom Nullpunkt aus und im 4. Quadranten zurück; im unteren Blatt ist nur die Richtung der Bewegung umgekehrt. Die Potentialkurven gehen beim Überschreiten der positiven  $\varepsilon$  Achse auf das andere Blatt über, enden also, wenn man nur die Strömung in einem Blatt betrachtet, an der positiven  $\varepsilon$  Achse, die sie senkrecht treffen.

Figur 9 gibt ein Bild der Strömung im oberen Blatt.

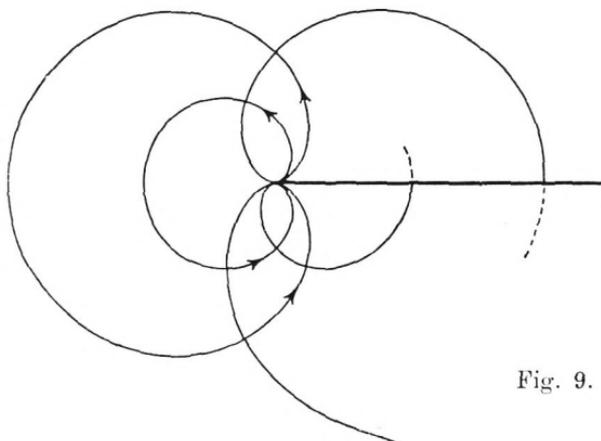


Fig. 9.

Nimmt man den Anfangspunkt als Zentrum einer Inversion, so erhält man eine Strömung aus einer Doppelquelle, die im unendlich fernen Verzweigungspunkt einer zweiblätterigen Riemannschen Fläche liegt. Der zweite Verzweigungspunkt ist der Anfangspunkt; die positive  $\Xi$  Achse wird von der Strömung nicht überschritten, sie wird als Übergangslinie und als natürliche Grenze der Bewegung verwendet; die Potentialkurven in der aufgeschnittenen Ebene enden an der Übergangslinie senkrecht.

Das komplexe Potential der Strömung ist

$$w = \varphi + i\psi = \sqrt{\xi + i\eta} = \sqrt{\zeta}.$$

Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles entstehen die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}\varphi^2 - \psi^2 &= \xi \\ 2\varphi\psi &= \eta\end{aligned}$$

und durch Elimination von  $\psi$  bzw.  $\varphi$

$$\begin{aligned}\eta^2 + 4\varphi^2\xi - 4\varphi^4 &= 0 \\ \eta^2 - 4\psi^2\xi - 4\psi^4 &= 0.\end{aligned}$$

Die Stromlinien sind Parabeln, die die positive  $\Xi$  Achse zur Achse haben; die Potentialkurven Halbparabeln mit der negativen  $\Xi$  Achse als Achse. Das ganze System ist konfokal und hat den Anfangspunkt als gemeinsamen Brennpunkt (Fig. 10).

Aus dem komplexen Potential

$$w = \varphi + i\psi = \sqrt{\zeta}$$

erhält man durch Einführung von Polarkoordinaten

$$w = \varphi + i\psi = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

daraus folgt

$$\psi = \varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

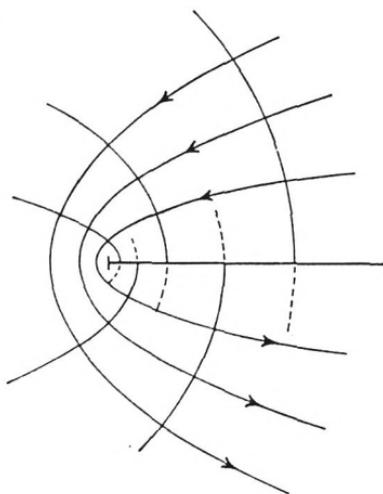


Fig. 10.

Dieser Ausdruck ist, mit der Quellenstärke  $\alpha$  multipliziert, an Stelle von  $\Psi(\alpha, \beta)$  in (17) einzusetzen:

$$2\alpha \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta_0}{2} + \mu \lg \left( \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta_0}{2} \right) = \text{const.},$$

also ist auch

$$18) \quad \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta_0}{2} = \text{const.}$$

Das ist dieselbe Parabel, auf der sich auch ein Wirbel in sonst ruhender Strömung um die positive  $\Xi$ -Achse als unendlich langes Hindernis bewegt. Die Geschwindigkeit des Wirbels in seiner Bahn setzt sich aus zwei Summanden zusammen, nämlich aus der Geschwindigkeit des Wirbels in sonst ruhender Flüssigkeit und aus der Geschwindigkeit der Parabelströmung am Orte des Wirbels.

Der Wirbel bewegt sich also auf einer Stromlinie der ungestörten Parabelströmung; von seiner Stärke und seiner Umlaufsrichtung hängt seine Relativgeschwindigkeit an jedem Orte ab. Er kann sich mit der Strömung bewegen oder ihr entgegenlaufen (Fig. 11a und 11b).

