Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zum Turbulenzproblem.

Von **O. Blumenthal** in Aachen.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Dezember 1913.

In diesen Akademieberichten hat kürzlich Herr Fritz Noether[1]) einen neuen Weg zur Behandlung des Turbulenzproblems angegeben. Es handelt sich bei dieser Frage bekanntlich um den Nachweis, daß eine kritische Geschwindigkeit existiert, oberhalb deren die zweidimensionale, laminare Strömung einer reibenden Flüssigkeit in einem geraden Kanal instabil ist. Das Neuartige von Noethers Ansatz besteht darin, daß er endliche Störungen der Laminarströmung in Betracht ziehen will und dazu den Weg einschlägt, die Frage für nichtstationäre laminare Strömungen zu stellen und sie hier mit Hilfe der Methode der kleinen Schwingungen zu entscheiden, nachdem v. Mises und Haupt[2]) gezeigt haben, daß die stationäre Laminarströmung (Couette-Strömung) kleinen Schwingungen gegenüber bei allen Geschwindigkeiten stabil ist.

Als Beispiel wählt Herr Noether diejenige nichtstationäre Bewegung, die entsteht, wenn zur Ausgangszeit die Geschwindigkeiten über den Querschnitt nach einer kubischen Parabel

[1]) F. Noether, Über die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung. Sitzungsb. Akad. München, math.-phys. Klasse, Mai 1913.

[2]) R. v. Mises, Beitrag zum Oszillationsproblem, Festschrift Heinrich Weber (Leipzig, Teubner, 1912); O. Haupt, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems. Sitzungsb. Akad. München, math.-phys. Klasse, 1912. — Einen anderen Beweis derselben Tatsache hat im Winter 1912/13 L. Hopf in einem hydrodynamischen Seminar in Aachen vorgetragen.

verteilt sind. Er glaubt zu finden, daß diese Strömung bei genügend großer Geschwindigkeit instabil ist, indem sie sehr langwellige Störungsbewegungen von bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit zuläßt. Ich werde im folgenden nachweisen, daß dieses Resultat irrig ist. Es ist also immer noch kein Fall bekannt, in dem eine laminare Strömung in eine turbulente übergehen kann. Ich möchte aber ausdrücklich bemerken, daß ich aus diesem negativen Resultate kein abfälliges Urteil über F. Noethers allgemeine Methode herleiten möchte, die möglicherweise bei anderen Anwendungen zu den erstrebten Ergebnissen führen kann.

Ich habe mit besonderem Danke zu erwähnen, daß ich die erste Anregung zur Nachprüfung der Noetherschen Arbeit durch Herrn Th. v. Kármán erhalten habe, und daß ich bei den Entwicklungen der Abschnitte III und IV von Herrn L. Hopf bereitwillig und wirksam unterstützt worden bin.

I. Formulierung des Problems.

Mit Hilfe vereinfachender Überlegungen hat F. Noether die Frage nach der Instabilität der nichtstationären Bewegung in dem betrachteten Beispiele auf folgende Randwertaufgabe zurückgeführt:

Hat die Differentialgleichung

$$\frac{d^4 \varphi}{d y^4} = -i R \left(y^3 \frac{d^2 \varphi}{d y^2} - 6 y \varphi \right) \tag{1}$$

für gewisse reelle, positive Werte von R ein Integral, das bei $y = \pm \frac{1}{2}$ samt seiner ersten Ableitung verschwindet? Dabei hängt die Größe R eng mit der Reynoldsschen Zahl zusammen.

Zur Lösung dieser Randwertaufgabe bedient sich Noether der Potenzreihenentwicklung der Integrale um $y = 0$. Nun findet er auf diese Weise für R einen sehr großen Wert (rund 45000). Für solche R sind aber die Potenzreihen schwierig zu handhaben, da ihre Glieder zunächst zunehmen. Herr v. Kármán hat mich darauf hingewiesen, daß die von mir mehrfach benutzten Methoden der asymptotischen Integration[1]) hier nutzbar gemacht werden könnten. Diesen Gedanken führe ich im folgenden durch. Ich finde im Gegensatz zu Noether keinen Wert R, für den die Randwertaufgabe lösbar ist[2]). Dies ist das in der Einleitung ausgesprochene negative Ergebnis. An welcher Stelle sich bei Herrn Noether ein Fehler eingeschlichen hat, habe ich nicht zu ermitteln versucht, da ich sonst seine ganze mühsame, numerische Rechnung hätte wiederholen müssen. Es scheint mir aber, daß er die Schnelligkeit der Konvergenz seiner Potenzreihen überschätzt hat, so daß das Polynom 12. Grades, dessen Nullstellen er bestimmt (siehe S. 322, 323, Formeln (21)—(22)), noch keine Näherung an die Reihe darstellt[3]).

