

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1914. Heft II

Mai- bis Julisitzung.

---

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Über die Erscheinung bei der Beobachtung der Speichen eines hinter parallelen Stäben bewegten Rades, genannt das Staketphänomen.

Von **Ludwig Burmester.**

Mit 2 Tafeln.

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Juni 1914.

1. Wenn ein Wagen hinter einem Staket schnell vorüberfährt, erscheint für den Beobachter an dem Rade ein strauchartiges Gebilde von krummen Streifen, das gleichsam aus der Nabe des Rades herauswächst und sich in unveränderter Stellung mit dem Wagen fortbewegt. Über diese Erscheinung, die *Staketphänomen* genannt wird, wurde im Jahre 1820 von einem Unbenannten kurz berichtet und die in Abb. 1 gegebene Skizze dieses Gebildes mitgeteilt<sup>1)</sup>. Hierauf hinweisend hat *Roget*<sup>2)</sup> im Jahre 1824 diese Erscheinung behandelt und die in Abb. 2 gegebene Skizze gezeichnet. Er hat die Kurven, die den krummen Streifen entsprechen, konstruiert und die Gleichung dieser Kurven angegeben. Die Entstehung der krummen Streifen hat er durch die Nachdauer der auf das Auge wirkenden Lichteindrücke insofern unrichtig erklärt, daß er fälschlich annimmt: diese Lichteindrücke kämen

<sup>1)</sup> Quarterly Journal of Science, London 1821, Vol. X, p. 282 in einem Brief von 1. Dezember 1820 an den Verleger.

<sup>2)</sup> Philosophical Transaction, London 1825, p. 141, vorgelesen am 9. Dezember 1824. Auch gleichlautend in Annals of Philosophy, London 1825, p. 107. Deutsch in Poggendorffs Annalen 1825, Bd. 5, S. 93.

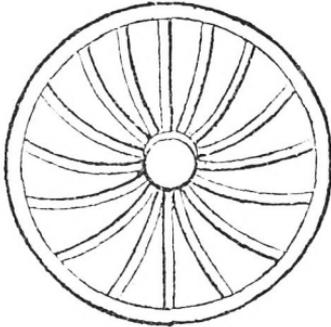


Abb. 1.

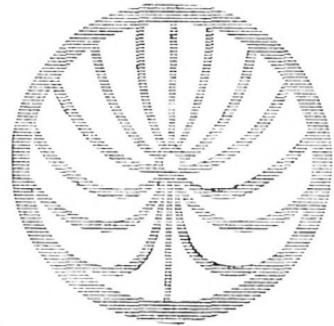


Abb. 2.

von den Teilen der Speichen des Rades, die sich zwischen den Stäben des Stakets befinden. Denn diese krummen Streifen sind in Bezug auf den Wagen die Bahnen, in denen sich die von den Stäben und den Speichen gebildeten Kreuzungsstellen als Deckflächen bewegen; und diese schnell bewegten Deckflächen erzeugen infolge der Nachdauer ihrer Lichteindrücke die als krumme Streifen wahrnehmbaren Bahnen. Ferner ist es ein verwirrender Irrtum, daß Roget diese Bahnen der Deckflächen für Truggebilde der Speichen hält. Sonach befindet sich in seiner Abhandlung manches Unrichtige, das traditionell geworden ist, weil es bisher keine Berichtigung erfahren hat. Deshalb ist es der Zweck der folgenden Darlegungen: das Verständnis des Staketphänomens durch theoretische Untersuchung und experimentelle Beobachtung zu fördern.

2. Behufs der theoretischen Betrachtung werden die Stäbe sowie die Speichen durch gerade Linien ersetzt und somit jene Deckflächen durch Deckpunkte vertreten, die sich zeichnerisch als Schnittpunkte dieser Linien ergeben. Die Bahnen dieser Schnittpunkte sind dann die Kurven, die den Streifen des strauchartigen Gebildes entsprechen. Die Entstehung dieser Kurven wird vermittels eines gedachten, in Fig. 1, Taf. I schematisch gezeichneten fünfgliedrigen Mechanismus kinematisch veranschaulicht, dessen Bewegung infolge der konstruktiven Anordnung der Glieder zwar begrenzt ist, aber theoretisch beliebig weiter fortgesetzt werden kann.