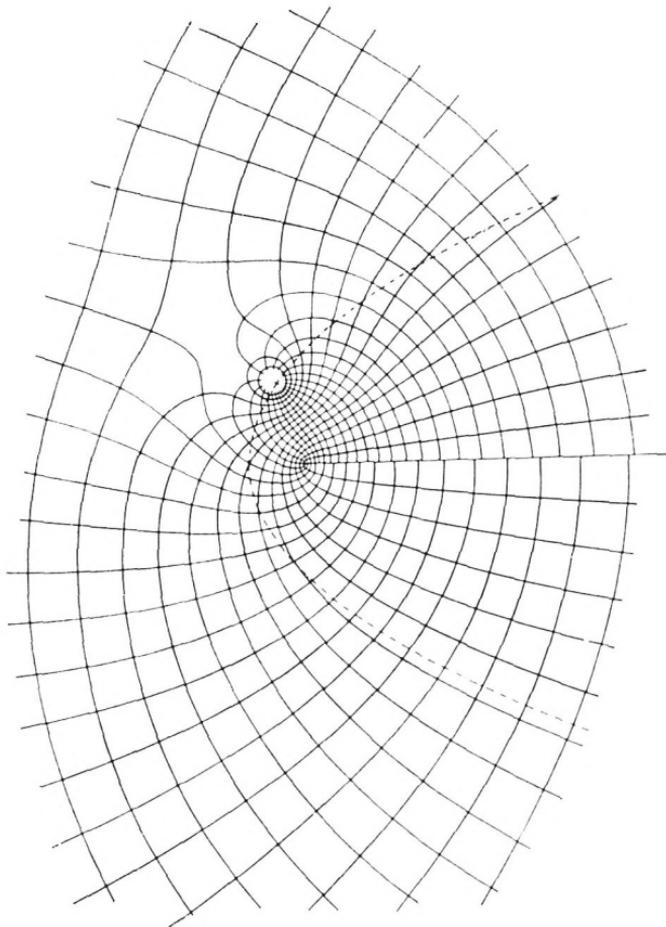


Fig. 11 a.

Fälle von Wirbelbewegung in der zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit zwei im Endlichen liegenden Verzweigungspunkten.

a) Ein Wirbel in ruhender Flüssigkeit.

Wenn man die Veränderliche  $\zeta$  auf einer zweiblätterigen Riemannschen Fläche ausbreitet, deren Verzweigungspunkte an den Stellen  $\zeta = \pm 1$  liegen, so werden die beiden Funktionen

$$z_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}},$$

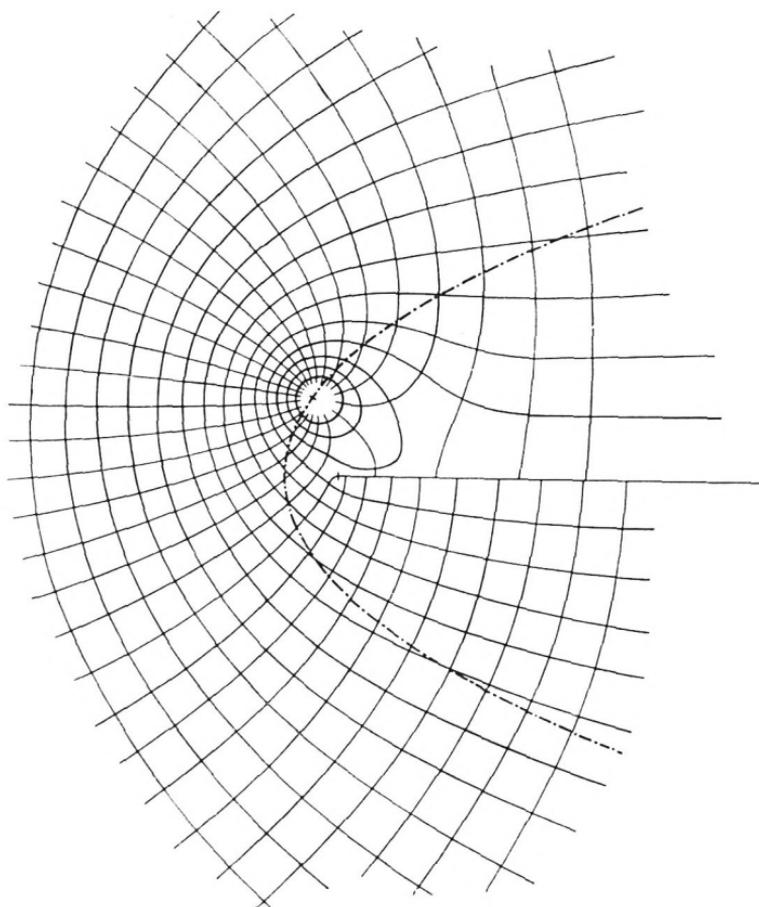


Fig. 11b.

die durch die Gleichung

$$z_1 = (\zeta - 1)z_2$$

als „Irrationatitäten derselben Klasse“ gekennzeichnet sind, eindeutige Funktionen des Ortes.

Die Funktion  $z_1$  ergibt  $\zeta$  nicht als einwertige Funktion von  $z_1$ , wäre also für unsere Zwecke nur brauchbar, wenn man auch die Werte von  $z_1$  in einer zweiblätterigen Fläche ausbreiten würde. Die zweite Abbildung ist ein-eindeutig.

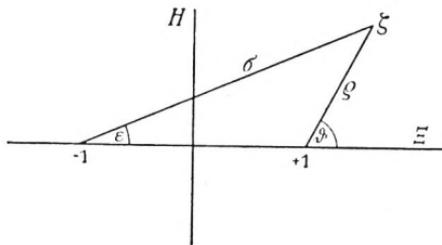


Fig. 12.

Unsere Abbildungsformel sei also

$$z = \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}}; \text{ aufgelöst } \zeta = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}.$$

Führt man in der Ebene Polarkoordinaten ein:

$$z = r e^{i\varphi},$$

in der Fläche 2 Systeme von Polarkoordinaten mit den Verzweigungspunkten als Pole (Fig. 12):

$$\begin{aligned} 19) \quad \zeta - 1 &= \rho e^{i\vartheta} \\ \zeta + 1 &= \sigma e^{i\varepsilon}, \end{aligned}$$

so ist die Abbildungsformel

$$19a) \quad r e^{i\varphi} = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varepsilon}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}}},$$

also

$$19b) \quad r = \left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \varphi = \frac{\varepsilon - \vartheta}{2}.$$

Von den 4 Größen  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vartheta$  genügen 2 zur Bestimmung eines Punktes; die Größen  $\rho$  und  $\sigma$  indessen nicht eindeutig, da sie nicht zwischen beiden Blättern unterscheiden lassen.  $\varepsilon$  und  $\vartheta$  liegen zwischen 0 und  $4\pi$  oder zwischen  $-2\pi$  und  $+2\pi$  und ändern sich um  $2\pi$  beim Umlauf um den betreffenden Pol. Über die Lage der Übergangslinie wird zunächst keine Festsetzung getroffen.

