Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft II

Mai- bis Julisitzung.

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Untersuchungen über die Funktionen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben.

Von **Arthur Rauber.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Vorwort.

Der Verfasser hat in seiner Inanguraldissertation (München 1913) einen Weg eingeschlagen, welcher zu einer Lösung der Bewegungsgleichungen des dreiachsigen festen Kreisels führt. Die gesuchten Größen [Komponenten der Drehgeschwindigkeit und Richtungskosinusse eines körperfesten Achsenkreuzes gegen ein raumfestes] werden dargestellt durch dreifach-unendliche Reihen nach Potenzen der Schwerpunktskoordinaten [in dieser Arbeit: Gleichung (3)]; die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$, $G^{(i)}_{lmn}$ usw. dieser Entwickelungen sind eindeutige stetige Funktionen für alle reellen Werte der Zeit t. Diese Art der Darstellung ist begründet durch einen Satz von Poincaré über die Abhängigkeit der Lösungen eines Differentialsystemes von Parametern. Die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ usw. sind mittels rekurrierender Formeln durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Integration bestimmt und werden aus elliptischen Elementarfunktionen, die in Grenzfällen in zyklometrische übergehen, aufgebaut. Soweit ist das Problem in der Dissertation des Verfassers geführt und in den Abschnitten 1, 2 und 3 dieser Arbeit ist der Weg — mit einigen Zusätzen — zusammenfassend bezeichnet. In den folgenden Abschnitten wird die Untersuchung vornehmlich für reelle t weitergeführt und zwar wird nach vorbereitenden Sätzen in 4 und 5 im 6. Abschnitt gezeigt, daß durch eine endliche Anzahl der obenbezeichneten Entwickelungen (Funktionselemente) die gesuchten Größen sich darstellen lassen für beliebig große, endliche Zeiten, für beliebige endliche Schwerpunktskoordinaten, beliebige Massenverteilung und beliebige Anfangsbedingungen. Alle Funktionselemente sind durch die gleichen rekurrierenden Formeln bestimmt, nur die Moduln und Konstanten der Elementarfunktionen sind verschieden.

Die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ usw. lassen sich, wie im 7. und 8. Abschnitt gezeigt wird, in einer für alle reellen t gültigen, von Integralen freien Form darstellen durch eine gewisse Art von trigonometrischen Reihen; die Koeffizienten dieser Entwickelungen sind explizit und eindeutig durch die bereits berechneten bestimmt und zwar durch die Operationen der Addition und Multiplikation.

Wir können also den geometrisch-mechanischen Vorgang der Kreiselbewegung in allen Fällen beschreiben.

Zur Erforschung der analytischen Eigenschaften unserer Funktionselemente im komplexen Bereiche von t sind noch sehr weitgehende Untersuchungen notwendig. Ein Beitrag wird im 9. Abschnitt gegeben: Die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ haben nach dem formalen Aufbau an gewissen Punkten polare und logarithmisch-polare Singularitäten; der rein polare Hauptteil dieser Funktionen wird durch endliche Reihen von Θ-Quotienten dargestellt, die alle singulären Punkte umfassen. Die Koeffizienten dieser Reihen sind Funktionen von t, die an jenen Stellen regulär sind.

[Die elliptischen Funktionen in dieser Arbeit sind nach der Definition Jacobis behandelt.]

I. Die Differentialgleichungen des Kreisels und ihre Lösung.

Ein „dreiachsiger fester Kreisel“ ist ein starrer Körper, der an einem seiner Punkte festgehalten ist, für diesen Punkt ein dreiachsiges Trägheitsellipsoid besitzt und unter der Wirkung der Erdschwere sich bewegt.

Es sei

M = Maße des Kreisels.

T_1, T_2, T_3 = Hauptträgheitsachsen bezüglich des festen Punktes; sie bilden das körperfeste Achsenkreuz x, y, z.

r_1, r_2, r_3 = Komponenten der Drehgeschwindigkeit im System $x y z$.

x_0, y_0, z_0 = Koordinaten des Schwerpunktes.

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ = Richtungskosinusse der Achsen xyz gegen ein
$i = 1, 2, 3$ raumfestes Achsenkreuz $\xi \eta \zeta$, entsprechend dem Schema

		x	y	z	Körperfest
Raumfest	ξ	α_1	α_2	α_3	
	η	β_1	β_2	β_3	
	ζ	γ_1	γ_2	γ_3	

g = Beschleunigung der Schwere in Richtung $-\zeta$.
t = Zeit.

Wir setzen fest, daß

$$T_3 > T_2 > T_1 > 0 \tag{1}$$

und benützen die Bezeichnungen:

$$\mu_1 = \frac{T_2 - T_3}{T_1}; \quad \mu_2 = \frac{T_3 - T_1}{T_2}; \quad \mu_3 = \frac{T_1 - T_2}{T_3},$$

so daß

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$\sigma_1 = Mgx_0; \quad \sigma_2 = Mgy_0; \quad \sigma_3 = Mgz_0;$$

[die Größen T, μ, σ sind reell], dann erhalten wir die Differentialgleichungen des dreiachsigen festen Kreisels in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \mu_1 r_2 r_3 + \frac{1}{T_1}(\sigma_2 \gamma_3 - \sigma_3 \gamma_2) \\ \frac{dr_2}{dt} &= \mu_2 r_3 r_1 + \frac{1}{T_2}(\sigma_3 \gamma_1 - \sigma_1 \gamma_3) \\ \frac{dr_3}{dt} &= \mu_3 r_1 r_2 + \frac{1}{T_3}(\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r_3 - \gamma_3 r_2 \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 r_1 - \gamma_1 r_3 \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 r_2 - \gamma_2 r_1 \end{aligned} \tag{2a}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(r_i)_{t=0} = r_i(0); \quad (\gamma_i)_{t=0} = \gamma_i(0); \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Die Größen α_i und β_i genügen ebenfalls den Gleichungen (2a); sie unterscheiden sich von den γ_i und voneinander nur durch die Anfangsbedingungen. Die gegebenen Anfangswerte von α_i und β_i seien $\alpha_i(0)$ und $\beta_i(0)$.

Außerdem bestehen die Orthogonalitätsbedingungen:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 = 0$$

usw. usw.

Die gesuchten Größen sind:

$$r_i,\ \gamma_i,\ \alpha_i,\ \beta_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3);$$

sie sind durch die Differentialgleichungen (2) und (2a) abhängig von den Variabeln

$$t,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ r_i(0),\ \gamma_i(0),\ \alpha_i(0),\ \beta_i(0).$$

Die Differentialgleichungen (2) und (2a) sind nach dem gegenwärtigen Stande der Analysis dann gelöst, wenn wir für die gesuchten Größen Entwickelungen nach Funktionen der Variabeln angeben, die in einem gewissen Bereiche der Variabeln konvergieren und zugleich zeigen, daß und wie diese Entwickelungen bis zu jedem endlichen Werte der Variabeln fortgesetzt werden können, so daß wir die Möglichkeit geboten sehen, die gesuchten Größen an allen Stellen der für die Zwecke der Analysis komplexen, für die Zwecke der Mechanik reellen Variabeln nach ihrem Verhalten zu prüfen und ihren Verlauf zu untersuchen. Welche Art von Funktionen, nach denen diese Entwickelungen fortschreiten sollen, zu wählen ist, wird zunächst davon abhängen, welche von den Variabeln eine Hauptrolle spielen sollen und welche eine nebensächliche; außerdem wird man von den Funktionen verlangen, daß sie einen möglichst großen Gültigkeitsbereich ihrer Variabeln besitzen und daß auch den Entwickelungen für die gesuchten Größen ein möglichst großer Gültigkeitsbereich in den Variabeln gegeben wird.

Eine Methode zur Darstellung der gesuchten Funktionen r_i, γ_i, α_i, β_i hat der Verfasser in seiner Inauguraldissertation (München 1913) ausführlich erörtert; sie stützt sich auf einen Satz von Poincaré über die Abhängigkeit der Lösungen eines Differentialsystemes von Parametern (vgl. Diss. S. 7). Nach dieser Untersuchung sind die gesuchten Größen darstellbar in einem gewissen Bereiche der Variabeln in der Form:

$$\left.\begin{aligned} r_i &= \sum_0^\infty{}^l \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n \sigma_1^l\,\sigma_2^m\,\sigma_3^n\,R_{lmn}^{(i)} \\ \gamma_i &= \sum_0^\infty{}^l \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n \sigma_1^l\,\sigma_2^m\,\sigma_3^n\,G_{lmn}^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3}$$

Dieselbe Form haben α_i und β_i, nur ist für G_{lmn}^i zu schreiben $A_{lmn}^{(i)}$ und $B_{lmn}^{(i)}$.

Die Koeffizienten $R^{(i)}_{000}$, $G^{(i)}_{000}$ usw. sind die Lösungen der Differentialsysteme (2) und (2a), wenn $\sigma_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) gesetzt wird.

Die übrigen Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ usw. sind definiert durch die linearen Differentialsysteme:

$$\begin{aligned} \frac{d R^{(i)}_{lmn}}{dt} &= \mu_i \left[R^{(i+1)}_{lmn} R^{(i+2)}_{000} + R^{(i+2)}_{lmn} R^{(i+1)}_{000} \right] + \mathfrak{R}^{(i)}_{lmn} \\ \frac{d G^{(i)}_{lmn}}{dt} &= G^{(i+1)}_{lmn} R^{(i+2)}_{000} - G^{(i+2)}_{lmn} R^{(i+1)}_{000} + \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn} \\ & i = 1,\ 2,\ 3. \end{aligned} \tag{4}$$

[Hier wie in den folgenden Formeln ist bei den Indizes i, $i+1$, $i+2$ die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5 zu ersetzen durch 1, 2, 3, 1, 2.]

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{(i)}_{lmn} = \mu_i & \left[\begin{array}{l} R^{(i+1)}_{l-1, m, n} R^{(i+2)}_{1, 0, 0} + \cdots + R^{(i+1)}_{0, m, n} R^{(i+2)}_{l, 0, 0} \\ + \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ + R^{(i+1)}_{0, 0, n} R^{(i+2)}_{l, m, 0} + \cdots + R^{(i+1)}_{0, 0, 1} R^{(i+2)}_{l, m, n-1} \end{array} \right] \\ & + \frac{1}{T_i} D^{(i)}_{lmn}, \quad \text{wobei} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} D^{(1)}_{lmn} &= G^{(3)}_{l, m-1, n} - G^{(2)}_{l, m, n-1} \\ D^{(2)}_{lmn} &= G^{(1)}_{l, m, n-1} - G^{(3)}_{l-1, m, n} \\ D^{(3)}_{lmn} &= G^{(2)}_{l-1, m, n} - G^{(1)}_{l, m-1, n}. \end{aligned}$$

In der eckigen Klammer steht die Summe aller Glieder $(R^{(i+1)}_{abc} R^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma})$, so daß $a + \alpha = l$, $b + \beta = m$, $c + \gamma = n$; ausgenommen ($a = l$, $b = m$, $c = n$) und ($\alpha = l$, $\beta = m$, $\gamma = n$) $\cdot$ a, b, c, α, β, γ sind nie negativ.