Das Staket wird als Glied durch die Schiene  $S$  vertreten, die zunächst nur einen auf ihr senkrechten Stab  $s$  und außerdem eine Hülse  $h$  trägt. Das Wagengestell wird als Glied durch die Stange  $W$  ersetzt, die in der Hülse  $h$  parallel zu  $S$  verschiebbar ist und eine Achse  $A$  trägt. Um diese Achse dreht sich als Glied das hinter dem Staket befindliche Rad  $R$  des Wagens, das vorerst nur zwei in einer Speichengeraden  $g$  liegende Speichen  $\sigma$ ,  $\sigma'$  enthält und mit seinem Felgenreif als Rollkreis  $\varkappa$  auf der Schiene  $S$  rollt. Damit bei dem Rollen kein Rutschen eintritt, können wir uns das Rad sowie die Schiene mit ineinandergreifenden Zähnen versehen denken. Um den Deckpunkt  $D$  des Stabes  $s$  und der Speiche  $\sigma$  kinematisch zu verwirklichen, sind auf dem Stab und auf der Speiche die Hülsen  $h_s$ ,  $h_\sigma$  als Glieder angebracht, die zwischen sich in  $D$  durch eine Achse drehbar verbunden sind. Die Hülse  $h_\sigma$  trägt hinten einen konachsialen Schreibstift, der die Bahn des Deckpunktes  $D$  auf einem an dem Gliede  $W$  befestigten Kartonblatt beschreibt. Diese Bahn vertritt den Streifen, den die Deckfläche als Bahn erzeugt.

Bei diesem fünfgliedrigen Mechanismus betrachten wir zunächst das Glied  $S$ , also das Staket, als festgestellt. Wird nun das Glied  $W$ , das Wagengestell, in der Richtung des Pfeiles  $f_w$  bewegt, dann dreht sich das rollende Rad  $R$  im Sinne des Pfeiles  $f_r$ . Bei dieser Bewegung gleitet der Deckpunkt  $D$  längs des ruhenden Stabes  $s$  und längs der bewegten Speiche  $\sigma$ , und der Schreibstift zeichnet auf dem mit dem Wagen bewegten Kartonblatt die Kurve  $\delta_\alpha$  als Bahn dieses Deckpunktes.

Wenn wir dagegen annehmen: das Glied  $W$ , also das Wagengestell mit dem Kartonblatt, sei festgestellt und es werde in der Richtung des Pfeiles  $f_s$  das Glied  $S$  mit der Hülse  $h$ , also das Staket, verschoben; dann bewegt sich auch der Stab  $s$  in dieser zu ihm senkrechten Richtung und das Rad mit der Speiche  $\sigma$  dreht sich um die feste Achse  $A$  wie vorhin im Sinne des Pfeiles  $f_r$ . Demnach zeichnet der Schreibstift die Kurve  $\delta_\alpha$  auf dem nun ruhenden Kartonblatt. Der Fußpunkt des Stabes  $s$  auf der Schiene  $S$  ist mit  $F$  und die Endpunkte

der Speichen  $\sigma$ ,  $\sigma'$  auf dem Rollkreis  $z$  sind mit  $\Phi$ ,  $\Phi'$  bezeichnet. Wir nehmen an, daß im Beginn des Verschiebens der Schiene  $S$  der Fußpunkt  $F$  in dem mit  $F'_0$  und auch mit  $\Phi_0$  bezeichneten Berührungspunkt der Schiene und des Rollkreises liegt, also der Stab in seiner Anfangslage  $F'_0 s_0$  durch den Achsenpunkt  $A$  geht, und daß ferner die Speichen  $\sigma$ ,  $\sigma'$  sich in den Anfangslagen  $\Phi_a \sigma_a$ ,  $\Phi'_a \sigma'_a$  auf der Speichengeraden  $g_a$  befinden, die mit  $AF'_0$  den Winkel  $\alpha$  bildet. Wird nun durch das Verschieben der Schiene  $S$  der Stab von  $F'_0 s_0$  in eine Lage  $F' s$  gebracht, dann dreht sich mit dem Rade die Speichengerade von  $g_a$  in die entsprechende Lage  $g$ , die infolge der Rollung durch den Bogen  $\Phi_a \Phi$  gleich der Strecke  $F'_0 F$  bestimmt ist. Demnach erzeugt der Deckpunkt  $D$  die Kurve  $\delta_a$ . Diese erstreckt sich einerseits ins Unendliche, wenn die Speiche  $\sigma$  in die auf  $S$  senkrechte Lage  $A \Phi_n$  und der Stab  $s$  in die entsprechende Lage  $F'_i s'_i$  gelangt; die durch die Strecke  $F'_0 F'_i$  gleich dem Bogen  $\Phi_a z \Phi_n$  bestimmt wird. Bei entgegengesetzter Verschiebung der Schiene  $S$  und Bewegung des Deckpunktes  $D$  längs der Speiche  $\sigma'$  erstreckt sich andererseits die Kurve  $\delta_a$  ins Unendliche, wenn die Speiche  $\sigma'$  in die auf  $S$  senkrechte Lage  $A \Phi_n$  und der Stab in die entsprechende Lage  $F'_i s'_i$  gelangt, bei welcher die Strecke  $F'_0 F'_i$  gleich dem Bogen  $\Phi'_a \Phi_n$  ist. Die beiden parallelen Geraden  $F'_i s'_i$ ,  $F'_i s'_i$ , deren Abstand gleich dem halben Umfang des Rollkreises  $z$  ist, sind Asymptoten der Kurven  $\delta_a$ , deren in der Figur auf Taf. II gezeichneten Nebenzweige  $\delta_{a1}$ ,  $\delta'_{a1}$  an diese Asymptoten anschließend aus dem Unendlichen kommen. Bei weiterer Rollung entstehen periodisch immer neue Nebenzweige. Infolge der Bewegung des Deckpunktes  $D$  längs der Speichengeraden  $g$  berührt ihre Anfangslage  $g_a$  die Kurve  $\delta_a$  in dem Achsenpunkt  $A$ .