Man kann die Abbildung

$$z = \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}}$$

in 2 Schritte zerlegen:

$$z = \sqrt{z'}; \quad z' = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}.$$

Die erste dieser beiden Abbildungen gibt die eben ausführlich behandelte Abbildung der Ebene in eine zweiblättrige Fläche mit einem Verzweigungspunkt im Nullpunkt und einem zweiten im unendlich fernen Punkt. Die zweite ist der Ausdruck einer Kreisverwandtschaft in dieser Fläche, also von Ähnlichkeitstransformationen abgesehen einer Inversion. Das Zentrum der Inversion ist der Punkt  $\zeta = 1$ , wo das Bild des unendlich fernen Verzweigungspunktes entsteht; der zweite Verzweigungspunkt fällt nach  $\zeta = -1$ .

Bildet man einen Wirbel der Ebene ab, so ist zu bemerken, daß der unendliche ferne Punkt der Ebene alle geometrischen Eigenschaften eines Wirbelpunktes hat; die Stromlinien umschließen ihn sämtlich, die Potentialkurven gehen durch ihn hindurch. In unserer zweiblättrigen Fläche gehen also alle Potentialkurven durch den Verzweigungspunkt  $\zeta = 1$ ; alle Stromlinien umkreisen ihn und zwar in 2 Umläufen. Es entsteht dort ein fester Wirbel, der gleichzeitig mit dem beweglichen Bild des Wirbels der Ebene auftritt. Die gestaltlichen Verhältnisse der Strom- und Potentialkurven würde man am besten in der Weise diskutieren, daß man die Strom- und Potentialkurven eines Wirbels in der Fläche mit einem unendlich fernen Verzweigungspunkt einer geeigneten Inversion unterwirft.

Aus dem komplexen Potential eines Wirbels der Ebene

$$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg(z - c)$$

geht durch die Abbildung hervor (Fig. 13a oberes Blatt, b unteres Blatt):

$$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg\left(\sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}} - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}\right).$$

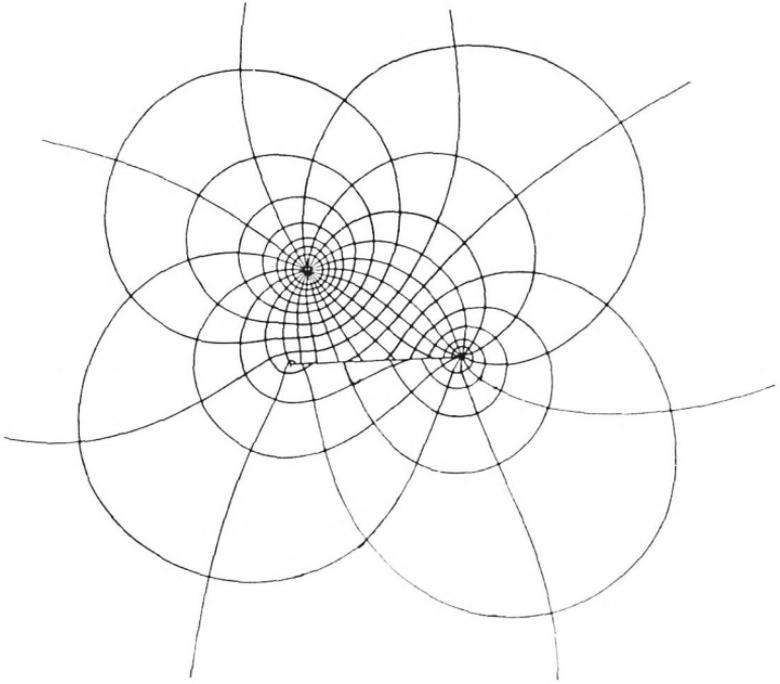


Fig. 13 a.

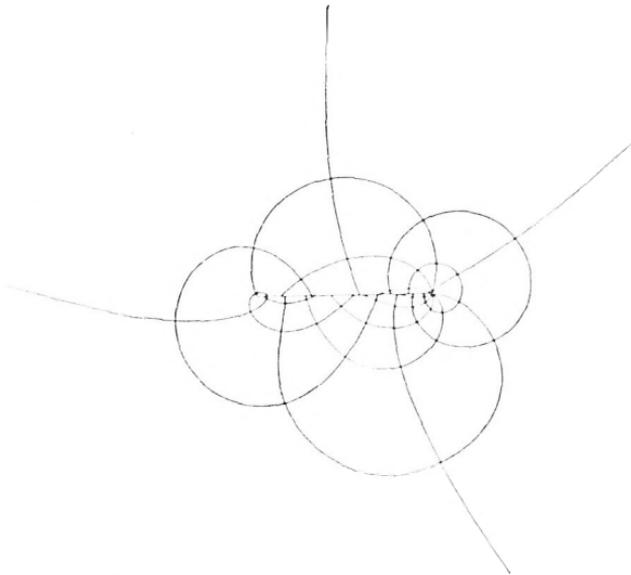


Fig. 13 b.

$w$  hat in der Fläche zwei singuläre Stellen, die den Werten 0 und  $\infty$  des Logarithmand entsprechen, nämlich  $\zeta = \gamma$  und  $\zeta = 1$ . Die erste singuläre Stelle liegt nur im einen Blatt, im anderen ist die Stelle regulär; die zweite gibt den schon erwähnten festen Wirbel mit doppeltem Umlauf im einen Verzweigungspunkt. Der unendlich ferne Punkt ist regulär.