1. Ich habe für meine Untersuchungen vollständig andere Methoden anwenden müssen, als in meinen beiden oben erwähnten früheren Arbeiten. In der Tat ist die gestellte Randwertaufgabe der asymptotischen Behandlung nur schwer zugänglich. Dies liegt daran, daß die asymptotischen Entwicklungen am Punkte $y = 0$ ungültig werden. Nun lassen sich zwar die Entwicklungen formal ohne Schwierigkeit aufstellen, und es läßt sich auch jeder Entwicklung nach allgemeinen Methoden ein exaktes Integral der Differentialgleichung (1) zuordnen, das eine analytische Funktion von y und R ist, aber diese Zu-

[1]) Arch. f. Math. u. Phys. (3) 19 (1912), S. 136 ff.; Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62 (1914), S. 343 ff.

[2]) Diese Ausdrucksweise ist nicht ganz exakt. Die genaue Angabe meiner Resultate gebe ich S. 587 und 592.

[3]) Herr Noether, dem das Manuskript dieser Arbeit zur Durchsicht vorgelegen hat, teilt diese Ansicht. Er ermächtigt mich zu erklären, daß er in meiner Arbeit keinen Fehler gefunden habe. Er nimmt daher an, daß die in seiner Arbeit auf S. 323 unten ausgesprochene Vermutung über den restlichen Verlauf der Potenzreihe für die Determinante (21) irrig ist. Ihr allgemeines Gesetz sei nur in sehr unübersichtlicher Form angebbar, während in der vorliegenden Untersuchung die Restabschätzung auf der strengen Darstellung der Determinante durch bestimmte Integrale beruhe. Dagegen hält Herr Noether die enger gefaßte Schlußfolgerung auf S. 329 seiner Arbeit aufrecht und beabsichtigt, dies an anderer Stelle auszuführen.

ordnung gilt nur auf einem Halbstrahle durch den Nullpunkt, genauer, in einem gewissen Winkelraum, dessen Scheitel der Nullpunkt ist. Ist also ψ_1 ein der asymptotischen Entwicklung Ψ_1 auf der positiven reellen Achse zugeordnetes Integral, so wird auf der negativen reellen Achse dieses Integral nicht mehr Ψ_1, sondern einer linearen Kombination aller vier asymptotischen Entwicklungen zugeordnet sein. Diese „Übergangssubstitutionen" aber braucht man gerade zur Lösung einer Randwertaufgabe an den Punkten $y = \pm \frac{1}{2}$. Um sie zu gewinnen, habe ich den allgemeinen Weg verlassen müssen und zu dem speziellen Verfahren der Integration von (1) durch bestimmte Integrale gegriffen, das ja auch bei der Besselschen Differentialgleichung zu dem gleichen Zwecke angewandt wird. Die Integraldarstellung wird mir durch die Laplacesche Transformation geliefert[1]). Es erscheint mir sehr beachtenswert, daß die Gleichung (1) ein Beispiel ist, wo diese im allgemeinen recht „theoretische" Methode vollständig durchgeführt werden kann.

Zunächst läßt sich die Variable mit dem Parameter R zusammenfassen. Wir setzen

$$\eta = R^{\frac{1}{3}} y \tag{2'}$$

und erhalten:

$$\frac{d^4 \psi}{d\eta^4} + i\left(\eta^3 \frac{d^2\psi}{d\eta^2} - 6\eta\psi\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist vom Range 3[2]) und daher der Laplaceschen Transformation nicht unmittelbar zugänglich[3]); sie läßt sich aber durch die einfache Substitution

$$\xi = \tfrac{2}{5}\eta^{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{R}\, y^{\frac{5}{2}} \tag{3'}$$

auf den Rang 1 bringen und damit zugänglich machen.

---

[1]) Siehe z. B. Picard, Traité d'Analyse III, chap. XIV, 9—19 (2. Aufl.), S. 394—412.