Nach einer halben Umdrehung des Rollkreises gelangt die Speichengerade  $g$  wieder in die Lage  $g_a$ , und wenn von dem Stabe  $F$  im Abstände gleich dem halben Umfang des Rollkreises sich ein nachfolgender Stab  $F_p s_p$  befindet, so wird durch den Deckpunkt, den dieser Stab mit der Speichengeraden  $g$

bildet, dieselbe Bahn  $\delta_a$  während einer halben Umdrehung des Rades erzeugt; und der gleiche Vorgang erfolgt, wenn mehrere Stäbe in diesen gleichen Abständen voneinander stehen. Bewegt sich der Deckpunkt  $D$  so schnell, daß er das innerhalb des Rollkreises befindliche Bahnstück in einer kleineren Zeit erzeugt als die Zeit der Nachdauer der Lichteindrücke im Auge; dann entspricht diesem Bahnstück die als matt schimmernden krummen Streifen wahrnehmbare Bahn der Deckfläche.

Wenn nun das Rad eine gerade Anzahl Speichen enthält, die gleichen Teilbogen auf dem Rollkreis entsprechen, und die Stäbe in gleichen Abständen voneinander stehen, die den Längen dieser Teilbogen gleich sind; dann wird durch die Deckpunkte jeder nach der Speiche  $\sigma$  folgenden Speiche und jedes nach dem Stab  $s$  folgenden, entsprechenden Stabes dieselbe Bahn  $\delta_a$  erzeugt.

Von den bei dieser speziellen Anordnung sehr schnell nacheinanderfolgenden, in gleicher Bahn bewegten Deckflächen, die den Deckpunkten entsprechen, empfängt das Auge Lichteindrücke, die durch ihre physiologische Nachwirkung verschmelzen und die als krumme Streifen wahrnehmbare Bahn erzeugen, die wegen der dichteren Folge der Deckflächen besonders deutlich erscheint. Infolge dieser Darlegungen ist das Staketphänomen physiologisch erklärt, und der seit 90 Jahren traditionelle Irrtum berichtigt, daß die Bahnen der Deckflächen Truggebilde der Speichen seien<sup>1)</sup>.

1) Ebenso ist es auch ein Irrtum, wenn bei dem Plateauschen Anorthoskop, z. B. eine auf der transparenten Scheibe befindliche, nicht radiale Gerade durch einen der feinen Spalten der opaken Scheibe betrachtet wird, daß die Gerade gekrümmt als Truggebilde erscheine; denn auch hier wird durch das Anorthoskop bei entgegengesetzter Drehung der Scheiben die hyperbelartig gekrümmte Bahn richtig gesehen, die durch die Kreuzung des feinen Spaltes und der Geraden entsteht. Dagegen erscheinen Figuren, die auf der transparenten Scheibe gemalt sind, anorthoskopisch beobachtet schmaler oder breiter, je nachdem die Scheiben sich in ungleichem oder gleichem Sinn drehen.

Das in dieser Weise entstehende Staketphänomen hat P. Linke<sup>1)</sup> und nach ihm auch H. Lehmann<sup>2)</sup> als ein beweisendes Beispiel der Identitätstauschung betrachtet, bei der jede Bahn durch eine neu entstehende Bahn ersetzt werde; hiergegen kann aber eingewendet werden, daß fortdauernd neue Deckflächen die Bahn erzeugen.

3. Bezeichnet  $r$  den Radius des Rollkreises  $\alpha$  und  $p$  die Länge seines halben Umfanges, so ist  $p = r\pi$ . Diese Länge  $p$  wird konstruktiv bestimmt, indem wir die Gerade  $AG$  ziehen, die mit dem auf der Tangente  $S$  senkrechten Durchmesser  $\Phi_0\Phi_n$  den Winkel von  $30^\circ$  bildet und  $S$  in dem Punkt  $G$  trifft, ferner auf  $S$  die Strecke  $GH = 3r$  machen; dann ist die Strecke  $H\Phi_n = p$ .