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn} = {} & G^{(i+1)}_{l-1, m, n} R^{(i+2)}_{1, 0, 0} + \cdots + G^{(i+1)}_{0, m, n} R^{(i+2)}_{l, 0, 0} + \cdots \\ & + G^{(i+1)}_{0, 0, n} R^{(i+2)}_{l, m, 0} + \cdots + G^{(i+1)}_{0, 0, 0} R^{(i+2)}_{lmn} \\ & - G^{(i+2)}_{l-1, m, n} R^{(i+1)}_{1, 0, 0} - \cdots - G^{(i+2)}_{0, m, n} R^{(i+1)}_{l, 0, 0} - \cdots \\ & - G^{(i+2)}_{0, 0, n} R^{(i+2)}_{l, m, 0} - \cdots - G^{(i+2)}_{0, 0, 0} R^{(i+1)}_{l, m, n}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Hier steht die Summe aller Glieder

$$G^{(i+1)}_{abc}\, R^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma} - G^{(i+2)}_{abc}\, R^{(i+1)}_{\alpha\beta\gamma},$$

so daß $a+\alpha=l,\ b+\beta=m,\ c+\gamma=n$ ausgenommen $(a=l,\ b=m,\ c=n)$.

Wir bezeichnen nun mit $R^{(i)}_j$ und $G^{(i)}_j$ $(i=1,2,3;\ j=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ die Fundamentalsysteme von partikulären Lösungen der homogenen Gleichung (4), d. h. der Gleichungen, in welchen $\mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}$ und $\mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}$ durch Null ersetzt sind; mit ΔR und ΔG die Determinanten dieser Fundamentalsysteme und mit $\Delta R^{(i)}_j$ und $\Delta G^{(i)}_j$ die zu $R^{(i)}_j$ und $G^{(i)}_j$ gehörigen Unterdeterminanten.

Dann erhalten die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ die Form:

$$\left.\begin{aligned} R^{(i)}_{lmn} &= \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}{}^{j}\, R^{(i)}_j\, P^{(j)}_{lmn} \\ G^{(i)}_{lmn} &= \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}{}^{j}\, G^{(i)}_j\, \Gamma^{(j)}_{lmn} \end{aligned}\right\}\quad i = 1,\,2,\,3 \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} P^{(j)}_{lmn} &= \int_0^t \sum_1^3{}^{i}\, \frac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R}\, \mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}\, dt \\ \Gamma^{(j)}_{lmn} &= \int_0^t \sum_1^3{}^{i}\, \frac{\Delta G^{(i)}_j}{\Delta G}\, \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}\, dt \end{aligned}\right\}\quad j = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}. \tag{7}$$

Die Funktionen

$$R^{(i)}_{000},\ G^{(i)}_{000},\ A^{(i)}_{000},\ B^{i}_{000},\ R^{(i)}_j,\ G^{(i)}_j,\ \frac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R},\ \frac{\Delta G^{(i)}_j}{\Delta G}$$

bezeichnen wir als die Elementarfunktionen; ihre Werte werden wir sogleich angeben. Die Gleichungen zur Bestimmung der $A^{(i)}_{lmn}$ und $B^{(i)}_{lmn}$ haben dieselbe Form wie die der $G^{(i)}_{lmn}$, nur sind die G-Zeichen durch die A- und B-Zeichen zu ersetzen.

2. Die Elementarfunktionen.

Die Elementarfunktionen entnehmen wir der Dissertation und stellen ihre Werte in dieser Liste zusammen. Es ist:

$$R^{(1)}_{000} = P_1\, cn(at+b); \quad R^{(2)}_{000} = P_2\, sn(at+b);$$
$$R^{(3)}_{000} = P_3\, dn(at+b).$$
$$P_1^2 = \frac{-\mu_1 r_2^2(0) + \mu_2 r_1^2(0)}{\mu_2}; \quad P_2^2 = \frac{\mu_1 r_2^2(0) - \mu_2 r_1^2(0)}{\mu_1};$$
$$P_3^2 = \frac{-\mu_3 r_2^2(0) + \mu_2 r_3^2(0)}{\mu_2}; \tag{8}$$
$$a^2 = \mu_1(\mu_3 r_2^2(0) - \mu_2 r_3^2(0)); \quad sn^2(b) = \frac{\mu_1 r_2^2(0)}{\mu_1 r_2^2(0) - \mu_2 r_1^2(0)} (<1)$$
$$(\text{Modul})\, k^2 = \frac{\mu_3(\mu_1 r_2^2(0) - \mu_2 r_1^2(0))}{\mu_1(\mu_3 r_2^2(0) - \mu_2 r_3^2(0))}.$$

Diese Funktionen, also auch alle anderen, die aus ihnen abgeleitet sind, gelten für diejenigen Anfangsbedingungen $r_i(0)$, für welche das $k^2 < 1$ wird. In allen Fällen, in denen diese letzte Formel ein $k^2 > 1$ ergeben würde, ist zu setzen:

$$R^{(1)}_{000} = P_1\, dn(at+b); \quad R^{(3)}_{000} = P_3\, cn(at+b);$$

dann vertauschen sich bei μ_i und $r_i(0)$ die Indizes 1 und 3, so daß wieder $k^2 < 1$ wird. Dann vertauschen sich auch bei allen $R^{(i)}$, G^i usw. Funktionen die Indizes 1 und 3.

Wird $k^2 = 1$, so gehen die elliptischen Funktionen, ebenso wie für $k^2 = 0$, in zyklometrische über, so daß alle folgenden Betrachtungen vereinfacht werden.

Ferner ist:

$$\begin{aligned} G^{(i)}_{000} &= \Gamma_{\mathrm{I}} G^{(i)}_{\mathrm{I}} + \Gamma_{\mathrm{II}} G^{(i)}_{\mathrm{II}} + \Gamma_{\mathrm{III}} G^{(i)}_{\mathrm{III}} \\ A^{(i)}_{000} &= A_{\mathrm{I}} G^{(i)}_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} G^{(i)}_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}} G^{(i)}_{\mathrm{III}} \qquad i = 1, 2, 3, \\ B^{(i)}_{000} &= B_{\mathrm{I}} G^{(i)}_{\mathrm{I}} + B_{\mathrm{II}} G^{(i)}_{\mathrm{II}} + B_{\mathrm{III}} G^{(i)}_{\mathrm{III}} \end{aligned} \tag{8a}$$

wobei

$$\Gamma_j = \frac{1}{\Delta G}(\gamma_1(0)\Delta G_j^{(1)} + \gamma_2(0)\Delta G_j^{(2)} + \gamma_3(0)\Delta G_j^{(3)})_{t=0}$$
$$j = \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}.$$

Entsprechende Formeln bestimmen die A_j und B_j.
Die Fundamentalsysteme $R_j^{(i)}$ und $G_j^{(i)}$ haben diese Werte:

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{I}}^{(1)} &= \varrho_1\, sn(\tau)\, dn(\tau) \qquad \tau = a t + b\\
R_{\mathrm{II}}^{(1)} &= \varrho_1\left[sn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_2 + \frac{k'^2}{cn(\tau)}\right]\\
R_{\mathrm{III}}^{(1)} &= \varrho_1\, sn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_3\\
R_{\mathrm{I}}^{(2)} &= \varrho_2\, cn(\tau)\, dn(\tau)\\
R_{\mathrm{II}}^{(2)} &= \varrho_2\, cn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_2\\
R_{\mathrm{III}}^{(2)} &= \varrho_2\, cn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_3\\
R_{\mathrm{I}}^{(3)} &= \varrho_3\, sn(\tau)\, cn(\tau)\\
R_{\mathrm{II}}^{(3)} &= \varrho_3\, sn(\tau)\, cn(\tau)\, Z_2\\
R_{\mathrm{III}}^{(3)} &= \varrho_3\left[sn(\tau)\, cn(\tau)\, Z_3 - \frac{k'^2}{k^2\, dn(\tau)}\right],
\end{aligned} \tag{9}$$

wobei

$$\varrho_1 = -i\sqrt{\mu_1};\quad \varrho_2 = \sqrt{\mu_2};\quad \varrho_3 = -ik\sqrt{\mu_3};$$
$$Z_1 = \delta_1\tau + Z(\tau);\quad Z_2 = \delta_2\tau + Z(\tau - K);$$
$$Z_3 = \delta_3\tau + Z(\tau - K - iK');$$
$$\delta_1 = \frac{-1-k^2}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};\quad \delta_2 = \frac{2k^2-1}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};$$
$$\delta_3 = \frac{2-k^2}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};$$
$$Z(\tau) = \frac{d}{d\tau} ln\,\Theta_1(\tau);\quad N_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\tau^i}\Theta_1(\tau)\right]_{\tau=0}.$$

Ferner

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{I}}^{(1)} &= i\frac{k}{k'}\, cn(i\omega + K)\, cn(\tau)\\
G_{\mathrm{II}}^{(1)} &= \frac{\Theta_0(\tau - i\omega)\,\Theta_3(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\, e^{\Omega\tau}\\
G_{\mathrm{III}}^{(1)} &= \frac{\Theta_0(\tau + i\omega)\,\Theta_3(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\, e^{-\Omega\tau}
\end{aligned} \tag{9a}$$

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{I}}^{(2)} &= k\,sn(i\omega+K)\,sn(\tau) \\
G_{\mathrm{II}}^{(2)} &= i\,\frac{\Theta_3(\tau-i\omega)\,\Theta_0(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\,e^{\Omega\tau} \\
G_{\mathrm{III}}^{(2)} &= -\,i\,\frac{\Theta_3(\tau+i\omega)\,\Theta_0(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\,e^{-\Omega\tau} \\
G_{\mathrm{I}}^{(3)} &= \frac{1}{k'}\,dn(i\omega+K)\,dn(\tau) \\
G_{\mathrm{II}}^{(3)} &= -\,i\,\frac{\Theta_1(\tau-i\omega)\,\Theta_2(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\,e^{\Omega\tau} \\
G_{\mathrm{III}}^{(3)} &= i\,\frac{\Theta_1(\tau+i\omega)\,\Theta_2(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\,e^{-\Omega\tau},
\end{aligned}
\tag{9a}
$$

wobei

$$
sn(i\omega) = +\sqrt{\frac{-T_1(T_2-T_3)}{T_3(T_1-T_2)}};\quad 0 < i\omega < iK'
$$

$$
\Omega = \left[\frac{d}{d\tau}\,ln\,\Theta_0(\tau)\right]_{\tau=0} + i P_3\,dn(i\omega).
$$

Schließlich haben die Determinanten diese Werte:

$$
\begin{aligned}
\Delta R &= -\,k\,\varrho_1\varrho_2\varrho_3\,\frac{k'^4}{k^2} \\
\Delta R_{\mathrm{I}}^{(1)} &= -\,\varrho_2\varrho_3\,\frac{k'^2}{k^2}\,cn(\tau)\,Z_2 \\
\Delta R_{\mathrm{II}}^{(1)} &= \varrho_2\varrho_3\,\frac{k'^2}{k^2}\,cn(\tau) \\
\Delta R_{\mathrm{III}}^{(1)} &= 0 \\
\Delta R_{\mathrm{I}}^{(2)} &= \varrho_1\varrho_3\,k'^2\,sn(\tau)\left[\frac{k'^2}{k^2}Z_1 - \frac{i\pi}{2K}\right] \\
\Delta R_{\mathrm{II}}^{(2)} &= -\,\varrho_1\varrho_3\,\frac{k'^2}{k^2}\,sn(\tau) \\
\Delta R_{\mathrm{III}}^{(2)} &= \varrho_1\varrho_3\,k'^2\,sn(\tau) \\
\Delta R_{\mathrm{I}}^{(3)} &= \varrho_1\varrho_2\,k'^2\,dn(\tau)\,Z_3 \\
\Delta R_{\mathrm{II}}^{(3)} &= 0 \\
\Delta R_{\mathrm{III}}^{(3)} &= -\,\varrho_1\varrho_2\,k'^2\,dn(\tau)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\Delta G &= -2i \\
\Delta G_{\mathrm{I}}^{(1)} &= 2\frac{k}{k'}cn(i\omega+K)cn(\tau) \\
\Delta G_{\mathrm{II}}^{(1)} &= -i\frac{\Theta_3(0)}{\Theta_3(i\omega)}\frac{\Theta_0(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}e^{-\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{III}}^{(1)} &= -i\frac{\Theta_3(0)}{\Theta_3(i\omega)}\frac{\Theta_0(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}e^{\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{I}}^{(2)} &= -2ik\,sn(i\omega+K)sn(\tau) \\
\Delta G_{\mathrm{II}}^{(2)} &= -\frac{\Theta_0(0)}{\Theta_3(i\omega)}\frac{\Theta_3(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}e^{-\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{III}}^{(2)} &= \frac{\Theta_0(0)}{\Theta_3(i\omega)}\frac{\Theta_3(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}e^{\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{I}}^{(3)} &= -2i\frac{1}{k}dn(i\omega+K)dn(\tau) \\
\Delta G_{\mathrm{II}}^{(3)} &= \frac{\Theta_2(0)}{\Theta_3(i\omega)}\frac{\Theta_1(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}e^{-\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{III}}^{(3)} &= -\frac{\Theta_2(0)}{\Theta_3(i\omega)}\frac{\Theta_1(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}e^{\Omega\tau}.
\end{aligned}
\tag{10a}
$$