Formt man um:

$$w = -i\mu \lg \frac{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma-1}},$$

so kann man den festen Wirbel  $i\mu \lg \sqrt{\zeta-1}$  und eine Konstante abspalten und erhält

$$20) \quad w' = -i\mu \lg [\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}]$$

als Ausdruck für den elementaren Wirbel in der zwei-blätterigen Fläche an der Stelle  $\zeta = \gamma$  des einen Blattes. Die zweite singuläre Stelle von  $w'$  ist  $\zeta = \infty$ .

#### b) Ein Wirbelpaar in ruhender Flüssigkeit.

Im folgenden kommen nur elementare Wirbel in Betracht. Führt man bipolare Koordinaten ein und unterscheidet die Polarkoordinaten des Wirbelpunktes  $\gamma$  durch den Index 0 von denen eines Punktes  $\zeta$  der Strömung, so ist

$$21) \quad w' = -i\mu \lg \left[ \sigma^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varepsilon}{2}} \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varepsilon_0}{2}} \right].$$

Nun soll die Bewegung eines zur  $\Xi$ -Achse symmetrischen Wirbelpaares untersucht werden. Das Spiegelbild  $\bar{w}'$  des Wirbels  $w'$  kann im selben Blatt liegen; dann wird sich  $\bar{w}'$  von  $w'$  nur durch das Vorzeichen von  $\varepsilon_0$  und  $\vartheta_0$  unterscheiden. Liegt das Spiegelbild im anderen Blatt, so muß man vom ersten Spiegelbild aus einen Weg beschreiben, der den einen Verzweigungspunkt umkreist; es wird also einer der Winkel  $\varepsilon_0$  oder  $\vartheta_0$  um  $2\pi$  verändert, oder das Vorzeichen eines der beiden Ausdrücke  $e^{-i\frac{\varepsilon_0}{2}}$  und  $e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}}$  vertauscht.

Um die Differentialgleichung der Bahn des ersten Wirbels aufzustellen, hat man nach (10)

$$\frac{d\alpha}{dt} + i \frac{d\beta}{dt} = \left[ \frac{dw'}{d\zeta} \right]_{\substack{\xi=\alpha \\ \eta=-\beta}}$$

zu setzen. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{dw'}{d\zeta} &= -i\mu \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\zeta+1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\zeta-1}}}{\sqrt{\zeta+1} \sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1} \sqrt{\gamma+1}} \\ &= -\frac{i\mu}{2\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\zeta-1}} \cdot \frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Die Einführung bipolarer Koordinaten gibt

$$\frac{dw'}{d\zeta} = -\frac{i\mu}{2\sqrt{\varrho\sigma}e^{i\frac{\varepsilon+\vartheta}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\varrho\varrho_0}e^{i\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}} - \sqrt{\sigma\sigma_0}e^{i\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{2}}}{\sqrt{\sigma\varrho_0}e^{i\frac{\varepsilon+\vartheta_0}{2}} - \sqrt{\varrho\sigma_0}e^{i\frac{\vartheta+\varepsilon_0}{2}}}.$$

Liegt das Spiegelbild im selben Blatt, so wird

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dw'}{d\zeta} \right]_{\substack{\xi=\alpha \\ \eta=-\beta}} &= -\frac{i\mu}{2\sqrt{\varrho_0\sigma_0}e^{-i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}} \frac{\varrho_0 - \sigma_0}{\left( e^{i\frac{-\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}} - e^{i\frac{-\vartheta_0+\varepsilon_0}{2}} \right)} \\ &= \frac{\mu(\varrho_0 - \sigma_0)e^{i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}}{4\varrho_0\sigma_0 \sin \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} \end{aligned}$$

im anderen Fall wird

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dw'}{d\zeta} \right]_{\substack{\xi=\alpha \\ \eta=-\beta}} &= \frac{i\mu}{2\sqrt{\varrho_0\sigma_0}e^{-i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}} \frac{-(\varrho_0 + \sigma_0)}{\left( e^{i\frac{-\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}} + e^{i\frac{-\vartheta_0+\varepsilon_0}{2}} \right)} \\ &= \frac{-i\mu(\varrho_0 + \sigma_0)e^{i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}}{4\varrho_0\sigma_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung der Bahnkurve wird im ersten Fall

$$\frac{da}{dt} + i \frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu(\varrho_0 - \sigma_0)}{4\varrho_0\sigma_0 \sin \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} \left[ \cos \frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2} + i \sin \frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2} \right],$$

also

$$\frac{d\beta}{da} = \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2}.$$

Die Tangente der Kurve halbiert also den Winkel der beiden Fahrstrahlen. Die Wirbelbahn ist ein Ast einer Hyperbel, die die beiden Verzweigungspunkte zu Brennpunkten hat. Die Übergangslinie, die als natürliche Grenze der Strömung dienen kann und längs deren die Riemannsche Fläche in zwei Ebenen zerschnitten wird, verbindet die Verzweigungspunkte geradlinig durchs Unendliche. Durch die zwischen  $-1$  und  $+1$  bleibende Lücke bewegt sich der Wirbel hindurch (Fig. 14).

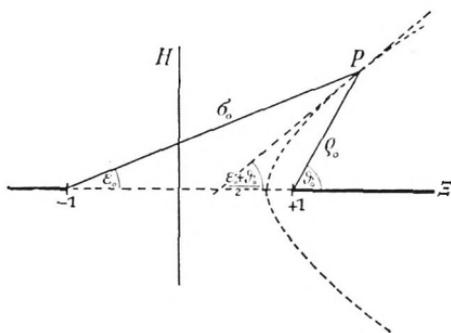


Fig. 14.