Behufs der Konstruktion der Kurve  $\delta_\alpha$  machen wir auf  $S$  die Strecke  $F_0F'_n = H\Phi_n$ , teilen diese Strecke und den halben Rollkreis  $\Phi_n\alpha\Phi'_n$  in eine Anzahl  $n$  gleiche Teile; dann bestimmen, indem wir die Schiene  $S$  aus ihrer Anfangslage in der einen und der anderen Richtung um diese gleichen Strecken verschieben, die Schnittpunkte der in den Teilpunkten auf  $S$  senkrechten Lagen des Stabes und der durch die entsprechenden Teilpunkte des Rollkreises gehenden Geraden der Lagen der Speichen die Kurve  $\delta_\alpha$ . Wenn es für die Konstruktion dieser Kurve erforderlich ist, so können noch mehrere Schnittpunkte vermittels der in den Halbpunkten der Teilstrecken auf  $S$  senkrechten Geraden und der durch die entsprechenden Halbpunkte der Teilbogen gehenden Geraden konstruiert werden. Bei dieser Konstruktion wurde beispielsweise die Zahl  $n = 6$  und der Winkel  $\alpha = 30^\circ$  angenommen. Die Kurve  $\delta_\alpha$  ist hiernach durch den Radius  $r$  des Rollkreises oder dessen Umfang  $2p$  und den Winkel  $\alpha$ , den die Anfangslage  $\sigma_\alpha$  der Speiche  $\sigma$  mit  $A\Phi_0$  bildet, bestimmt.

Betrachten wir allgemein unabhängig von dem Rade nur die Speichengerade  $g$ , bezeichnen wir ihre Drehgeschwindigkeit

1) Physiologische Studien. Leipzig 1897, Bd. III, S. 393.

2) Die Kinematographie. Leipzig 1911.

mit  $\omega$  und die Geschwindigkeit der Schiene  $S$  mit  $v$ , dann ist für den kinematischen Rollkreis der Radius  $r = \frac{v}{\omega}$  und der halbe Umfang  $p = \frac{v}{\omega} \pi$ . Vermittels dieser Geschwindigkeiten kann dann an der Kurve  $\delta_\alpha$  die Normale  $DN$  im Punkt  $D$  konstruiert werden. Nehmen wir an, es sei  $\omega = 1$ , so ist  $v = r$ , ferner  $DA$  gleich der lotrechten Geschwindigkeit von  $D$  als Punkt der Speiche  $\sigma$  und die auf den Stab  $s$  abgetragene Strecke  $DV = r$  die lotrechte Geschwindigkeit von  $D$  als Punkt dieses Stabes. Demnach ergibt sich durch den Schnittpunkt  $N$  der in  $A$  auf  $\sigma$  und der in  $V$  auf  $s$  Senkrechten die Normale  $DN$  der Kurve  $\delta_\alpha$ <sup>1)</sup>.

Ziehen wir zu der Normalen  $ND$  die Parallele  $AQ$ , welche die Gerade  $S$  in dem Punkt  $Q$  trifft, dann ist  $AQ = ND$  wegen der rechtwinkligen kongruenten Dreiecke  $AF_0Q, DVN$ ; folglich ist auch das Dreieck  $ADQ$  dem bei  $A$  rechtwinkligen Dreieck  $DAN$  kongruent, und die Gerade  $DQ$  ist senkrecht auf der Speichengeraden  $g$ . Demnach ergibt sich auch, indem wir auf  $g$  die Senkrechte  $DQ$  bis an  $S$  ziehen, die Normale  $ND$  als Parallele zu  $AQ$ , und es ist  $AQ$  ein Durchmesser des durch die Punkte  $A, F_0, D$  gehenden Kreises  $q$ .

Die durch ihre Erzeugung definierte Kurve  $\delta_\alpha$  hat die Eigenschaft, daß die Länge eines zwischen zwei radialen Geraden befindlichen Bogens des Rollkreises gleich ist der auf  $S$  senkrechten Projektion des von diesen Geraden begrenzten Kurvenstückes, und umgekehrt; demzufolge wird dieser Bogen mittels dieser Kurve durch die entsprechende Projektionsstrecke gemessen. Deshalb nennen wir die Kurve  $\delta_\alpha$  eine Metroide und den Winkel  $\alpha$  ihren Phasenwinkel.