3. Allgemeine Eigenschaften der Reihen (3).

[Um unsere Auseinandersetzungen kürzer fassen zu können, schicken wir eine Bemerkung voraus: Die $A_{lmn}^{(i)}$ und $B_{lmn}^{(i)}$ unterscheiden sich von den $G_{lmn}^{(i)}$ nur dadurch, daß in ihnen die Parameter A_j bzw. B_j teilweise an die Stelle von Γ_j treten, wie man aus den Formeln (8a) erkennt. Wenn wir also in der Folge allgemeine Sätze über $G_{lmn}^{(i)}$ aufstellen, die für alle Werte ihrer Parameter gelten, so gelten dieselben Sätze auch für $A_{lmn}^{(i)}$ und $B_{lmn}^{(i)}$.] Die Elementarfunktionen sind eindeutige analytische Funktionen von $\tau(=at+b)$, die nur in den Punkten $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ (m, m' = ganze Zahlen) singuläre Stellen und zwar Pole besitzen. Sie können also in jedem von den genannten verschiedenen Punkte durch eine Reihe nach positiven Potenzen von τ (oder auch t) dargestellt werden, deren Konvergenzkreis durch den nächstgelegenen singulären Punkt geht. Aus diesen Funktionen werden die $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Integration, eine endliche Anzahl mal nach Rekursionsformeln wiederholt, abgeleitet. Sie sind also eindeutig bestimmt und sind stetige Funktionen von t, die nur an den Punkten $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ singuläre Stellen haben. In jedem regulären Punkte können die $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch Taylorsche Reihen dargestellt werden. Welche Darstellung in der Umgebung eines singulären Punktes anzuwenden ist, muß erst die Untersuchung auseinandersetzen; so viel läßt sich im voraus übersehen, daß an jenen Stellen nur ein polares und logarithmisches Unendlichwerden eintreten kann.

In den Fällen $k = 0$ und $k = 1$ gehen die elliptischen Elementarfunktionen in zyklometrische über; die Singularitäten bleiben für $k = 1$ erhalten, für $k = 0$ verschwinden sie aus dem endlichen Bereiche. Dieser Fall $k = 0$ kann übrigens nur eintreten, wenn wenigstens eine der Größen μ_i verschwindet; dann ist aber die Beziehung (1) nicht mehr erfüllt. Wir erwähnen den Fall $k = 0$ deshalb, weil er ein Grenzfall ist, dem der allgemeine sich stetig nähern kann.

Über das Konvergenzgebiet der Funktionselemente (3) läßt sich folgende Aussage machen [vgl. S. 7—12 der Diss.]:

Es besteht in allen Fällen $0 < k < 1$ eine Beziehung $f(t, \sigma) = 0$, wobei $|\sigma_i| < \sigma$; die σ_i können komplexe Werte annehmen, t soll auf die reelle Achse beschränkt sein. Die genaue Form von $f(t, \sigma)$ ist uns hier noch unbekannt, doch kennen wir eine wichtige Eigenschaft: es wird bei beliebigen Anfangsbedingungen und Massenverteilungen des Kreisels jedem endlichen t ein bestimmtes σ zugeordnet, so daß für diese Variabeln die Reihen sicher noch konvergieren; zu großem t gehört ein kleines σ, zu kleinen t ein großes σ.

Da die Reihen (3) für alle reellen endlichen t, wenn σ passend bestimmt ist, konvergieren, so folgt, daß die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ für alle reellen endlichen t selbst endlich bleiben; d. h. es gibt positive endliche Zahlen R und G, so daß

$$|R^{(i)}_{lmn}| \leq R; \quad |G^{(i)}_{lmn}| \leq G \tag{11}$$

für alle lmn und alle reellen t.

Die Fortsetzung der Funktionselemente für r_i und γ_i ist auf zwei Wegen möglich, nämlich durch Fortsetzung in den Variabeln σ_i und durch Fortsetzung in der Variabeln t. Einfacher auszuführen ist die Fortsetzung in t, bei einmalig fest gewähltem σ. Über diesen Punkt werden wir weiter unten sprechen (im 6. Abschnitt).

Zwischen den Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ bestehen einige algebraische Beziehungen, die sich aus den algebraischen Integralen der Differentialsysteme (2)(2ᵃ) ableiten lassen. Diese Differentialsysteme besitzen bekanntlich in dem allgemeinen Falle, der durch Gleichung (1) definiert ist, nur drei algebraische Integrale, nämlich

$$\begin{aligned} &1)\quad T_1 r_1^2 + T_2 r_2^2 + T_3 r_3^2 + 2(\sigma_1\gamma_1 + \sigma_2\gamma_2 + \sigma_3\gamma_3) = h \\ &2)\quad T_1 r_1 \gamma_1 + T_2 r_2 \gamma_2 + T_3 r_3 \gamma_3 = c \\ &3)\quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Größen h und c sind unabhängig von t.

Nun haben wir die Anfangswerte $r_i(0)$ und $\gamma_i(0)$ in die Funktionen $R^{(i)}_{000}$ und $G^{(i)}_{000}$ aufgenommen und festgesetzt [Gleichung (7)], daß die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ für $t = 0$ verschwinden. Es ist also:

$$\begin{aligned} \sum_1^3{}^i \left(T_i R^{(i)}_{000}\, G^{(i)}_{000}\right)_{t=0} &= c \\ \sum_1^3{}^i \left(G^{(i)}_{000}\right)^2_{t=0} &= 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Integrale 2) und 3) bleiben ungeändert für $\sigma_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Ihnen genügen also die Funktionen $R^{(i)}_{000}$ und $G^{(i)}_{000}$ für alle t, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \sum_1^3{}^i T_i R^{(i)}_{000}\, G^{(i)}_{000} &= c \\ \sum_1^3{}^i \left(G^{(i)}_{000}\right)^2 &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir ersetzen in Gleichung (12) die r_i und γ_i durch ihre Entwickelungen (3) und erhalten mit Rücksicht auf (14) die Beziehungen:

$$\sum_1^3{}^i\, T_i \left[\sum_0^\infty{}^{lmn}\, \sigma_1^l\, \sigma_2^m\, \sigma_3^n\, R^{(i)}_{lmn} \sum_0^\infty{}^{lmn}\, \sigma_1^l\, \sigma_2^m\, \sigma_3^n\, G^{(i)}_{lmn} - R^{(i)}_{000}\, G^{(i)}_{000} \right] = 0$$

$$\sum_1^3{}^i \left[\left(\sum_0^\infty{}^{lmn}\, \sigma_1^l\, \sigma_2^m\, \sigma_3^n\, G^{(i)}_{lmn} \right)^2 - (G^{(i)}_{000})^2 \right] = 0.$$

Diese Gleichungen bestehen für unendlich viele σ_i $(i=1, 2, 3)$; also muß der Koeffizient des allgemeinen Gliedes $\sigma_1^l\, \sigma_2^m\, \sigma_3^n$ auf der linken Seite verschwinden; d. h. es ist:

$$\begin{aligned} &\sum_1^3{}^i\, T_i\, {}'\!\sum_0^{l,m,n}{}^{\lambda\mu\nu}\, R^{(i)}_{l-\lambda,\, m-\mu,\, n-\nu}\, G^{(i)}_{\lambda\mu\nu} = 0 \\ &\sum_1^3{}^i\, {}'\!\sum_0^{lmn}{}^{\lambda\mu\nu}\, G^{(i)}_{l-\lambda,\, m-\mu,\, n-\nu}\, G^{(i)}_{\lambda\mu\nu} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Dabei deutet das Zeichen ' vor den zweiten Summen an, daß der Fall ausgeschlossen ist, in dem gleichzeitig $l = \lambda = 0$, $m = \mu = 0$, $n = \nu = 0$. In diesem Falle gelten die Gleichungen (14).

4. Satz über das Verschwinden der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ im Punkte $t = 0$.

Mittels der Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch Potenzreihen wollen wir eine Formel über das Verschwinden dieser Funktionen im Punkte $t = 0$ ableiten. Diese Formel wird uns weiter unten nützlich sein, bei der Untersuchung über den Gültigkeitsbereich der r_i und γ_i für die Variabeln $t, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Es ist:

$$R^{(i)}_{000} = t^{v r^{(i)}_{000}} \cdot r^{(i)}_{000|0} \left(1 + \sum_1^\infty{}^k\, t^k\, r^{(i)}_{000|k} \right)$$

usw.

$$R_j^{(i)} = t^{v r_j^{(i)}} \cdot r_{j|0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k r_{j|k}^{(i)}\right) \tag{16}$$

usw.

$$\frac{\Delta R_j^{(i)}}{\Delta R} = t^{v \delta r_j^{(i)}} \cdot \delta r_{j|0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k \delta r_{j|k}^{(i)}\right)$$

usw.