[2]) Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I, S. 337—339.

[3]) Dies folgt aus den asymptotischen Entwicklungen der Integrale einer Gleichung vom Range $r > 1$; siehe Schlesinger, l. c., S. 355—356.

Man erhält die Gleichung

$$(3)\qquad \begin{aligned} &25\,\xi^3\psi'''' + 90\,\xi^2\psi''' + (25\,i\,\xi^3 + 39\,\xi)\psi'' \\ &\quad + (15\,i\,\xi^2 - \tfrac{3}{5})\psi' - 24\,i\,\xi\,\psi = 0, \end{aligned}$$

und die Randwertaufgabe formuliert sich wie folgt:

Gibt es ein Integral der Gleichung (3) und eine positive reelle Zahl x, so daß für $\xi = x$ und $\xi = x \cdot e^{\frac{5 i \pi}{2}}$ das Integral nebst seiner ersten Ableitung verschwindet?

II. Aufstellung der Integrale und der Übergangssubstitutionen.

2. Ein Integral der Gleichung (3) ist sofort bekannt. Es ist

$$\psi_0 = \xi^{\frac{6}{5}}.$$

Die übrigen werden mit Hilfe der Laplaceschen Transformation in Gestalt bestimmter Integrale dargestellt.

Der Ansatz der Laplaceschen Transformation besteht darin, eine Funktion $\nu(z)$ zu suchen, so daß

$$(4')\qquad \psi = \int e^{\varepsilon\,\xi\,z}\,\nu(z)\,dz, \qquad \varepsilon = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

bei geeigneter Bestimmung des Integrationsweges die Gleichung (3) befriedigt. Die linke Seite der Gleichung (3) wird, wenn man (4') einsetzt,

$$(4'')\qquad \begin{aligned} &[e^{\varepsilon\,\xi\,z} P(\xi, z, \nu)] \\ &-\int e^{\varepsilon\,\xi\,z}\left\{25 z^2(1-z^2)\nu''' + z(135-210 z^2)\nu'' + (96-399 z^2)\nu' - \frac{693}{5} z\,\nu\right\}dz. \end{aligned}$$

$P(\xi, z, \nu)$ bedeutet ein Polynom in ξ und z, dessen Koeffizienten Ableitungen von ν bis zur zweiten Ordnung sind. Die eckigen Klammern bedeuten, daß dieser Ausdruck zwischen den Grenzen des Integrals (4') zu nehmen ist. Diese Grenzen sind so zu bestimmen, daß an ihnen $e^{\varepsilon\,\xi\,z} \cdot P$ verschwindet. Außerdem hat ν der Differentialgleichung zu genügen:

$$(4)\qquad 25 z^2(1-z^2)\nu''' + z(135-210 z^2)\nu'' + (96-399 z^2)\nu' - \frac{693}{5} z\,\nu = 0.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist leicht zu finden, nämlich:

$$(4''') \qquad v_0 = z^{-\frac{11}{5}}.$$

Die Gleichung läßt sich damit in bekannter Weise reduzieren, indem man

$$(5') \qquad v = z^{-\frac{11}{5}} \int \omega \, d z$$

setzt. Es ergibt sich dann für ω die Gleichung zweiter Ordnung:

$$(5) \qquad 25 z^2 (1 - z^2) \omega'' - (30 + 45 z^2) \omega' + (30 - 3 z^2) \omega = 0.$$

Es ist ein glücklicher Zufall, daß diese Gleichung sich auf eine hypergeometrische zurückführen läßt. Dazu dienen die beiden Substitutionen

$$(6') \qquad \omega = z \cdot w, \qquad z^2 = \zeta.$$

Sie ergeben:

$$(6) \qquad \zeta (1 - \zeta) \frac{d^2 w}{d \zeta^2} + \left(\frac{9}{10} - \frac{12}{5} \zeta\right) \frac{d w}{d \zeta} - \frac{12}{25} w = 0,$$

eine hypergeometrische Differentialgleichung mit

$$\alpha = \tfrac{4}{5}, \qquad \beta = \tfrac{3}{5}, \qquad \gamma = \tfrac{9}{10}.$$

Die Fundamentalintegrale um die beiden Stellen 0 und 1 sind die folgenden:

$$\begin{aligned} w_1^{(0)} &= \mathfrak{P}(\zeta), & w_2^{(0)} &= \zeta^{\frac{1}{10}} \mathfrak{P}(\zeta) \\ w_1^{(1)} &= \mathfrak{P}(1 - \zeta), & w_2^{(1)} &= (1 - \zeta)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}(1 - \zeta), \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{P}$ mit dem konstanten Gliede 1 beginnende Potenzreihen mit reellen Koeffizienten bezeichnen und die Wurzeln für positive Werte des Arguments positiv gewählt werden sollen.