Im zweiten Fall ist

$$\frac{da}{dt} + i \frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu(\varrho_0 + \sigma_0)}{4\varrho_0\sigma_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} \left[ \sin \frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2} - i \cos \frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2} \right],$$

also

$$\frac{d\beta}{da} = -\operatorname{cotg} \frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2}.$$

Die Tangente der Bahnkurve halbiert den Außenwinkel der Fahrstrahlen. Die Wirbelbahn ist eine Ellipse, die die beiden Verzweigungspunkte zu Brennpunkten hat. Natürliche Grenze der Strömung ist die von  $-1$  nach  $+1$  geradlinig verlaufende Übergangslinie. Um dieses Hindernis herum kreist der Wirbel (Fig. 15 und 16).

Für den zeitlichen Verlauf der Bewegung gilt ein dem Flächensatz verwandtes Gesetz. Der Beweis sei nur für den zweiten Fall erbracht. Die Größe der Geschwindigkeit ist

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\mu(\varrho_0 + \sigma_0)}{4\varrho_0\sigma_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} = \frac{\mu}{4} \left[ \frac{1}{\sigma_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} + \frac{1}{\varrho_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} \right].$$

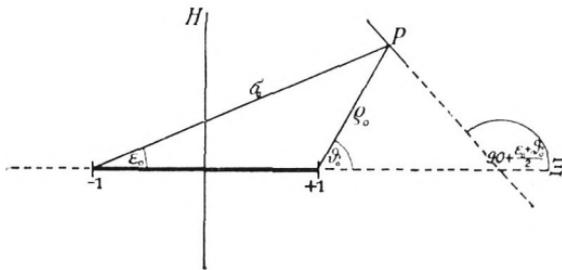


Fig. 15.

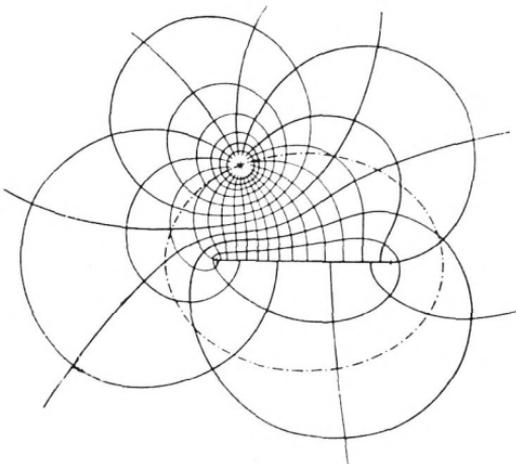


Fig. 16.

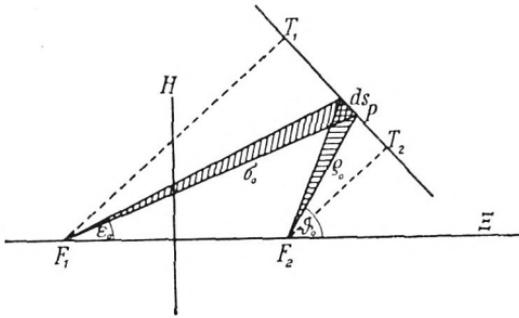


Fig. 17.

Fällt man von den Brennpunkten Lote  $F_1 T_1$  und  $F_2 T_2$  auf eine Tangente, so ist (Fig. 17)

$$F_1 T_1 = \varrho_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}; \quad F_2 T_2 = \sigma_0 \cos \frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2},$$

also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{4} \left[ \frac{1}{F_1 T_1} + \frac{1}{F_2 T_2} \right].$$

Nun ist  $\frac{F_1 T_1 \cdot ds}{2}$  der Inhalt  $dJ_1$  des von dem Fahrstrahl  $F_1 P$  in der Zeit  $dt$  überstrichenen Dreiecks; ebenso  $\frac{F_2 T_2 \cdot ds}{2} = dJ_2$ ; also

$$\frac{1}{dt} = \frac{\mu}{8} \left[ \frac{1}{dJ_1} + \frac{1}{dJ_2} \right].$$

Rückt der eine Brennpunkt ins Unendliche, so wird die Bahn eine Parabel;  $\frac{1}{dJ_2}$  verschwindet gegenüber  $\frac{1}{dJ_1}$  und aus der obigen Gleichung geht der Flächensatz

$$dJ_1 = \frac{\mu}{8} dt$$

hervor, dessen Gültigkeit für diesen Fall schon bewiesen ist.

## c) Ein Wirbelpaar in strömender Flüssigkeit.

Die konforme Abbildung hätte in diesem Fall die Wirbelbahn nicht ergeben wegen des festen Wirbels an der Stelle  $\zeta = 1$ , der bei der Abbildung eines beweglichen Wirbels der Ebene in die Fläche auftritt; dagegen kann man die Wirbelbahn erhalten, wenn man das für die Ebene aufgestellte Integral (8) bzw. (9) für die zweiblättrige Fläche mit 2 Verzweigungspunkten umformt. Diese Methode führt übrigens weiter als die direkte Behandlung der Differentialgleichungen der Bewegung.

Zunächst wird die Stromfunktion eines Elementarwirbels der zweiblättrigen Fläche an Stelle der Stromfunktion eines Wirbels in der Ebene zu setzen sein. Nun ist nach (21)

$$w' = \varphi' + i\psi' = -i\mu \lg \left[ \left( \sqrt{\sigma\varrho_0} \cos \frac{\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0} \cos \frac{\vartheta + \varepsilon_0}{2} \right) + i \left( \sqrt{\sigma\varrho_0} \sin \frac{\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0} \sin \frac{\vartheta + \varepsilon_0}{2} \right) \right].$$