4. Um die Gleichung der Metroide  $\delta_\alpha$ , deren Phasenwinkel  $\alpha$  dem Bogen  $\Phi_0 \Phi_\alpha = a$  entspricht, in rechtwinkligen Koordinaten abzuleiten, betrachten wir die zu  $S$  Parallele  $AX$  als die positive  $x$ -Achse und die auf  $S$  Senkrechte  $AY$  als die

<sup>1)</sup> Siehe L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 52. Leipzig 1888.

positive  $y$ -Achse. Der Winkel  $\Phi_a A \Phi$ , welchen die durch einen beliebigen Punkt  $D$  der Metroide gehende Speichengerade  $y$  mit ihrer Anfangslage  $g_a$  bildet, ist mit  $\varphi$  bezeichnet. Die Koordinaten des Punktes  $D$  sind  $x = AP$ ,  $y = PD$ , und  $x$  ist gleich dem Bogen  $\Phi_a \Phi$ .

Hiernach ist

$$(1) \quad -y = x \cot(\alpha + \varphi),$$

ferner

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{p}, \quad \frac{\varphi}{\pi} = \frac{x}{p},$$

und folglich

$$(2) \quad y = -x \cot \left[ (\alpha + x) \frac{\pi}{p} \right],$$

die Gleichung der Metroide.

Denken wir uns die Koordinaten mit einem Faktor multipliziert, dann folgt aus dieser Gleichung der Satz:

Die Metroiden mit gleichem Phasenwinkel sind ähnlich.

Wenn  $180 - \alpha$  anstatt des Phasenwinkels  $\alpha$  in die Gleichung (1) gesetzt wird, ergibt sich die Gleichung

$$y = x \cot(\alpha - \varphi)$$

und ferner die Gleichung

$$(3) \quad y = x \cot \left[ (\alpha - x) \frac{\pi}{p} \right],$$

die eine bezüglich der  $y$ -Achse zu  $\delta_a$  symmetrische Metroide darstellt. Die Gesamtheit der Metroiden eines Staketphänomens nennen wir einen Metroidenstrauch, und die Gesamtheit der Phasenwinkel sein Phasenwinkelsystem, sonach folgt der Satz:

Der Metroidenstrauch wird von der durch den Achsenpunkt gehenden zu den Stäben parallelen Gerade symmetrisch geteilt, und die Metroidensträuche mit gleichem Phasenwinkelsystem sind ähnlich.

Die Gleichung (3) ergibt sich hiernach auch, wenn der Phasenwinkel  $\alpha$  negativ angenommen wird.

Aus der Gleichung (2) ergeben sich die Gleichungen zweier ausgezeichnete spezieller Metroiden, für welche die  $y$ -Achse eine Symmetralgerade ist.

Erstens, wenn der Phasenwinkel  $\alpha = 0$ , mithin  $a = 0$  ist, folgt die Gleichung

$$(4) \quad y = -x \cot \frac{x\pi}{p}$$

der Quadratrix des Dinostratus als eine spezielle Metroide.

Zweitens, wenn der Phasenwinkel  $\alpha = 90$ , mithin  $a = \frac{1}{2}p$  ist, folgt die Gleichung

$$(5) \quad y = x \tan \frac{x\pi}{p}$$

der speziellen Metroide, welche die  $x$ -Achse in dem Achsenpunkt  $A$  berührt.

5. In der Figur auf Taf. II sind für ein Rad mit 12 Speichen zwei mustergültige Metroidensträuche gezeichnet; der erste ist ausgezogen, der zweite strichpunktiert, wobei also  $\alpha = 30^\circ$  der Speichenwinkel ist. Für den ersten Metroidenstrauch ist das Phasenwinkelsystem  $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha$  angenommen. Behufs seiner Konstruktion teilen wir auf der Geraden  $S$  die Strecke  $F'_6 F_6$ , deren Länge gleich dem Umfang des Rollkreises  $x$  und deren Mitte der Punkt  $F'_0$  ist, in 12 gleiche Teile, so daß in den Teilpunkten und den Punkten  $F'_6, F_6$  13 Stäbe stehen, die auf der Strecke  $F'_6 F_6$  das Staket bilden; und hierzu sind in der Zeichnung beiderseits noch die beiden begrenzenden Stäbe gefügt. Damit bei der Zählung die Anzahl der Stäbe auf der Strecke  $F'_6 F_6$  mit der Anzahl der Speichen übereinstimmt, betrachten wir die beiden Stäbe in den Punkten  $F'_6, F_6$  als einen Stab; denn wenn wir uns die Strecke  $F'_6, F_6$  kreisförmig geschlossen denken, dann fallen diese beiden Stäbe in einen Stab zusammen. Durch die Schnittpunkte der Speichen mit den entsprechenden Stäben werden die ausgezogenen Metroiden des ersten Metroidenstrauches bestimmt. Wegen der

größeren Genauigkeit der Konstruktion dieser Metroiden sind noch die Zwischenpunkte verwendet, die sich als Schnittpunkte der gestrichelten parallelen Mittelgeraden zwischen den Stäben und der entsprechenden gestrichelten radialen Mittelgeraden zwischen den Speichen ergeben.