Es bestehen dann zwischen diesen Integralen die folgenden Fortsetzungsrelationen[1]:

---

[1]) Schlesinger, Handbuch I, S. 477—484.

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
w_1^{(1)} &= f\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{2}\right) w_1^{(0)} + f\left(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{3}{2}\right) w_2^{(0)}\\
w_2^{(1)} &= f\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2}\right) w_1^{(0)} + f\left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}\right) w_2^{(0)}\\
w_1^{(0)} &= f\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}\right) w_1^{(1)} + f\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right) w_2^{(1)}\\
w_2^{(0)} &= f\left(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{11}{10}\right) w_1^{(1)} + f\left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{10}\right) w_2^{(1)},
\end{aligned}
$$

wo $f(a, b, c)$ ein Quotient von Gaußschen Π-Funktionen (Γ-Funktionen) ist[1]):

$$
(7')\qquad f(a, b, c) = \frac{\Pi(c-1)\,\Pi(c-a-b-1)}{\Pi(c-a-1)\,\Pi(c-b-1)}.
$$

Wir haben jetzt die Aufgabe, zu den Integralen $\omega(z)$ und $v(z)$ der Gleichungen (5) und (4) und den zwischen ihnen bestehenden Fortsetzungsrelationen zurückzukehren. Die Gleichung (5) hat in der z-Ebene die drei singulären Stellen -1, 0, $+1$. Wir legen durch jede von diesen als Querschnitt den unter $\frac{5\pi}{4}$ gegen die positive reelle Achse geneigten Strahl und geben in der aufgeschnittenen Ebene allen Wurzeln der Form

$$
z^a,\quad (1+z)^a,\quad (1-z)^a
$$

solche Vorzeichen, daß sie für positive, reelle Werte des Arguments positiv reell sind. Dann ist in dem reellen Intervalle $(0, 1)$

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{(0)}(z) &= z \cdot w_1^{(0)}(z^2); & \omega_2^{(0)}(z) &= z \cdot w_2^{(0)}(z^2);\\
\omega_1^{(1)}(z) &= z \cdot w_1^{(1)}(z^2); & \omega_2^{(1)}(z) &= z \cdot w_2^{(1)}(z^2),
\end{aligned}
$$

und daher bestehen die Fortsetzungsrelationen (7) auch zwischen den Funktionen $\omega^{(0)}$ und $\omega^{(1)}$. Dagegen ist in dem reellen Intervalle $(-1, 0)$

$$
\begin{aligned}
\omega_1^{(0)}(z) &= z \cdot w_1^{(0)}(z^2); & \omega_2^{(0)}(z) &= e^{\frac{\pi i}{5}} \cdot z \cdot w_2^{(0)}(z^2);\\
\omega_1^{(-1)}(z) &= z \cdot w_1^{(1)}(z^2); & \omega_2^{(-1)}(z) &= z \cdot w_2^{(1)}(z^2),
\end{aligned}
$$

und die Fortsetzungsrelationen erleiden eine leichte Änderung:

---

[1]) Über Π-Funktionen findet man das Nötige bei Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 26—31.

$$\omega_1^{(-1)} = f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{2})\,\omega_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{3}{2})\,\omega_2^{(0)}$$

$$\omega_2^{(-1)} = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\,\omega_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\,\omega_2^{(0)}$$

$$\omega_1^{(0)} = f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10})\,\omega_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10})\,\omega_2^{(-1)}$$

$$e^{-\frac{i\pi}{5}}\,\omega_2^{(0)} = f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{11}{10})\,\omega_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{10})\,\omega_2^{(-1)}.$$