Also

$$\begin{aligned} \psi' &= -\mu \lg \sqrt{\left( \sqrt{\sigma\varrho_0} \cos \frac{\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0} \cos \frac{\vartheta + \varepsilon_0}{2} \right)^2 + \left( \sqrt{\sigma\varrho_0} \sin \frac{\varepsilon + \vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0} \sin \frac{\vartheta + \varepsilon_0}{2} \right)^2} \\ \psi' &= -\frac{\mu}{2} \lg \left[ \sigma\varrho_0 + \varrho\sigma_0 - 2\sqrt{\varrho\sigma\varrho_0\sigma_0} \cos \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) - (\vartheta - \vartheta_0)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Dann erhält man an Stelle des Integrales (8)

$$\begin{aligned} 22) \quad & \sum_1^n \mu_i [Y]_{\substack{\zeta=\alpha_i \\ \eta=\beta_i}} \\ & - \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \mu_i \mu_k \lg \left[ \sigma_i \varrho_k + \varrho_i \sigma_k - 2\sqrt{\varrho_i \varrho_k \sigma_i \sigma_k} \cos \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_k) - (\vartheta_i - \vartheta_k)}{2} \right] \\ & = \text{const.} \end{aligned}$$

Ist nur ein Wirbelpaar vorhanden, so ist

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \varrho_2 = \varrho, & \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma \\ \vartheta_1 &= -\vartheta_2 = \vartheta \\ \varepsilon_1 &= -\varepsilon_2 = \varepsilon & \text{oder} & \varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = -\varepsilon + 2\pi \end{aligned}$$

je nach dem Blatt, in dem das Spiegelbild des ersten Wirbels liegt.

Also tritt an Stelle von (9)

$$\begin{cases} 2\Psi(a, \beta) - \frac{\mu}{2} \lg 2\sigma\varrho(1 - \cos(\varepsilon - \vartheta)) = \text{const.} \\ \text{oder} \left\{ 2\Psi(a, \beta) - \frac{\mu}{2} \lg 2\sigma\varrho(1 + \cos(\varepsilon - \vartheta)) = \text{const.}, \right. \end{cases}$$

nach einer Umformung ergibt sich als Gleichung der Wirbelbahn

$$\begin{cases} 4\Psi(a, \beta) - \mu \lg \sigma\varrho \sin^2 \frac{\varepsilon - \vartheta}{2} = \text{const.} \\ \text{oder} \left\{ 4\Psi(a, \beta) - \mu \lg \sigma\varrho \cos^2 \frac{\varepsilon - \vartheta}{2} = \text{const.} \right. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind 2 von den 4 Größen  $\sigma$ ,  $\varrho$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vartheta$ , etwa  $\varepsilon$  und  $\vartheta$ , durch die beiden anderen auszudrücken.

Aus der Figur 12 erhält man

$$\begin{array}{l|l} \varrho \sin \vartheta = \sigma \sin \varepsilon & \cdot \sin \varepsilon \\ \varrho \cos \vartheta = \sigma \cos \varepsilon - 2 & \cdot \cos \varepsilon. \end{array}$$

Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich

$$\varrho^2 = \sigma^2 - 4\sigma \cos \varepsilon + 4,$$

also

$$\cos \varepsilon = \frac{\sigma^2 - \varrho^2 + 4}{4\sigma}.$$

Andererseits erhält man durch Addieren nach Multiplikation mit  $\sin \varepsilon$  und  $\cos \varepsilon$

$$\varrho \cos(\varepsilon - \vartheta) + 2 \cos \varepsilon = \sigma,$$

also ist

$$\cos(\varepsilon - \vartheta) = \frac{\varrho^2 + \sigma^2 - 4}{2\varrho\sigma},$$

folglich

$$2 \sin^2 \frac{\varepsilon - \vartheta}{2} = \frac{4 - (\varrho - \sigma)^2}{2 \varrho \sigma}$$

$$2 \cos^2 \frac{\varepsilon - \vartheta}{2} = \frac{-4 + (\varrho + \sigma)^2}{2 \varrho \sigma}.$$

Die Gleichung der Wirbelbahn wird also

$$23) \quad \begin{cases} 4\Psi(\alpha, \beta) - \mu \lg(4 - (\varrho - \sigma)^2) = \text{const.} \\ \text{oder } 4\Psi(\alpha, \beta) - \mu \lg(-4 + (\varrho + \sigma)^2) = \text{const.} \end{cases}$$

Damit ist die Bahn eines Wirbelpaares in der zwei-blätterigen Fläche gefunden, wenn sich die Flüssigkeit in beliebiger symmetrischer Strömung befindet. Auf die einfache Ebene übertragen, gibt die erste der Gleichungen (23) die Bewegung eines Wirbels in einer beliebigen Strömung, die durch eine Lücke in einer unendlich ausgedehnten Geraden fließt; die zweite Gleichung gibt die Bahn eines Wirbels in jeder Strömung, die ein geradliniges Hindernis von endlicher Länge umfließt.

Ist insbesondere keine Potentialströmung vorhanden, so ist

$$24) \quad \varrho - \sigma = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \varrho + \sigma = \text{const.}$$

Die Wirbelbahn ist einer der schon bekannten Kegelschnitte, dessen Brennpunkte die Enden des Hindernisses sind.

Eine der bekanntesten Strömungen durch eine Lücke oder um ein Hindernis ist die Strömung in konfokalen Kegelschnitten, deren Brennpunkte in die Enden des Hindernisses fallen. Da für einen dieser Kegelschnitte  $\varrho \pm \sigma$  denselben konstanten Wert hat wie für die Wirbelbahn in ruhender Flüssigkeit, und also  $\Psi(\alpha, \beta)$  und die Stromfunktion des Wirbels gleichzeitig konstant werden, folgt, daß sich auch in dieser Strömung der Wirbel auf einem der konfokalen Kegelschnitte bewegt, obwohl er die ganze Strömung stört und ihr gegenüber eine Relativgeschwindigkeit besitzt.

Auch für jede andere bekannte Strömung, die den Grenzbedingungen genügt, z. B. für die Strömung einer aus dem unendlichen kommenden Flüssigkeit um eine schiefgestellte Platte, geben die Gleichungen (23) die Bahn eines sich in der Strömung bewegenden Wirbels in geschlossener Form.