In diesem Metroidenstrauch entspricht dem Phasenwinkel  $0^\circ$  die Quadratrix  $\delta_0$ , zu der die Symmetralgerade  $\Phi_0 \Phi_6$  als doppelzählige Gerade gehört, weil in ihr zwei Speichen und der in  $F_0$  stehende Stab zusammenfallen. Demnach wachsen aus dem Achsenpunkt 12 Metroidentteile heraus, von denen die beiderseits zu  $\Phi_0 \Phi_6$  liegenden Metroidentteile die entsprechenden Speichen in dem Achsenpunkt berühren. Dem Phasenwinkel  $\alpha = 30^\circ$  entspricht die Metroide  $\delta_\alpha$  mit den Nebenzweigen  $\delta_{\alpha 1}$ ,  $\delta'_{\alpha 1}$ , die sich an die Geraden der in den Punkten  $F'_1, F''_1$  stehenden Stäbe asymptotisch anschließen; und zu dem Phasenwinkel  $-\alpha$  oder  $5\alpha$  gehört die zu  $\delta_\alpha$  symmetrische Metroide  $\delta_{-\alpha}$  mit den Nebenzweigen  $\delta_{-\alpha 1}$ ,  $\delta'_{-\alpha 1}$ . Ferner entspricht dem Phasenwinkel  $3\alpha = 90^\circ$  die Metroide  $\delta_{90}$  mit den Nebenzweigen  $\delta_{90,1}$ ,  $\delta'_{90,1}$ ; und diese Metroide berührt die zur Geraden  $S$  parallele Gerade  $W$  in dem Achsenpunkte.

Für den zweiten Metroidenstrauch ist das Phasenwinkel-system  $\frac{1}{2}\alpha, \frac{3}{2}\alpha, \frac{5}{2}\alpha, \frac{7}{2}\alpha, \frac{9}{2}\alpha, \frac{11}{2}\alpha$ . Demnach sind die gestrichelten Geraden, welche die Speichenwinkel halbieren, die Speichen. Durch die Schnittpunkte dieser Speichen mit den entsprechenden Stäben werden die strichpunktiierten Metroiden bestimmt, bei denen die Schnittpunkte der ausgezogenen Speichen mit den gestrichelten Mittelgeraden zwischen den Stäben die Zwischenpunkte für die genauere Konstruktion sind. Zu diesem strichpunktiierten Metroidenstrauch gehört die Quadratrix  $\delta_0$  und die Symmetralgerade  $\Phi_0 \Phi_6$  nicht als Metroide. In diesem gestrichelten Metroidenstrauch wachsen beiderseits von  $\Phi_0 \Phi_6$  je 6 Metroidentteile aus dem Achsenpunkt heraus.

Wenn wir bei den 12 ausgezogenen Speichen des Rades die gestrichelten parallelen Mittelgeraden auch als Stäbe des Stakets betrachten, so daß 24 Stäbe auf der Strecke  $F'_6 F_6$  stehen, oder wenn wir bei den 12 ausgezogenen Stäben auch

die gestrichelten radialen Mittelgeraden als Speichen des Rades betrachten, so daß es 24 Speichen enthält, dann erscheint in diesen beiden Fällen ein Metroidenstrauch, der aus jenen beiden Metroidensträuchern zusammengesetzt gebildet wird. Ferner erscheint dieser zusammengesetzte Metroidenstrauch bei 24 Speichen und 24 Stäben, bei dem die Metroiden durch die doppelte Anzahl und somit dichter aufeinanderfolgenden Deckpunkte erzeugt werden.

Aus der in Art. 3 abgeleiteten und in Fig. 1 ausgeführten Konstruktion der Normale  $DN$  an der Metroide  $\delta_a$  folgt, daß die Normalen der auf der Taf. II gezeichneten Metroiden in ihren Schnittpunkten mit der Geraden  $W$  durch den Endpunkt  $\Phi_6$  des auf der Geraden  $S$  senkrechten Durchmessers des Rollkreises gehen, daß ferner die Normalen der Nebenzweige in ihren Schnittpunkten mit der Geraden  $S$  durch den Achsenpunkt gehen; folglich sind diese Schnittpunkte die Wendepunkte der geschweiften Nebenzweige. Weil dort bewiesen ist, daß der Durchmesser  $AQ$  des durch die Punkte  $A$ ,  $F_0$ ,  $D$  gehenden Kreises  $q$  zu der Normalen  $ND$  parallel ist, so ergibt sich, daß jeder Kreis, der durch den Achsenpunkt und den Punkt  $F_0$  geht, die Metroiden in Punkten schneidet, in denen die Normalen an den Metroiden parallel sind. Von diesen Kreisen schneidet insbesondere der auf Taf. II punktiert eingezeichnete Kreis, dessen Mittelpunkt in der Symmetralgeraden liegt, die Metroiden in ihren Maximalpunkten, an denen die Tangenten parallel zur Geraden  $S$  sind. Es ist nicht der Zweck dieser Darlegungen, noch auf weitere Eigenschaften und auf die Beziehungen der Krümmungsradien der Metroiden des Metroidenstrauches einzugehen.