Die Exponenten $v r_{000}^{(i)}$ usw. sind ganze Zahlen; sie bezeichnen die Ordnung des Verschwindens der Funktion im Punkte $t = 0$. Es gibt eine ganze Zahl $\nu \geqq 0$, so daß

$$\{v r_{000}^{(i)},\ v g_{000}^{(i)},\ v r_j^{(i)},\ v g_j^{(i)},\ v \delta r_j^{(i)},\ v \delta g_j^{(i)}\} \geqq \nu. \tag{17}$$

Die $r_{000|k}^{(i)}$ usw. sind von t unabhängige Größen. Es ist

$$\{r_{000|0}^{(i)},\ g_{000|0}^{(i)},\ r_{j|0}^{(i)},\ g_{j|0}^{(i)},\ \delta r_{j|0}^{(i)},\ \delta g_{j|0}^{(i)}\} \gtrless 0.$$

Aus den Gleichungen (5), (6), (7), (16) ergeben sich dann die Formeln

$$\begin{aligned} R_{lmn}^{(i)} &= t^{v r_{lmn}^{(i)}} \cdot r_{lmn|0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k r_{lmn|k}^{(i)}\right) \\ G_{lmn}^{(i)} &= t^{v g_{lmn}^{(i)}} \cdot g_{lmn|0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k g_{lmn|k}^{(i)}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

wobei

$$\{r_{lmn|0}^{(i)};\ g_{lmn|0}^{(i)}\} \gtrless 0.$$

Entsprechende Entwickelungen bestehen für $\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)}$, $P_{lmn}^{(j)}$ usw. Es sei

$$l + m + n = P;\quad R_{lmn}^{(i)} = R_P^{(i)} \text{ usw.}$$

Dann beweisen wir folgenden Satz:

Wenn die Formeln

$$\begin{aligned} v r_x^{(i)} &> \nu + 2x - 1 \\ v g_x^{(i)} &\geqq \nu + 2x \end{aligned} \tag{19}$$

bestehen für

$$x = 1, 2, 3, \ldots, P - 1,$$

so gelten auch die Formeln:

$$\begin{aligned} v r_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P - 1 \\ v g_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P. \end{aligned} \tag{20}$$

Der Beweis ist so: Infolge der Beziehungen (19) kommt aus Gleichung (5)

$$v\mathfrak{r}_P^{(i)} \geqq \nu + 2P - 2$$

und, wenn die erste der Gleichung (20), welche der zweiten selbständig vorangeht, bewiesen ist:

$$v\mathfrak{g}_P^{(i)} \geqq \nu + 2P - 1,$$

dann folgt aus Gleichung (7) und (17)

$$\begin{aligned} v\varrho_P^{(j)} &\geqq \nu + 2P - 1 \\ v\gamma_P^{(j)} &\geqq \nu + 2P, \end{aligned}$$

also wird nach Gleichung (6) und (17)

$$\begin{aligned} v r_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P - 1 \\ v g_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die Beziehungen (19) gelten für $x = 1, 2$, folglich gelten die Formeln (20) für alle P.

Den Fall, in dem $\nu = 0$ und nicht sämtliche

$$v r_{lmn}^{(i)}[l + m + n = P] > 2P - 1,$$

sowie nicht sämtliche $v g_{lmn}^{(i)} > 2P$ sind, bezeichnen wir als den normalen Fall.

Eine Folgerung ziehen wir aus der eben abgeleiteten Formel:

$$\text{Es sei } \nu = 0;\ \left.\begin{aligned} \text{alle } v r_P^{(i)} &> 2P - 1 \\ \text{alle } v g_P^{(i)} &> 2P \end{aligned}\right\} \text{ jedoch endlich.}$$

Wir betrachten die Folgen:

$$\begin{aligned} &v r_P^{(i)},\ v r_{P+1}^{(i)},\ v r_{P+2}^{(i)},\ \ldots,\ v r_{P+\alpha+1}^{(i)} \\ &v g_P^{(i)},\ v g_{P+1}^{(i)},\ v g_{P+2}^{(i)},\ \ldots,\ v g_{P+\beta+1}^{(i)}. \end{aligned}$$

Wenn nun die Beziehungen bestehen

$$vr^{(i)}_{P+\xi+1} - vr^{(i)}_{P+\xi} < 2$$
$$vg^{(i)}_{P+\eta+1} - vr^{(i)}_{P+\eta} < 2$$

für alle

$$\xi = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha$$
$$\eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \beta,$$

so sind α und β endliche Zahlen.

Denn die normalen $vr^{(i)}_{P+\xi}$ und $vg^{(i)}_{P+\eta}$ wachsen um 2, wenn ξ und η um 1 zunehmen, während die $vr^{(i)}_{P+\xi}$ und $vg^{(i)}_{P+\eta}$ in dem angenommenen Falle nur um 1 wachsen; also müssen die normalen Werte den endlichen Vorsprung der wirklichen Werte nach einer endlichen Anzahl von Schritten einholen.

5. Das Konvergenzgebiet der Funktionen r_i und γ_i für die Variabeln t, σ_1, σ_2, σ_3 [1]).

Für die Definition des Konvergenzgebietes von r_i und γ_i betrachten wir in deren Entwickelungen (3) alle Glieder

$$\sigma_1^l\, \sigma_2^m\, \sigma_3^n\, R^{(i)}_{l\,m\,n}$$

usw., für welche $l + m + n = P$ als gleichberechtigt und bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1^P R^{(i)}_{P00} + \sigma_1^{P-1}\sigma_2 R^{(i)}_{P-1,1,0} + \cdots \\ &+ \cdots + \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(i)}_{l\,m\,n}\,[l+m+n=P] + \\ &\qquad + \cdots + \sigma_3^P R^{(i)}_{0\,0\,P} \end{aligned}\right\} = \textstyle\sum^P(\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\, R^{(i)}). \tag{21}$$

usw.

Wir definieren ferner eine Zahl η durch die Gleichung:

$$\eta = 1 + \frac{1+\varepsilon}{P} + \zeta, \tag{22}$$

wobei

$$\varepsilon > 0$$
$$\zeta \geqq 0;$$

[1]) Diese Betrachtung gilt für alle Fälle $0 < k \leq 1$.

diese Größe ζ dient dazu, die Konvergenz der Reihen gewissermaßen zu regulieren; je größer ζ ist, desto besser ist die Konvergenz. Das Konvergenzgebiet der Funktionen r_i und γ_i, $\mathfrak{K}$ ist dann bestimmt als dasjenige Gebiet der Variabeln t, σ_1, σ_2, σ_3, welches folgenden Gebilden gemeinsam ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sum^P (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R^{(i)})}{\sum^{P+1} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R^{(i)})} &= \eta \\ \frac{\sum^P (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 G^{(i)})}{\sum^{P+1} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 G^{(i)})} &= \eta \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } P > P^*$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$\begin{gathered} \eta \sum^{P+1} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R^{(i)}) - \sum^P (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R^{(i)}) = 0 \\ \eta \sum^{P+1} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 G^{(i)}) - \sum^P (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 G^{(i)}) = 0 \\ \text{für } P > P^*. \end{gathered} \tag{23}$$

Mit diesen Gebilden werden wir uns in einer anderen Arbeit eingehend zu beschäftigen haben.

Mittels der Ergebnisse des 4. Abschnittes können wir eine Aussage über $\mathfrak{K}$ machen, die uns über dessen Verhalten belehrt, wenn t der Null sich nähert.

Es ist nämlich für

$$0 \leq t < \left| \frac{iK' - b}{a} \right|$$

$$\left| R^{(i)}_{lmn} \right| \leq t^{2P-1} \left| r^{*(i)}_{lmn\,|\,0} \right| \left(1 + \left| \sum_1^\infty{}_k t^k r^{*(i)}_{lmn\,|\,k} \right| \right) \tag{24}$$

$$\left| G^{(i)}_{lmn} \right| \leq t^{2P} \left| g^{*(i)}_{lmn\,|\,0} \right| \left(1 + \left| \sum_1^\infty{}_k t^k g^{*(i)}_{lmn\,|\,k} \right| \right),$$

dabei ist

$$\begin{aligned} r^{*(i)}_{lmn\,|\,0} &= \text{wirkl. Koeff. } r^{(i)}_{lmn\,|\,0}, && \text{wenn } vr^{(i)}_{lmn} = 2P - 1 \\ &= 1, && \text{wenn } vr^{(i)}_{lmn} > 2P - 1 \\ g^{*(i)}_{lmn\,|\,0} &= \text{wirkl. Koeff. } g^{(i)}_{lmn\,|\,0}, && \text{wenn } vg^{(i)}_{lmn} = 2P \\ &= 1, && \text{wenn } vg^{(i)}_{lmn} > 2P. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $r^{*(i)}_{lmn|k}$ sind so zu bestimmen, daß $r^{*(i)}_{lmn|0} \cdot r^{*(i)}_{lmn|k}$ gleich ist dem Koeffizienten des Gliedes t^{2P-1+k} in der wirklichen Potenzreihe (18) von $R^{(i)}_{lmn}$; in der gleichen Weise sind die $g^{*(i)}_{lmn|k}$ zu bestimmen.

Die in Gleichung (24) rechts stehenden majoranten Funktionen bleiben endlich für alle t des Bereiches, wie groß auch lmn werden mögen; dies gilt um so mehr für die Koeffizienten. Denn für die Reihen (18) gelten die Beziehungen (11) und diesen Reihen ist in (24) ein oder kein Glied hinzugefügt.

Wir können nun positive endliche Konstante $c_P > 0$ und positive Funktionen $\vartheta_P(t)$ bestimmen, die für $t=0$ verschwinden und im angegebenen Bereiche endlich bleiben (als solche Funktionen können wir z. B. aus Geraden Polygonzüge bilden), so daß

$$|R^{(i)}_{lmn}| < t^{2P-1} c_P (1 + \vartheta_P(t))$$
$$|G^{(i)}_{lmn}| < t^{2P} c_P (1 + \vartheta_P(t)).$$

Dann wird:

$$\left|\sum{}^P (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 R^{(i)})\right| \leq t^{2P-1} c_P (1 + \vartheta_P(t)) \sum{}^P (|\sigma_1| |\sigma_2| |\sigma_3| 1)$$
$$\left|\sum{}^P (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 G^{(i)})\right| \leq t^{2P} c_P (1 + \vartheta_P(t)) \sum{}^P (|\sigma_1| |\sigma_2| |\sigma_3| 1).$$

Diese majoranten Funktionen bilden majorante Reihen M_1, deren Konvergenzgebiet $\mathfrak{K}_1$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{K}$ liegt. $\mathfrak{K}_1$ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\eta t^2 \frac{c_{P+1}(1+\vartheta_{P+1}(t))}{c_P(1+\vartheta_P(t))} \sum{}^{P+1}(|\sigma_1| |\sigma_2| |\sigma_3| 1) - \sum{}^P(|\sigma_1| |\sigma_2| |\sigma_3| 1) = 0$$
$$\text{für } P > P^*. \tag{25}$$

Aus dieser Gleichung können wir sofort erfahren, wie t sich verhalten muß, wenn $|\sigma_1| |\sigma_2| |\sigma_3|$ beliebig große, aber endliche Werte annehmen.

Denn es gibt eine positive Zahl C, so daß

$$c_P(1 + \vartheta_P(t)) < C \text{ für alle } P$$

und wir erhalten so ein Gebiet $\mathfrak{K}_2$, das innerhalb $\mathfrak{K}_1$ liegt und bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\eta t^2 \sum\nolimits^{P+1}(|\sigma_1|\,|\sigma_2|\,|\sigma_3|\,1) - \sum\nolimits^{P}(|\sigma_1|\,|\sigma_2|\,|\sigma_3|\,1) = 0 \quad \text{für } P > P^*. \tag{26}$$

Nun sei

$$|\sigma_i| \leq \sigma \qquad i = 1, 2, 3,$$

dann finden wir ein Gebiet $\mathfrak{K}_3$ innerhalb $\mathfrak{K}_2$, bestimmt durch die Gleichung:

$$\eta t^2 \sigma (1+2(P+1)+\tfrac{1}{2}(P+1)P) - (1+2P+\tfrac{1}{2}P(P-1)) = 0. \tag{27}$$

Wir bezeichnen:

$$\frac{1+2(P+1)+\frac{1}{2}(P+1)P}{1+2P+\frac{1}{2}P(P-1)} = p.$$

p bleibt endlich für alle P und es ist $\lim\limits_{P=\infty} p = 1$.

Gleichung (27) lautet also

$$\eta t^2 \sigma p = 1. \tag{28}$$

Das Gebiet $\mathfrak{K}_3$ hat also die Eigenschaft, daß zu jedem beliebig großen aber endlichen σ ein endliches t gehört, das von den Parametern $T_1 T_2 T_3 r_i(0) \dot{\gamma}_i(0)$ unabhängig ist.