Wenn man zu den beiden Wirbeln in der Riemannschen Fläche noch ihre Spiegelbilder zur  $H$  Achse hinzunimmt, so erhält man in jedem Blatt ein Wirbelpaar. Läßt man die Übergangslinie durch den unendlich fernen Punkt gehen, so bewegt sich das Wirbelpaar durch eine Lücke in einem unendlich langen Hindernis; ist die Verzweigungslinie die direkte Verbindung der beiden Verzweigungspunkte, so bewegen sich die beiden Wirbel symmetrisch um beide Seiten des Hindernisses. Die Bahnen der Wirbel, die man hinter einem eingetauchten Ruderblatt beobachtet, werden mit einem Teil der Bahnen dieses Wirbelpaares übereinstimmen, wenn auch die interessanteste Frage, die der Ablösung des Wirbelpaares, unserer Art der Betrachtung nicht zugänglich ist.

Die  $H$  Achse ist Stromlinie und kann als Grenze der Bewegung dienen. Man erhält dann die Bewegung eines Wirbels in der Halbebene, der sich im ersten Fall durch eine Lücke zwischen der Grenzgeraden und einem zu ihr senkrechten, bis ins Unendliche reichenden Hindernis bewegt, im zweiten Fall um ein von der Grenzgeraden senkrecht in die Flüssigkeit ragendes Hindernis.

Im ersten Fall sind die Bestimmungsstücke der 4 Wirbel in der Fläche:

	$\mu_i$	$\varrho_i$	$\sigma_i$	$\vartheta_i$	$\varepsilon_i$	$(\vartheta - \varepsilon)_i$
I.	$\mu$	$\varrho$	$\sigma$	$\vartheta$	$\varepsilon$	$\vartheta - \varepsilon$
II.	$-\mu$	$\varrho$	$\sigma$	$-\vartheta$	$-\varepsilon$	$-(\vartheta - \varepsilon)$
III.	$-\mu$	$\sigma$	$\varrho$	$\pi - \varepsilon$	$\pi - \vartheta$	$\vartheta - \varepsilon$
IV.	$\mu$	$\sigma$	$\varrho$	$\pi + \varepsilon$	$\pi + \vartheta$	$-(\vartheta - \varepsilon)$ .

In der Figur 18 sind die Wege eingezeichnet, auf denen man vom ersten Wirbelpunkt aus die anderen erreichen kann. In Gleichung (22), die die Wirbelbahnen gibt, treten dann

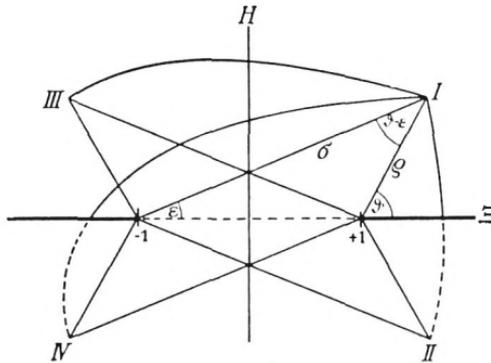


Fig. 18.

4 Summanden auf, welche Stromfunktionen der überlagerten Potentialströmung, und 6 Summanden, welche Stromfunktionen der Wirbel sind. Die überlagerte Strömung soll symmetrisch zur Übergangslinie und zur  $H$  Achse sein; dann ergibt sich:

$$4\mu\Psi(a, \beta) + \frac{\mu^2}{2} \lg \frac{(2\rho\sigma - 2\rho\sigma \cos(\vartheta - \varepsilon))^2 (\rho^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma \cos 0)^2}{(\rho^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma \cos(\vartheta - \varepsilon))^2} = \text{const.}$$

Nun ist aber

$$2\rho\sigma \cos(\vartheta - \varepsilon) = \rho^2 + \sigma^2 - 4,$$

also

$$4\Psi(a, \beta) + \mu \lg \frac{[4 - (\rho - \sigma)^2](\rho - \sigma)^2}{4} = \text{const.}$$

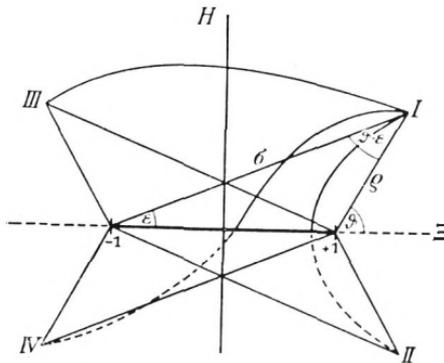


Fig. 19.

Ist  $\Psi = 0$  angenommen, so ist auch

$$\varrho - \sigma = \text{const.},$$

d. h. in einer sonst ruhenden Flüssigkeit ist die Wirbelbahn ein Ast einer der konfokalen Hyperbeln.

Interessanter ist der zweite Fall. Die Bestimmungsstücke der 4 Wirbel sind (Fig. 19)

	$\mu_i$	$\varrho_i$	$\sigma_i$	$\vartheta_i$	$\varepsilon_i$	$(\vartheta - \varepsilon)_i$
I.	$\mu$	$\varrho$	$\sigma$	$\vartheta$	$\varepsilon$	$\vartheta - \varepsilon$
II.	$-\mu$	$\varrho$	$\sigma$	$2\pi - \vartheta$	$-\varepsilon$	$2\pi - (\vartheta - \varepsilon)$
III.	$-\mu$	$\sigma$	$\varrho$	$\pi - \varepsilon$	$\pi - \vartheta$	$\vartheta - \varepsilon$
IV.	$\mu$	$\sigma$	$\varrho$	$\pi + \varepsilon$	$\vartheta - \pi$	$2\pi - (\vartheta - \varepsilon)$