Nehmen wir noch allgemeiner an, daß die auf der Strecke  $F_6'F_6$  in den Teilpunkten stehenden Stäbe gegen die Geraden  $S$  geneigt sind, wie es bei vertikalen Stäben eines Stakets an einer steilen Fahrstraße vorkommt, dann verkleinern sich die Abstände dieser Stäbe und es entstehen unter den gleichen Phasenwinkelsystemen wie vorhin Metroidensträucher, die in demselben Verhältnis wie die Abstände verkleinert, ähnlich

sind zu den betreffenden vorigen Metroidensträuchern, und wobei die Symmetrallinie parallel zu den geneigten Stäben ist.

6. Bei den experimentellen Beobachtungen des Staketphänomens wurde die Fig. 2, Taf. I abgebildete Vorrichtung verwendet. Auf einer mit einem Einschnitt versehenen, hölzernen Leiste von 1,5 m Länge ist in diesem Einschnitt ein aus schwarzem Karton geschnittenes Staket mit 24 Stäben auf der Strecke gleich dem Umfang des Rollkreises befestigt, und zu Auswechslung dient ein zweites derartiges Staket mit 12 Stäben auf dieser Strecke. Die Länge der Stäbe ist 220 mm, die Breite 6 mm. Das Rad wird durch eine mit schwarzem Karton belegte, hölzerne Scheibe von 190 mm Durchmesser ersetzt, auf der ein aus weißem Karton geschnittenes, bei allen Beobachtungen verwendetes Rad mit 12 Speichen von 6 mm Breite konachsal festgeschraubt ist. An dem Rade befindet sich hinten ein konachsialer Ansatz von 90 mm Durchmesser mit einer Rille zum Einlegen einer Schnur, die zur Erzeugung des Freilaufens des Rades verwendet wird. In einer Nute der Leiste ist ein hölzernes Gleitstück verschiebbar, das eine Säule trägt. Diese Säule ist mit einem kurzen Längsschlitz versehen, in dem als Lager für die Achse des Rades eine Hülse verstellbar ist und an der Säule festgeschraubt werden kann, so daß die Scheibe beim Verschieben des Gleitstückes in der Nute auf der Leiste rollt, die auf einem Tisch befestigt ist. An den Enden der Leiste stehen zwei auf ihr senkrechte Achsen mit Rollen, und an den Enden des Gleitstückes ist je eine Schnur befestigt, die über je einer der Rollen gelegt ist und von dem Beobachter behufs der Hin- und Herbewegung des Gleitstückes gezogen wird.

Wenn nun das Gleitstück mit dem rollenden Rade hinter dem Staket schnell bewegt wird, dann erscheint das Staketphänomen. Nach vielen Versuchen mit verschiedenen Kombinationen hat sich ergeben, daß bei schwarzen Stäben und weißen Speichen auf dunkler Unterlage die Erscheinung am deutlichsten ist. Wird die Scheibe frei von dem Staket um ihre Achse schnell

gedreht, dann erzeugen die weißen Speichen eine grauschimmernde, nach der Achse hin heller werdende Kreisfläche, auf der bei der Bewegung des Rades hinter dem Staket die Bahnen der Deckflächen als schwarze Streifen wahrgenommen werden. Zum Erscheinen des Streifengebildes ist eine schnelle Bewegung des Gleitstückes erforderlich. Dieses Streifengebilde verändert sich nicht, ob alsdann die Bewegung des Gleitstückes schneller oder langsamer, ob sie in der einen oder der anderen Richtung erfolgt, weil infolge der Rollung des Rades der Berührungspunkt desselben an der Leiste sich mit dieser in gleichem Sinn bewegt, und das Verhältnis der Geschwindigkeit des Gleitstückes zu der Drehgeschwindigkeit des Rades konstant ist.