[Daß die genaue Beziehung zwischen σ_i und t, die sich durch die Gleichung (23) ergibt, von den eben genannten Parametern nicht unabhängig ist, läßt sich in Kürze so einsehen: $R^{(i)}_{lmn}$ ist eine homogene Funktion in $\Gamma_{\mathrm{I}} \Gamma_{\mathrm{II}} \Gamma_{\mathrm{III}}$ vom Grade $P-1$ und $G^{(i)}_{lmn}$ eine homogene Funktion in $\Gamma_{\mathrm{I}} \Gamma_{\mathrm{II}} \Gamma_{\mathrm{III}}$ vom Grade P. In Gleichung (23) können sich also diese Größen $\Gamma_{\mathrm{I}} \Gamma_{\mathrm{II}} \Gamma_{\mathrm{III}}$ nicht vollständig wegheben. Die Γ_j sind eindeutig umkehrbare lineare Funktionen von $\gamma_i(0)$. Also ist $\mathfrak{K}$ abhängig von $\gamma_i(0)$.]

Die Reihen, deren Konvergenzgebiet wir eben betrachteten, sind also konvergent für große σ_i und gewisse t; sie sind um so mehr konvergent für kleine σ_i. Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtung zusammen:

Die Reihen für r_i und γ_i in Gleichung (3) haben, bei beliebigen Anfangsbedingungen, die Eigenschaft, daß zu allen endlichen $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ ein endliches t gehört, so daß sie für diese Variabeln konvergieren; dieses t ist abhängig von den Parametern T_1, T_2, T_3, $r_i(0)$, $\gamma_i(0)$, bleibt jedoch oberhalb einer Größe, die von diesen Parametern frei ist.

6. Fortsetzung der Funktionselemente für r_i, γ_i, α_i, β_i.

Wir können jetzt die Fortsetzung der in Gleichung (3) angegebenen Funktionselemente bis zu jedem endlichen Werte der reellen Variabeln t bei beliebigen, endlichen σ_i ausführen.

Es seien also die Trägheitsachsen T_i und die Anfangsbedingungen $r_i(0)$ usw. gegeben; wir wünschen den Verlauf der Funktionen r_i, γ_i, α_i, β_i für $0 \leqq \sigma_i \leqq \sigma$; $0 < t \leqq T$ kennen zu lernen, d. h. wir wollen den Ablauf der Bewegung eines gewissen Kreiselsystems mit festem Trägheitsellipsoid und festen Anfangsbedingungen bei variabeln Schwerpunktskoordinaten in einem gewissen Zeitabschnitte untersuchen. (Für den Fall des einzelnen Kreisels sind auch die Schwerpunktskoordinaten σ_i festgelegt.)

Wir bilden die ersten Funktionselemente [Gleichung (3)], sei es aus elliptischen oder aus zyklometrischen Elementarfunktionen und berechnen das zu σ gehörige t_1; den günstigsten Wert gibt das Gebilde $\mathfrak{K}$; die Gebilde $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ geben weniger günstige Werte, doch sind sie einfacher zu behandeln. So erkennen wir den Verlauf von r_i usw. für alle $|\sigma_i \leqq \sigma$ und $0 < t \leqq t_1$. Wir benützen den Zustand für $t = t_1$ als neue Anfangsbedingungen $r_i'(0)$; $\gamma_i'(0)$ usw., bilden zum zweiten Male die Funktionselemente (3) und berechnen mit den neuen Parametern $r_i'(0)$ usw. das zu σ gehörige t_2'; so erhalten wir den Verlauf von r_i usw. für $\sigma_i < \sigma$; $0 < t' \leqq t_2'$, d. h. für $t_1 < t \leqq t_2$. So fahren wir fort und erhalten n-Funktionselemente, die alle in derselben Weise nach den Formeln (5), (6), (7) aufgebaut sind. Die Elementarfunktionen sind immer elliptische Funktionen, doch mit verschiedenen Moduln und Konstanten, in den Grenzfällen zyklometrische Funktionen. Die n-Funktionselemente gelten für $|\sigma_i| < \sigma$ und je für $0 \leq t \leq t_1$; $t_1 \leq t \leq t_2$; .... $t_{n-1} \leq t \leq t_n$.

Da nach Gleichung (28) alle t_j oberhalb einer endlichen Größe bleiben, so muß nach einer endlichen Zahl n von Schritten die endliche Zahl T erreicht werden.

7. Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ mit $G^{(i)}_{lmn}$ in einem Streifen der t-Ebene, welcher die ganze reelle Achse enthält.

Zu der geometrisch-mechanischen Betrachtung der Kreiselbewegung, d. h. zur Untersuchung der Funktionen r_i und γ_i usw. für reelle t ist es erwünscht, die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ in einer solchen Form dargestellt zu haben, die für alle reellen t gilt und zugleich durch einfache Operationen sich aufbauen läßt. Eine solche Darstellungsform läßt sich in der Tat angeben, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Die Elementarfunktionen

$$R^{(i)}_{000}; \; G^{(i)}_{000}; \; R^{(i)}_j; \; G^{(i)}_j; \; \frac{\varDelta R^{(i)}_j}{\varDelta R}; \; \frac{\varDelta G^{(i)}_j}{\varDelta G}$$

sind Aggregate von

1. Funktionen der Variablen t mit der reellen Periode

$$\Pi_1 = \frac{4K}{a};$$

es sind dies die Funktionen

$$cn(\tau), \; sn(\tau), \; dn(\tau), \; \frac{\Theta_\alpha(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}; \; \frac{\Theta_\alpha(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}; \; \frac{\dot{\Theta}_\alpha(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \; (\alpha = 1, 2, 3), \tag{29}$$

wobei

$$\dot{\Theta}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Theta(\tau); \quad \tau = at + b; \quad i = \sqrt{-1},$$

2. Funktionen mit der reellen Periode

$$\Pi_2 = \frac{2i\pi}{\Omega \cdot a};$$

es sind die Funktionen $e^{\Omega\tau}$ und $e^{-\Omega\tau}$,

3. der säkularen Funktion τ.

Jede der in 1 genannten Funktionen ist darstellbar in der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^p c_p e^{p i a a t}$, wobei $a = \frac{\pi}{2K}$. Eine solche Darstellung ist möglich in jedem Streifen der t-Ebene, parallel zur reellen Achse, der die Punkte $t = \frac{1}{a}(iK' + 2mK + 2m'iK' - b)$ vermeidet. Für unsere Zwecke benutzen wir den Streifen, welcher die reelle Achse in sich enthält. Seine Grenzpunkte sind also die Punkte $t = \frac{1}{a}(\pm iK' + 2mK - b)$. In diesem Falle kann, wenn es zweckmäßig erscheint, die eben angegebene Reihe zerlegt werden in die beiden Reihen

$$\sum_{0}^{\infty} {}^p c_p' \cos(paat) + \sum_{1}^{\infty} {}^p c_p'' \sin(paat).$$

Der Streifen hat immer eine angebbare endliche Breite. Denn a und b sind endliche reelle Zahlen; iK' hat den kleinsten Wert für $k = 1$, nämlich $\frac{i\pi}{2}$; es wächst stetig bei abnehmendem k und es ist $\lim\limits_{k=0} iK' = i\infty$.

Aus den Elementarfunktionen werden durch die vorgeschriebenen Operationen [Gleichung (5), (6), (7)] die Funktionen $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ abgeleitet als Aggregate von Funktionen mit der Periode Π_1, solchen mit der Periode Π_2 und von säkularen Funktionen. Diese Aggregate ordnen wir und erhalten die Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^p e^{p i a a t} \sum_{-Q}^{+Q} {}^q e^{q \Omega a t} \sum_{0}^{+S} {}^s t^s c_{pqs}. \tag{30}$$

Dabei sind die c_{pqs} unabhängig von t; Q und S sind endliche ganze Zahlen, die von lmn abhängen.

In dieser Reihe können die Glieder $e^{p i a a t}$ und $e^{q \Omega a t}$ in cos- und sin-Glieder zerlegt und diese geordnet werden.

Im einzelnen gestaltet sich diese Darstellung der $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ so: Die Elementarfunktionen haben bereits die

Form (30); dabei ist für die Funktionen $R_j^{(i)}$ und $\frac{\Delta R_j^{(i)}}{\Delta R}$ die Zahl $Q = 0$, für $G_j^{(i)}$ und $\frac{\Delta G_j^{(i)}}{\Delta G}$ ist $S = 0$. Die Werte der Koeffizienten c_{pqs} werden wir unten in einer Liste angeben. Für die Funktionen $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ und die zwischen ihnen vermittelnden Funktionen $\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)}$ und $\mathfrak{G}_{lmn}^{(i)}$ [Störungsfunktionen] sowie $P_{lmn}^{(j)}$ und $\Gamma_{lmn}^{(j)}$ finden wir durch den Schluß von P auf $P+1$ (wobei $P = l + m + n$) folgende Werte:

Für

$$\begin{aligned}
R_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P - 2; \quad S = 6P - 3 \\
G_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P + 1; \quad S = 6P - 2 \\
\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P - 2; \quad S = 6P - 6 \\
\mathfrak{G}_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P - 1; \quad S = 6P - 3 \\
P_{lmn}^{(j)} &: Q = 3P - 2; \quad S = 6P - 4 \\
\Gamma_{lmn}^{(j)} &: Q = 3P \qquad ; \quad S = 6P - 2.
\end{aligned} \tag{31}$$

Die Koeffizienten c_{pqs} werden durch diese Gleichungen bestimmt [die Bezeichnung ist so, daß der kleine Buchstabe Koeffizient der durch den großen versinnbildlichten Funktion ist]:

$$\mathfrak{r}_{lmn\,|\,pqs}^{(i)} = \mu_i \sum_{\alpha\beta\gamma} \sum_{\lambda\mu\nu} r_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}^{(i+1)} \, r_{\alpha\beta\gamma\,|\,\lambda\mu\nu}^{(i+2)} + \frac{1}{T_i} d_{lmn}^{(i)} \qquad \text{(vgl. Gleichung (5))}$$

$\varrho_{lmn\,|\,pqs}^{(j)}$ [wenn nicht gleichzeitig $p = 0$, $q = 0$]

$$= \frac{\varrho'_{pqs}}{pi\alpha a + q\Omega a} + \sum_{1}^{S-s}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{(s+\nu)!}{s!} \frac{\varrho'_{p,\,q,\,s+\nu}}{(pi\alpha a + q\Omega a)^{\nu+1}},$$

wobei

$$\varrho'_{pqs} = \varrho'^{(j)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_{1}^{3}{}_{i} \sum_{\lambda\mu\nu} \mathfrak{r}_{lmn\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}^{(i)} \cdot \delta r_{j\,|\,\lambda\mu\nu}^{(i)}$$

$$\varrho_{lmn\,|\,pqs}^{(j)} [p = 0,\, q = 0] = \frac{\varrho'_{p,\,q,\,s-1}}{s}$$

$$[p = 0,\, q = 0,\, s = 0] = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{p} \sum_{-Q}^{+Q}{}_{q} \varrho_{lmn\,|\,p,\,q,\,s=0}^{(j)} \tag{32}$$

$$r^{(i)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}{}^{j} \sum{}^{\lambda\mu\nu}\, \varrho^{(j)}_{lmn\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}\; r^{(i)}_{j\,|\,\lambda\mu\nu}$$

$$\mathfrak{g}^{(i)}_{lmn\,|\,pqs} = \underset{\text{vgl. Gl. (5a)}}{\sum{}^{\alpha\beta\gamma} \sum{}^{\lambda\mu\nu}} \begin{bmatrix} g^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}\; r^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma\,|\,\lambda\mu\nu} \\ -\,g^{(i+2)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}\; r^{(i+1)}_{\alpha\beta\gamma\,|\,\lambda\mu\nu} \end{bmatrix}$$