Die Gleichung der Bahnkurve wird

$$4\mu\Psi(\alpha, \beta) + \frac{\mu^2}{2} \lg \frac{(2\varrho\sigma + 2\varrho\sigma \cos(\vartheta - \varepsilon))^2 (\varrho^2 + \sigma^2 - 2\varrho\sigma \cos 0)^2}{(\varrho^2 + \sigma^2 + 2\varrho\sigma \cos(\vartheta - \varepsilon))^2} = \text{const.}$$

oder

$$4\Psi(\alpha, \beta) + \mu \lg \frac{[(\varrho + \sigma)^2 - 4](\varrho - \sigma)^2}{\varrho^2 + \sigma^2 - 2} = \text{const.}$$

Ist  $\Psi(\alpha, \beta) = 0$ , so wird die Bahnkurve durch die Gleichung

$$25) \quad \frac{[(\varrho + \sigma)^2 - 4](\varrho - \sigma)^2}{\varrho^2 + \sigma^2 - 2} = \text{const.} = 4k$$

gegeben. In rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich hieraus

$$25a) \quad F = \xi^4(k^2 - 2k) + 2\xi^2\eta^2(k^2 - 2) + \eta^4(k^2 + 2k) + 2k(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Von den 4 Asymptoten dieser Kurve 4. Ordnung, die zu beiden Achsen symmetrisch liegt, sind 2 für jeden Wert von  $k$  imaginär; auch die anderen 2 können es sein. Im Anfangspunkt hat die Kurve einen singulären Punkt, der aber, weil dort

$$F_{11} = 4k, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 4k$$

ist, isoliert ist:

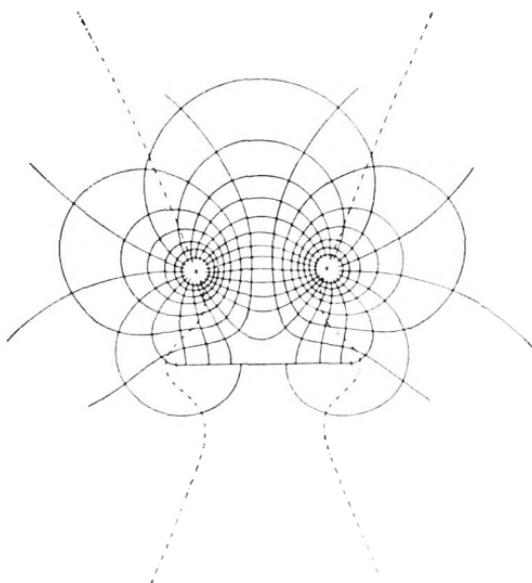


Fig. 20.

In Polarkoordinaten  $\varrho$ ,  $\varphi$ , deren Pol der Anfangspunkt ist, wird die Wirbelbahn

$$25b) \quad F = \varrho^2((k - \cos 2\vartheta)^2 - 1) + 2k = 0.$$

Die Gleichungen (25a) und (b) zeigen, daß durch jeden Punkt der Ebene zwei Kurven  $F$  hindurchgehen, von denen nur die eine Wirbelbahn sein kann; die zweite ist durch das Rationalmachen der Gleichung (25) hereingekommen. Für die Richtung der Asymptoten gibt (25b):

$$\begin{aligned} (k - \cos 2\vartheta)^2 - 1 &= 0 \\ \cos 2\vartheta &= k \pm 1. \end{aligned}$$

Also ist nur, wenn  $|k| < 2$  ist, ein Paar reeller Asymptoten vorhanden. Die Gestalt der Bahnkurve ist aus Fig. 20 ersichtlich<sup>1)</sup>; die beiden Wirbel nähern sich einander nach dem

<sup>1)</sup> Durch ein Versehen ist in Figur 20 die  $H$  Achse, die Stromlinie ist, weggeblieben.

Umlaufen des Hindernisses rasch, um sich dann wieder langsam voneinander zu entfernen.

Da auch die Strömung aus dem Unendlichen um ein Hindernis bekannt ist, oder die Strömung, welche die Bewegung des Hindernisses in ruhender Flüssigkeit hervorbringt<sup>1)</sup>, sind auch die Bahnen der Wirbel um das Hindernis in strömender Flüssigkeit oder um ein bewegtes Hindernis in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit der Diskussion ohne weiteres zugänglich.

---

<sup>1)</sup> Lamb, Hydrodynamik, S. 101.

---

### Bemerkung.

Für die Konstruktion der Strömungsfelder ist die Methode der konformen Abbildung verwendet. Einer Schar konzentrischer Kreise um den Nullpunkt samt den Radien, die die Ebene in unendlich kleine Quadrate teilen, entspricht in der zweiblätterigen Fläche ein ebensolches System mit veränderten Abständen oder zwei orthogonale Kreisbüschel, je nachdem der eine Verzweigungspunkt im Unendlichen oder beide im Endlichen liegen. Hiedurch sind die Ebene und die Fläche punktweise aufeinander bezogen. Legt man nun auf das Kreisnetz in der Ebene ein auf Pauspapier gezeichnetes ebenes Strömungsfeld auf, so kann man auf einem zweiten Blatt Pauspapier über dem Kreisnetz in der Fläche das Bild des Strömungsfeldes in der Fläche zeichnen. Außerdem ist wiederholt die bekannte Summation zweier Potentiale verwendet. Zwei Systeme von Potentialkurven teilen die Ebene in Parallelogramme, deren Diagonalen die Potentialkurven eines neuen Feldes bilden, das durch Superposition der beiden gegebenen

Felder entsteht. Als Potentialkurven können aber auch die Stromlinien aufgefaßt werden, und wenn sie nur so angeordnet sind, daß sie zusammen mit den Potentialkurven die Ebene in unendlich kleine Quadrate teilen, lassen sie die nämliche Superposition zu wie die Potentialkurven selbst.