Wenn das Gleitstück mit zwei Schraubzwingen auf einem Tisch festgeschraubt und die Leiste mit dem Staket schnell verschoben wird, dann erscheint das Streifengebilde in ruhender Stellung, und es kann besser beobachtet werden als in seiner fortschreitenden Bewegung. In dieser ruhenden Stellung wurden die photographischen Momentaufnahmen des Streifengebildes in  $\frac{1}{30}$  Sekunde ermöglicht, Bei dem Staket mit 12 Stäben hat sich das Bild mit 12 Streifen in Fig. 3, Taf. I ergeben, das dem ähnlich vergrößerten, ausgezogenen Metroidenstrauch in der Figur auf Taf. II entspricht. In diesem Bilde liegt der obere gerade Streifen genau zusammen mit der Symmetralgeraden, während der untere Streifen verschwommen verbreitert von ihr abweicht. Um diese Abweichung zu erklären, ist zu beachten, daß in dem unteren Teil des Rades die Drehung der Speichen und die Bewegung der Stäbe im gleichen Sinn, in dem oberen Teil aber im entgegengesetzten Sinn erfolgt, und daß hier anorthoskopische Einflüsse mitwirken. Denn wir können die Vorrichtung auch als ein besonderes, jedoch unvollkommeneres Anorthoskop betrachten, in dem die verhältnismäßig weiten Zwischenräume der Stäbe die schmalen radialen Spalten des Plateauschen Anorthoskops vertreten. Demzufolge erscheint nach der Anmerkung <sup>1)</sup> S. 145 in dem unteren Teil wegen jener gleichsinnigen Bewegung eine Breiterung, dagegen im oberen Teil wegen jener gegen-

sinnigen Bewegung eine Schmälerung der Deckflächen, die die Streifen erzeugen. Bei dem Staket mit 24 Stäben hat sich durch gleiche Momentaufnahme das Bild mit 24 Streifen in Fig. 4 ergeben, das dem in Fig. 7 zum Vergleich gezeichneten Metroidenstrauch entspricht, in dem keine Streifen mit der Symmetrallinie zusammenliegen.

Wird nun die Achse der Scheibe in dem Schlitz der Säule höher gelegen festgeschraubt, und vermittelt einer in der Rille aufgewickelten Schnur durch einen schnellen Zug mit der Hand die Scheibe in schnellen Freilauf versetzt, dann erscheint, je nachdem die Verschiebung des Stakets in gleichem Sinn mit der Bewegung der unteren oder der oberen Speichen erfolgt, das Streckengebilde mit seinen Streifen nach oben oder nach unten gewendet. Bei dem Freilauf ist für den kinematischen Rollkreis der Radius  $r = \frac{v}{\omega}$ ; und je größer die Drehgeschwindigkeit  $\omega$  des Rades im Verhältnis zu der Verschiebgeschwindigkeit  $v$  des Stakets ist, desto kleiner ist dieser Radius und das Bild des Streifengebildes, so daß innerhalb des Felgenkreises des Rades auch geschweifte Nebenstreifen erscheinen. Bei einem Freilauf hinter dem Staket mit 12 Stäben hat sich das verkleinerte Bild in Fig. 5 ergeben, in dem die Quadratrix nebst der Symmetriegeraden nicht vorkommt und das dem strichpunktierten Metroidenstrauch entspricht. Ferner hat sich bei schnellerem Freilauf das verkleinerte Bild in Fig. 6 ergeben, das die Quadratrix nebst der Symmetralgeraden enthält und dem ausgezogenen Metroidenstrauch entspricht. Während eines Freilaufs muß das Staket versuchsweise sehr oft hin- und hergeschoben werden bis die günstige Zeit eintritt, in der einer dieser Metroidensträuche für die Momentaufnahme erscheint.

In der Wirklichkeit ist bei dem Erscheinen der Staketphänome die Anzahl der Stäbe des Stakets auf der Strecke gleich dem Radumfang zu der Anzahl der Speichen des Rades nicht in so einfachen Verhältnissen wie bei den gezeichneten Metroidensträuchern. Zum Zwecke der Beobachtungen der

Staketphänome, wie sie zuweilen gesehen werden, wurden an einem Fußweg verschiedene Stakete hergestellt, bei denen diese Verhältnisse weniger einfach waren, und hinter diesen Staketen wurde ein Karren mit zwölfspeichigen Rädern möglichst schnell vorüber geschoben. Es erschienen dann Staketphänome mit zahlreichen undeutlichen und nicht unterschiedbaren Bahnen der Deckflächen. Das ist theoretisch auch begründet. Denn, wenn die Bahnen nur durch je eine Deckfläche erzeugt werden, wie es solchen Verhältnissen entspricht, so sind die Bahnen sehr zahlreich, schwach sichtbar und dicht nebeneinander. Dagegen erschienen die Staketphänome bei den Anordnungen der Stakete gemäß jenen einfachen Verhältnissen in deutlicher Sichtbarkeit, die also nur dann vorkommt, wenn zufällige derartige Verhältnisse stattfinden.

---