$\gamma^{(j)}_{lmn\,|\,pqs}$ [wenn nicht gleichzeitig $p=0,\ q=0$]

$$= \frac{\gamma'^{(j)}_{pqs-1}}{pi\alpha a + q\Omega a} + \sum_{1}^{S-s}{}^{\nu} (-1)^{\nu} \frac{(s+\nu)!}{s!} \frac{\gamma'^{(j)}_{lmn\,|\,p,q,s+\nu}}{(pi\alpha a + q\Omega a)^{\nu+1}},$$

wobei

$$\gamma'^{(j)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_{1}^{3}{}^{i} \sum{}^{\lambda\mu\nu}\, \mathfrak{g}^{(i)}_{lmn\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}\; \delta g^{(i)}_{j}\,\big|_{\lambda\mu\nu}$$

$$\gamma^{(j)}_{lmn\,|\,pqs}[p=0,\ q=0] = \gamma'^{(j)}_{lmn\,|\,p,q,s-1}$$

$$[p=0,\ q=0,\ s=0] = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{p} \sum_{-Q}^{+Q}{}^{q}\, \gamma^{(i)}_{lmn\,|\,p,q,s=0} \tag{32 a}$$

$$g^{(i)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}}{}^{j} \sum{}^{\lambda\mu\nu}\, \gamma^{(i)}_{lmn\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}\, g^{(i)}_{j\,|\,\lambda\mu\nu}.$$

In dieser Weise lassen sich also die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ [entsprechend auch $A^{(i)}_{lmn}$ und $B^{(i)}_{lmn}$] in einer Form darstellen, die für alle reellen t gilt, frei von Integralen ist und zu ihrem Aufbau nur die Operationen der Addition und Multiplikation erfordert.

8. Die Entwickelungen der Elementarfunktionen.

Zur Ausführung dieser Darstellung der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ müssen wir die Entwickelungen der Elementarfunktionen in der oben besprochenen Form kennen. Um diese zu erhalten, stellen wir zunächst die Entwickelungen der in (29, 1) genannten Funktionen zusammen. Sie haben alle die Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{p} c_p e^{pi\alpha a t}, \qquad \text{wobei} \qquad a = \frac{\pi}{2K}$$

und wir brauchen nur die Koeffizienten c_p für die einzelnen Funktionen angeben; wir werden immer nur das Zeichen schreiben, das an die Stelle von c treten soll. Die Koeffizienten für die *nicht angegebenen* Werte von p verschwinden.

Es sei

$$\tau = at + b;\ \beta = e^{pi a b};\ \varepsilon = pi a K';\ \vartheta = \dot{\Theta}_1(0),$$

dann ist für

$$
\begin{aligned}
sn(\tau)^{1)} : a^{(1)}[p = 2r+1] &= \frac{a\,\Theta_0(0)}{\sqrt{k}\,\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin\varepsilon} \\
cn(\tau) : a^{(2)}[p = 2r+1] &= \frac{a\sqrt{k'}\,\Theta_2(0)}{\sqrt{k}\,\vartheta}\cdot\frac{\beta}{\cos\varepsilon} \\
dn(\tau) : a^{(3)}[p = 2r] &= \frac{a\sqrt{k'}\,\Theta_3(0)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\cos\varepsilon} \\
\frac{\Theta_0(\tau + i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : b^{(1)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_1(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega + \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_0(\tau - i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : d^{(1)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_1(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega - \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_1(\tau + i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : b^{(2)}[p = 2r+1] &= \frac{a\,\Theta_0(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega + \varepsilon)} \qquad (33)\\
\frac{\Theta_1(\tau - i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : d^{(2)}[p = 2r+1] &= \frac{-a\,\Theta_0(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega - \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_3(\tau + i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : b^{(3)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_2(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\cos(ai\omega + \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_3(\tau - i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : d^{(3)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_2(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\cos(ai\omega - \varepsilon)} \\
\frac{\dot{\Theta}_1(\tau)^{2)}}{\Theta_0(\tau)} : c^{(1)} &= -a\sqrt{k}\,a^{(1)}\cot\varepsilon \\
\frac{\dot{\Theta}_2(\tau)}{\Theta_0(\tau)} : c^{(2)} &= a\sqrt{\frac{k}{k'}}\,a^{(2)}\operatorname{tang}\varepsilon \\
\frac{\dot{\Theta}_3(\tau)}{\Theta_0(\tau)} : c^{(3)} &= a\,\frac{1}{\sqrt{k'}}\,a^{(3)}\operatorname{tang}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

---

[1]) Die Entwickelung der doppeltperiodischen Funktionen zweiter Art in Reihen von zyklometrischen Funktionen wurde bekanntlich bereits von Jacobi und Hermite ausgeführt. Literaturangaben über andere Bearbeitungen dieses Gegenstandes finden sich in dem Werke: Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe (Leipzig 1895—1897). Von neueren Arbeiten sei nur eine genannt: Teixeira, Sur le developpement des fonctions doublement periodiques (Crelles Journal, Bd. 125 (1903), S. 301 ff.).

2) Die Funktion

$$\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_1(\tau)}$$

hat nur Pole an den Stellen $\tau = 2iK' + 2mK + 2m'iK'$, es gilt also die Entwickelung

$$\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_1(\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^p\, \delta_p e^{pia\tau} \tag{I}$$

in dem Parallelstreifen zur reellen Achse mit den Grenzpunkten $\tau = \pm 2iK' + 2mK$.

Ferner gilt die Entwickelung

$$\frac{\dot{\Theta}_1(\tau)}{\Theta_0(\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^p\, d_p e^{pia\tau} \tag{II}$$

in dem Streifen mit den Grenzpunkten $\tau = \pm iK' + 2mK$.

Wir setzen in Gleichung (I) $\tau = \tau' + iK'$ und erhalten:

$$-\frac{i\pi}{2K}\sqrt{k}\, sn(\tau') + \frac{\dot{\Theta}_1(\tau')}{\Theta_0(\tau')} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^p\, \delta_p e^{pia(\tau'+iK')}. \tag{III}$$

Diese Entwickelung gilt im Parallelstreifen zur reellen Achse mit den Grenzpunkten $\tau' = iK' + 2mK$ und $\tau' = -3iK' + 2mK$.

Die Entwickelung von $sn(\tau')$ (vgl. Gleichung (17)) gilt in demselben Bereiche wie (II). In eben diesem Gebiete erhalten wir durch Vergleichung von (II) und (III), wenn wir statt τ' wieder τ schreiben, die Beziehung:

$$\frac{-i\pi}{2K}\cdot\sqrt{k}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^p\, a_p^{(1)} e^{pia\tau} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^p\, d_p e^{pia\tau} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^p\, \delta_p e^{pia(\tau+iK')} \tag{IV}$$

und erhalten jetzt die notwendigen Gleichungen zur Berechnung von d_p und δ_p. Nämlich aus (I) und (II):

$$\delta_{-p} = \delta_p;\quad d_{-p} = d_p$$

$$\text{aus (IV):}\qquad -ia\sqrt{k}\, a_p^{(1)} + d_p = \delta_p e^{-paK'} \tag{V}$$

$$(\text{da } a_{-p}^{(1)} = -a_p^{(1)})\quad +ia\sqrt{k}\, a_p^{(1)} + d_{-p} = \delta_{-p} e^{+paK'}$$

und hieraus finden wir:

$$d_p = -ia\sqrt{k}\, a_p^{(1)} \frac{e^{ipaiK'} + e^{-ipaiK'}}{e^{ipaiK'} - e^{-ipaiK'}} = -a\sqrt{k}\, a_p^{(1)} \cot(paiK'). \tag{VI}$$

Nach derselben Methode sind die Entwickelungen von

$$\frac{\dot{\Theta}_2(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \text{ und } \frac{\dot{\Theta}_3(\tau)}{\Theta_0(\tau)}$$

berechnet.

Mit diesen Formeln werden die Koeffizienten c_{pqs} [Gleichung (30)] für die Elementarfunktionen nach den Gleichungen (8), (9), (10) berechnet.

Die Koeffizienten für

$$R^{(i)}_{000};\quad G^{(i)}_{000};\quad G^{(i)}_{j};\quad \frac{\Delta G^{(i)}_j}{\Delta G}$$

lassen sich sofort ablesen, nur die Koeffizienten für

$$R^{(i)}_j \quad \text{und} \quad \frac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R}$$

erfordern eine kleine Umrechnung, darum geben wir diese an. Die Art der Angabe ist dieselbe wie oben; alle $r^{(i)}_{j\,|\,pqs}$ und $\delta r^{(i)}_{j\,|\,pqs}$ für $q \gtrless 0$ sind Null, ebenso für die nicht angegebenen Werte von s. Es ist also für:

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{\mathrm{I}} : r^{(1)}_{\mathrm{I}} \quad [s=0] &= -\varrho_1 p i a a^{(2)}_p \\
R^{(1)}_{\mathrm{II}} : r^{(1)}_{\mathrm{II}} \quad [s=0] &= \varrho_1 k^2 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\, a^{(3)}_{p-n} c^{(1)}_n + \sqrt{k'}\, a^{(1)}_{p-n} c^{(3)}_n\right) \\
&\quad - \varrho_1 \delta_2 b p i a a^{(2)}_p \\
[s=1] &= -\varrho_1 \delta_2 a p i a a^{(2)}_p \\
R^{(1)}_{\mathrm{III}} : r^{(1)}_{\mathrm{III}} \quad [s=0] &= \varrho_1 p a^2 a^{(2)}_p + \varrho_1 \sqrt{k'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a^{(1)}_{p-n} c^{(3)}_n \\
&\quad - \varrho_1 \delta_3 b p i a a^{(2)}_p \\
[s=1] &= -\varrho_1 \delta_3 a p i a a^{(2)}_p \\
R^{(2)}_{\mathrm{I}} : r^{(2)}_{\mathrm{I}} \quad [s=0] &= \varrho_2 p i a a^{(1)}_p \\
R^{(2)}_{\mathrm{II}} : r^{(2)}_{\mathrm{II}} \quad [s=0] &= \varrho_2 \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a^{(3)}_{p-n} c^{(2)}_n + \varrho_2 \delta_2 b p i a a^{(1)}_p \qquad (34) \\
[s=1] &= \varrho_2 \delta_2 a p i a a^{(1)}_p \\
R^{(2)}_{\mathrm{III}} : r^{(2)}_{\mathrm{III}} \quad [s=0] &= -\varrho_2 p a^2 a^{(1)}_p + \varrho_2 \sqrt{k'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} a^{(2)}_{p-n} c^{(3)}_n \\
&\quad + \varrho_2 \delta_3 b p i a a^{(1)}_p \\
[s=1] &= \varrho_2 \delta_3 a p i a a^{(1)}_p \\
R^{(3)}_{\mathrm{I}} : r^{(3)}_{\mathrm{I}} \quad [s=0] &= -\varrho_3 k^2 p i a a^{(3)}_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{\rm II}^{(3)} : r_{\rm II}^{(3)} \quad [s=0] &= \varrho_3 \sqrt{\frac{k'}{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\, a_{p-n}^{(1)} c_p^{(2)} - \varrho_3 \delta_3 b k^2 p i a a_p^{(3)} \\
[s=1] &= -\varrho_3 \delta_3 a k^2 p i a a_p^{(3)} \\
R_{\rm III}^{(3)} : r_{\rm III}^{(3)} \quad [s=0] &= \varrho_3 k^2 p a^2 a_p^{(3)} + \varrho_3 \frac{1}{k^2 \sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{n} \left(k'^2 a_{p-n}^{(2)} c_n^{(1)}\right. \\
&\qquad \left. + \sqrt{k'}\, a_{p-n}^{(1)} c_n^{(2)}\right) - \varrho_3 \delta_3 b k^2 p i a a_p^{(3)} \\
[s=1] &= -\varrho_3 \delta_3 a k^2 p i a a_p^{(3)} \\
\frac{\Delta R_{\rm I}^{(1)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm I}^{(1)} \; [s=0] &= -\frac{1}{\Delta R} \varrho_2 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} \left(\sqrt{\frac{k'}{k}}\, c_p^{(2)} - \delta_2 b a_p^{(2)} \right) \\
[s=1] &= -\frac{1}{\Delta R} \varrho_2 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} \delta_2 a a_p^{(2)} \\
\frac{\Delta R_{\rm II}^{(1)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm II}^{(1)} \; [s=0] &= -\frac{1}{\Delta R} \varrho_2 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} a_p^{(2)} \\
\frac{\Delta R_{\rm III}^{(1)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm III}^{(1)} \qquad & 0 \\
\frac{\Delta R_{\rm I}^{(2)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm I}^{(2)} \; [s=0] &= -\frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 k'^2 \left(i a a_p^{(1)} + \delta_1 b a_p^{(1)} - \frac{k'^2}{k^2} \sqrt{\frac{1}{k}}\, c_p^{(1)} \right) \\
[s=1] &= \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 \delta_1 a a_p^{(1)} \\
\frac{\Delta R_{\rm II}^{(2)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm II}^{(2)} \; [s=0] &= -\frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} a_p^{(1)} \qquad\qquad (35) \\
\frac{\Delta R_{\rm III}^{(2)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm III}^{(2)} \; [s=0] &= \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 k'^2 a_p^{(1)} \\
\frac{\Delta R_{\rm I}^{(3)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm I}^{(3)} \; [s=0] &= \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_2 k'^2 \left(i a a_p^{(3)} + \delta_3 b a_p^{(3)} + \sqrt{k'}\, c_p^{(3)} \right) \\
[s=1] &= \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_2 k'^2 \delta_3 a a_p^{(3)} \\
\frac{\Delta R_{\rm II}^{(3)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm II}^{(3)} \qquad & = 0 \\
\frac{\Delta R_{\rm III}^{(3)}}{\Delta R} : \delta r_{\rm III}^{(3)} \; [s=0] &= -\frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_2 k'^2 a_p^{(3)}.
\end{aligned}
$$

9. Darstellung des polaren Teiles von $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch Θ-Quotienten.

Wir haben bereits hervorgehoben, daß die singulären Stellen der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ in den Punkten $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ liegen. Es sei s einer dieser Punkte; dann besteht jede der genannten Funktionen in der Umgebung von s aus einem

regulären Teile:

$$\sum_0^\infty{}^n\, a_n(\tau - s)^n,$$

einem polaren Teile:

$$\sum_1^C{}^\varkappa\, b_\varkappa(\tau - s)^{-\varkappa},$$

einem logarithmisch-polaren Teile:

$$\sum_0^{C'}{}^\varkappa \sum_1^L{}^\lambda\, c_{\varkappa\lambda}(\tau - s)^{-\varkappa}[ln(\tau - s)]^\lambda,$$

dabei sind C, C' und L ganze positive Zahlen, die von lmn abhängen. Der reguläre und der polare Teil sind eindeutig, der logarithmisch-polare Teil ist mehrdeutig.

Der Untersuchung der Koeffizienten a, b, c (sie sind abhängig von T_1, T_2, T_3, $r_i(0)$, $\gamma_i(0)$) muß eine solche formale Darstellung der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ vorangehen, welche die Punkte s besonders hervorhebt Wir werden hier zeigen, daß der polare Teil, wenn wir einen Abschnitt des regulären Teiles hinzunehmen, durch endliche Reihen von Θ-Quotienten dargestellt werden kann, die in der ganzen komplexen Ebene des $\tau(t)$ gelten.

Wir schicken die Erörterung einiger Funktionen voraus, die bei der Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ auftreten und deren Darstellungsformeln uns dort nützlich sein werden.

Es sei

$$f_1(\tau) = \frac{d^{\varkappa+\lambda}}{d\tau^{\varkappa+\lambda}}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau + \mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right)\frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\left(\frac{\Theta_\beta(\tau + \nu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right)$$

$$\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

μ und ν ganze positive oder negative Zahlen; $i = +\sqrt{-1}$; ω reell und zwar $0 < \omega < K'$.

$f_1(\tau)$ ist eine doppeltperiodische Funktion erster oder zweiter Art mit einem Pole von der Ordnung $2\varkappa + \lambda + 2$ an den Stellen $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$.

Die Multiplikatoren sind:

$$\mu_{2K} = \{\alpha\beta\}_{2K}$$
$$\mu_{2iK'} = \{\alpha\beta\}_{2iK'} \cdot e^{-\frac{i\pi}{K}(\mu+\nu)i\omega}$$

wobei

$$\{\alpha\beta\}_{2K} = \pm 1; \quad \{\alpha\beta\}_{2iK'} = \pm 1.$$

Je nachdem diese Multiplikatoren der Bedingung

$$\pi(\mu+\nu)\omega + K ln\{\alpha\beta\}_{2iK'} - iK' ln\{\alpha\beta\}_{2K} = 0\,^{1)} \qquad (\mathrm{I})$$

genügen oder nicht, gehört $f_1(\tau)$ in verschiedene Darstellungsklassen. Wir haben 4 Fälle zu betrachten:

1. $\{\alpha\beta\}_{2K} = 1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = 1$, dann lautet Gleichung (I):
$$\pi(\mu+\nu)\omega = 0; \text{ d. h. } \mu+\nu = 0,$$
$f_1(\tau)$ ist eine doppeltperiodische Funktion erster Art.

2. $\{\alpha\beta\}_{2K} = +1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = -1$, also
$$\pi(\mu+\nu)\omega + i\pi K = 0; \text{ d. h. } \mu+\nu = 0 \text{ und } K = 0,$$
dieser Fall ist unmöglich.

3. $\{\alpha\beta\}_{2K} = -1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = -1$, also
$$\pi(\mu+\nu)\omega - i\pi K + K'\pi = 0; \text{ d. h. } K = 0 \text{ usw.},$$
dieser Fall ist unmöglich.

4. $\{\alpha\beta\}_{2K} = -1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = +1$, also
$$\pi(\mu+\nu)\omega + K'\pi = 0; \text{ d. h. } (\mu+\nu)\omega + K' = 0,$$
dieser Fall ist unmöglich, da $0 < \omega < K'$.

$f_1(\tau)$ ist also eine doppeltperiodische Funktion erster Art, wenn Gleichung (I) erfüllt ist, oder eine der zweiten Art und zwar der Hermiteschen Klasse, wenn Gleichung (I) nicht erfüllt ist.

---

1) Hauptwert des ln.

Wir betrachten eine zweite Funktion

$$f_2(\tau) = \frac{d^{\varkappa+\lambda}}{d\tau^{\varkappa+\lambda}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right)\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right).$$

Sie hat einen Pol von der Ordnung $2\varkappa+\lambda+2$ an den Stellen $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ und ist eine doppeltperiodische Funktion zweiter Art von der Klasse Hermites.

Eine dritte Funktion

$$f_3(\tau) = \frac{d^{\varkappa+\lambda}}{d\tau^{\varkappa+\lambda}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right)\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right)$$

hat dieselben Singularitäten wie die vorangehenden und ist doppeltperiodisch der ersten Art. Die Funktionen $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ lassen sich nach der Theorie der elliptischen Funktionen in anderen Formen darstellen, so daß ihr Verhalten an den singulären Stellen zu deutlicherem Ausdruck kommt.

Es sei in der Umgebung des Punktes $\tau = iK'$:

$$\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)} = \frac{\vartheta_\alpha(\mu)}{\tau - iK'} + \vartheta_\alpha(\mu)_0 + \vartheta_\alpha(\mu)_1(\tau - iK') + \vartheta_\alpha(\mu)_2(\tau - iK')^2 + \cdots$$

$$\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right) = (-1)^{\varkappa}\frac{\vartheta_\alpha(\mu)\cdot\varkappa!}{(\tau-iK')^{\varkappa+1}} + \varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa} + \frac{(\varkappa+1)!}{1!}\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+1}(\tau-iK') + \cdots$$

$$\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)} = \frac{\vartheta}{\tau-iK'} + \vartheta_0 + \vartheta_1\cdot(\tau-iK') + \vartheta_2\cdot(\tau-iK')^2 + \cdots$$

$$\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right) = (-1)^{\varkappa}\cdot\frac{\varkappa!\,\vartheta}{(\tau-iK')^{\varkappa+1}} + \varkappa!\,\vartheta_{\varkappa} + \frac{(\varkappa+1)!}{1!}\vartheta_{\varkappa+1}\cdot(\tau-iK') + \cdots$$

Dann gestaltet sich die Darstellung von $f_1(\tau)$ so:

$$f_1(\tau) = \sum_{0}^{2\varkappa+\lambda+1}{}_{\xi}\, c^{(\alpha,\beta;\,\mu\nu)}_{\varkappa,\lambda\;\xi}\,\frac{d^{\xi}}{d\tau^{\xi}}\left(\frac{\Theta_{(\alpha\beta)}(\tau+(\mu+\nu)i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{36}$$

wobei

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha);\ (1, 2) = 3;\ (2, 3) = 1;\ (3, 1) = 2$$
$$(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 0;\ (1, 0) = 1;\ (2, 0) = 2;\ (3, 0) = 3$$

diese Formel (36) gilt für den Fall, daß nicht gleichzeitig $\mu + \nu = 0;\ (\alpha\beta) = 0$.

Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, ist:

$$f_1(\tau) = d^{(\alpha;\,\mu,\nu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,0} + \sum_1^{2\varkappa+\lambda+1}{}^{\xi}\, d^{(\alpha;\,\mu\,\nu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,\xi} \frac{d^\xi}{d\tau^\xi}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{36 a}$$

(das Residum verschwindet).

Die Konstanten c und d sind durch folgende Gleichungen bestimmt, die sich durch Gegenüberstellung der Laurentschen Reihen ergeben.

(Die Indices $(\alpha, \beta;\ \mu, \nu)$ sowie $\varkappa$, λ werden wir hier nicht schreiben.)

$$c_{2\varkappa+\lambda+1}(2\varkappa+\lambda+1)!\,\vartheta_{(\alpha\beta)}(\mu+\nu) = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)$$
$$c_\xi[\xi = 2\varkappa+\lambda \text{ bis } \varkappa+\lambda+1] = 0$$
$$c_{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\,\vartheta_{(\alpha\beta)}(\mu+\nu) = (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_\varkappa$$

. . . .

$$c_\varkappa \cdot \varkappa!\ \vartheta_{(\alpha\beta)}(\mu+\nu) = (-1)^\lambda(\varkappa+\lambda)!\,\frac{(\varkappa+\lambda)}{\lambda!}\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_{\varkappa+\lambda}$$
$$+ \varkappa!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)_\varkappa\vartheta_\beta(\nu)$$

usw.

$$d_{2\varkappa+\lambda+1}\cdot(2\varkappa+\lambda+1)!\,\vartheta = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)$$
$$[\alpha = \beta;\ \mu = -\nu]$$

. . . .

$$d_{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\,\vartheta = (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_\varkappa$$

. . . .

$$d_0 + \sum_1^{2\varkappa+\lambda+1}{}^{\xi}\, d_\xi \cdot \xi!\ \vartheta_\xi = (-1)^{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\,\frac{(2\varkappa+\lambda+1)!}{(\varkappa+\lambda+1)!}\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_{\varkappa+\lambda+1}$$
$$(-1)^\varkappa\,\varkappa!\,\frac{(2\varkappa+1)!}{(\varkappa+1)!}\,\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+1}\vartheta_\beta(\nu)$$
$$+ (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+\lambda}\vartheta_\beta(\nu)_\varkappa.$$

Die Funktion $f_2(\tau)$ läßt sich so schreiben:

$$f_2(\tau) = \sum_0^{2\varkappa+\lambda+1} \xi\, a^{(a,\mu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,\xi} \frac{d^\xi}{d\tau^\xi}\left(\frac{\Theta_a(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{37}$$

wobei

$$a_{2\varkappa+\lambda+1}(2\varkappa+\lambda+1)!\,\vartheta_a(\mu) = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta\cdot\vartheta_a(\mu)$$

. . . .

$$a_\varkappa\cdot\varkappa!\,\vartheta_a(\mu) = (-1)^\lambda(\varkappa+\lambda)!\frac{(\varkappa+\lambda)!}{\lambda!}\vartheta\cdot\vartheta_a(\mu)_{\varkappa+\lambda}$$
$$+\varkappa!\,\varkappa!\,\vartheta_\varkappa\cdot\vartheta_a(\mu)$$

usw.

Endlich ist

$$f_3(\tau) = b_{\varkappa,\lambda\,|\,0} + \sum_1^{2\varkappa+\lambda+1} \xi\, b_{\varkappa,\lambda\,|\,\xi} \frac{d^\xi}{d\tau^\xi}\left(\frac{\dot\Theta_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{38}$$

wobei

$$b_{2\varkappa+\lambda+1}(2\varkappa+\lambda+1)! = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta$$

. . . .

$$b_0 + \sum_1^{2\varkappa+\lambda+1}\xi\, b_\xi\cdot\xi!\,\vartheta_\xi = (-1)^{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\frac{(2\varkappa+\lambda+1)!}{(\varkappa+\lambda+1)!}\vartheta\cdot\vartheta_{\varkappa+\lambda+1}$$
$$(-1)^\varkappa\cdot\varkappa!\frac{(2\varkappa+1)!}{(\varkappa+1)!}\vartheta_{\varkappa+1}\cdot\vartheta$$
$$+(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_{\varkappa+\lambda}\vartheta_\varkappa.$$

Nach dieser Vorbereitung führen wir den formalen Aufbau des polaren Hauptteiles der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ aus.

Die Elementarfunktionen schreiben wir in einer allgemeineren Form, die später einen besseren Überblick über die wesentlichen Punkte gewährt. Nämlich:

$$\begin{aligned} R^{(i)}_{000} &= \sum_1^3 e\, r^{(i)}_{000\,|\,e}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \\ R^{(i)}_j &= \sum_1^3 e\, r^{(i)}_{j\,|\,e}\frac{d}{d\tau}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \end{aligned} \tag{39}$$

$\dfrac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R}$ erhält dieselbe Form wie $R^{(i)}_{000}$ mit den Koeffizienten $\delta r^{(i)}_{j\,|\,e}$.

Ferner:

$$\begin{aligned} G^{(i)}_{000} &= \sum_1^3 e\, g^{(i)}_{000\,|\,e}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} + \sum_0^3 e\, g^{(i)}_{000\,|\,e,1}\frac{\Theta_e(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)} \\ &+ \sum_0^3 e\, g^{(i)}_{000\,|\,e,-1}\frac{\Theta_e(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}. \end{aligned} \tag{39a}$$

Dieselbe Form erhält $G_j^{(i)}$, mit den Koeffizienten $g_{j\,|\,e}^{(i)}$ usw. und $\frac{\Delta G_j^{(i)}}{\Delta G}$, mit den Koeffizienten $\delta g_{j\,|\,e}^{(i)}$ usw.

Die aus den Elementarfunktionen abgeleiteten Funktionen $\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)}$, $\mathfrak{G}_{lmn}^{(i)}$, $P_{lmn}^{(j)}$, $\Gamma_{lmn}^{(j)}$, $R_{lmn}^{(i)}$, $G_{lmn}^{(i)}$ erhalten die gemeinsame Form:

$$\left\{\begin{aligned} & c_{lmn}^{(i)} + \sum_1^C{}^{\varkappa}\, c_{lmn\,|\,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\dot\Theta_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + \sum_1^3{}^{e} \sum_0^C{}^{\varkappa}\, c_{lmn\,|\,e,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + \sum_0^3{}^{e} \sum_1^N{}^{\nu} \sum_0^C{}^{\varkappa}\, c_{lmn\,|\,e,\nu,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\Theta_e(\tau+\nu i\omega)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + \sum_0^3{}^{e} \sum_1^N{}^{\nu} \sum_0^C{}^{\varkappa}\, c_{lmn\,|\,e,-\nu,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\Theta_e(\tau-\nu i\omega)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + L\ [\text{logarithmisch-polarer Teil und regulärer Teil}]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Die Koeffizienten c, die wir für die einzelnen Funktionen mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen werden, sind Funktionen von $t(\tau)$; sie sind an den Stellen

$$\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$$

regulär, haben jedoch Pole an den Stellen

$$\tau = 2mK + 2m'iK', \quad \tau = K + 2mK + 2m'iK'$$

und

$$\tau = K + iK' + 2mK + 2m'iK'.$$

Diese Singularitäten der c müssen sich mit entgegengesetzten in L aufheben.

Die Zahlen C und N sind abhängig von $l + m + n$.

Die Elementarfunktionen haben bereits die — sehr vereinfachte — Form (40).

Wir setzen $l + m + n = P$; $\alpha + \beta + \gamma = A$.

Wir leiten nun die Funktionen $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ in der Form (49) ab, unter der Voraussetzung, daß alle $R_{l-\alpha,m-\beta,n-\gamma}^{(i)}$, $G_{l-\alpha,m-\beta,n-\gamma}^{(i)}$, wobei n i c h t gleichzeitig $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, bekannt sind und zwar in der Form (40).

Dabei ist

$$\begin{aligned} &\text{für } R^{(i)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma}: C = 5(P-A)-3;\ N = 3(P-A)-2 \\ &\text{für } G^{(i)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma}: C = 5(P-A)-1;\ N = 3(P-A)+1. \end{aligned} \tag{41}$$

Die Funktionen $\mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}$ und $\mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}$ enthalten dann nach Gleichung (5) eine Summe von Produkten von Funktionen der Form (40); diese werden mit den Formeln für $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ [Gleichung (36), (37), (38)] umgewandelt, so daß sie beide wiederum die Form (40) erhalten. Es wird dabei

$$\begin{aligned} &\text{für } \mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}: C = 5P-5;\ N = 3P-2 \\ &\text{für } \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}: C = 5P-2;\ N = 3P-1. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Koeffizienten werden durch Formeln dieser Art berechnet (hier treten die Größen $c^{(\alpha\beta,\mu\nu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,\xi}$ usw. auf):

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^{(i)}_{lmn} &= \sum\nolimits_{\alpha\beta\gamma} r^{(i+1)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma}\, r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma} \\ &+ \sum\nolimits_{\varkappa+\lambda,\varkappa} \sum\nolimits_{\alpha\beta\gamma} r^{(i+1)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma\,|\,\varkappa+\lambda}\, r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\,\varkappa} \cdot b_{\varkappa,\lambda\,0} \\ &+ \sum\nolimits_{e} \sum\nolimits_{\nu} \sum\nolimits_{\varkappa+\lambda,\varkappa} \sum\nolimits_{\alpha\beta\gamma} r^{(i+1)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma\; e,\nu,\,\varkappa+\lambda} \cdot r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\; e,\,-\nu,\,\varkappa}\, d_{\varkappa,\lambda\,0} \\ &+ \frac{1}{T_i}\, d^{(i)}_{lmn} \quad \text{[vgl. Gleichung (5)]} \\ r^{(i)}_{lmn\;\varkappa+5P-5} &= \sum\nolimits_{\alpha\beta\gamma} r^{(i+1)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma\;\varkappa+\lambda} \cdot r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\;\varkappa} \cdot b_{\varkappa,\lambda\;\varkappa+\lambda+1} \\ &+ \sum_{1}^{3}{}_{e} \sum\nolimits_{\alpha\beta\gamma} r^{(i+1)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma\; e,\,\varkappa+\lambda}\, r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\; e,\,\varkappa} \cdot d^{(e,0)}_{\varkappa,\varkappa\;\varkappa+\lambda+1} \\ &+ \sum_{0}^{3}{}_{e} \sum\nolimits_{\nu} \sum\nolimits_{\alpha\beta\gamma} r^{(i+1)}_{l-\alpha,\, m-\beta,\, n-\gamma\; e,\nu,\,\varkappa+\lambda}\, r^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma\; e,\,-\nu,\,\varkappa}\, d^{(e,\nu,\,-\nu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,\varkappa+\lambda+1} \end{aligned} \tag{43}$$

wobei

$$\varkappa + \lambda = 5(P-A)-3;\quad \varkappa = 5A-3 \quad \text{usw.}$$

Nach Vorschrift der Gleichung (7) werden mittels der Gleichung (39) die Integranden von $P^{(j)}_{lmn}$ und $\Gamma^{(j)}_{lmn}$ in derselben Form (40) abgeleitet und daraus durch partielle Integration, eine endliche Anzahl mal ausgeführt, die Funktionen $P^{(j)}_{lmn}$ und $\Gamma^{(j)}_{lmn}$ selbst gewonnen. Dabei entstehen Glieder des polaren Teiles nur durch Integration von Gliedern der Form $c_\varkappa \dfrac{d^\varkappa f}{d\tau^\varkappa}$, wenn $\varkappa > 1$.

Die letztgenannten Funktionen erhalten also wiederum die Form (40) und zwar ist

$$\begin{aligned} &\text{für } P^{(j)}_{lmn}: C = 5P - 5;\; N = 3P - 2 \\ &\text{für } \Gamma^{(j)}_{lmn}: C = 5P - 2;\; N = 3P. \end{aligned} \tag{44}$$

Schließlich geben die Gleichungen (6) die gesuchten Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ wiederum in der Form (40) und es ist

$$\begin{aligned} &\text{für } R^{(i)}_{lmn}: C = 5P - 3;\; N = 3P - 2 \\ &\text{für } G^{(i)}_{lmn}: C = 5P - 1;\; N = 5P + 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Gleichungen (45) sind dieselben wie Gleichung (41), wenn $P - A$ an die Stelle von P tritt.

Für $P = 1$ lassen sich die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ leicht in der Form (40) darstellen; nach unserer Auseinandersetzung haben sie also für alle $P = 1, 2, 3 \ldots$ diese Form (40).

Wir haben diese Betrachtung kurz gefaßt; die Ausführung ins einzelne verlangt die Mitteilung längerer Formeln. Das Wesentliche ist gezeigt: die Form der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$, insbesondere ihrer polaren Hauptteile und die Möglichkeit und Methode, diese aufzubauen.

Eine eingehende Untersuchung über das Verhalten der Funktionen an den singulären Stellen müssen wir für eine andere Arbeit vorbehalten.

Inhalt.