Schließlich die Funktion ν. Den beiden Zweigen $w_1^{(0)}$ und $w_2^{(0)}$ entsprechen um den Nullpunkt Entwicklungen der Form

$$\nu_1^{(0)} = \tfrac{1}{2} z^{-\frac{1}{5}} \mathfrak{P}(z), \qquad \nu_2^{(0)} = \tfrac{5}{11} \mathfrak{P}(z), \tag{8a}$$

den beiden Zweigen $w_1^{(1)}$ und $w_2^{(1)}$ um die Punkte $z = \pm 1$ herum die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \nu_1^{(1)} &= -(1-z)\,\mathfrak{P}(1-z), & \nu_2^{(1)} &= -\sqrt{2}\,(1-z)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}(1-z) \\ & & &= i\sqrt{2}\,(z-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}(z-1) \\ \nu_1^{(-1)} &= -e^{-\frac{i\pi}{5}}(1+z)\,\mathfrak{P}(1+z), & \nu_2^{(-1)} &= -\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{5}}(1+z)^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{P}(1+z). \end{aligned} \tag{8b}$$

Daß von den beiden Entwicklungen um jeden Punkt immer eine regulär ist, entspricht einem Satze von Poincaré[1]).

Zwischen diesen Integralen bestehen die folgenden Relationen, die sich sofort aus den zwischen den ω bestehenden ablesen lassen:

$$\begin{aligned} \nu_1^{(1)} &= C_1 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{2})\,\nu_1^{(0)} + f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{3}{2})\,\nu_2^{(0)} \\ \nu_2^{(1)} &= C_2 \nu_0 + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\,\nu_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\,\nu_2^{(0)} \\ \nu_1^{(-1)} &= C_3 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{2})\,\nu_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{3}{2})\,\nu_2^{(0)} \\ \nu_2^{(-1)} &= C_4 \nu_0 + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\,\nu_1^{(0)} + e^{-\frac{i\pi}{5}} f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\,\nu_2^{(0)}; \end{aligned} \tag{9a}$$

---

[1]) Picard, Traité III, chap. XIV, 17 (2. Aufl.), S. 408.

$$\begin{aligned}
v_1^{(0)} &= D_1 v_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}) v_1^{(1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) v_2^{(1)} \\
v_2^{(0)} &= D_2 v_0 + f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{11}{10}) v_1^{(1)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{10}) v_2^{(1)} \\
\text{(9 b)} \quad v_1^{(0)} &= D_3 v_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}) v_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) v_2^{(-1)} \\
e^{-\frac{i\pi}{5}} v_2^{(0)} &= D_4 v_0 + f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{11}{10}) v_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{10}) v_2^{(-1)}.
\end{aligned}$$

Die Größen C und D sind Konstante, die sich durch bestimmte Integrale ausdrücken. Auf ihre Werte kommt es für das Folgende nicht an; von großer Wichtigkeit ist aber, daß

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Dies ergibt sich in folgender Weise. Setzen wir aus (9 a) in eine der beiden ersten Gleichungen (9 b) ein, so folgt z. B. aus der zweiten Gleichung die Beziehung:

$$D_2 + f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{11}{10}) C_1 + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{10}) C_2 = 0.$$

Ferner aber berücksichtigen wir, daß bei einem Umlaufe um den Punkt 1 die Funktionen $v_1^{(0)}$ und $v_2^{(0)}$ sich nur untereinander, nicht aber mit v_0 kombinieren. Da bei einem Umlaufe um 1 zwar $v_1^{(1)}$ ungeändert bleibt, $v_2^{(1)}$ aber den Faktor -1 aufnimmt, so folgt in gleicher Weise wie oben

$$D_2 + f(\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, \tfrac{11}{10}) C_1 - f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{11}{10}) C_2 = 0$$

und also $C_2 = 0$. Für C_4 wird entsprechend geschlossen.

3. Wir bezeichnen mit E' die z-Ebene, aufgeschnitten längs der drei durch die singulären Punkte gehenden, unter $\frac{5\pi}{4}$ gegen die positive reelle Achse geneigten Halbstrahlen. Die Fortsetzungsrelationen (9) gelten zwischen den Zweigen der Funktion v und ihren analytischen Fortsetzungen im ganzen Gebiete E'. Wir bezeichnen speziell mit v denjenigen in E' eindeutig definierten Zweig, der als Ausgangselement um den Nullpunkt $v_1^{(0)}$ hat, und bilden das Integral (4′) längs dreier ins Unendliche gehender Schleifenwege $S^{(-1)}$, $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, die in positivem Sinne um die drei Querschnitte gelegt sind (siehe Fig. 1). Es sei zuerst der reelle Bestandteil von ξ

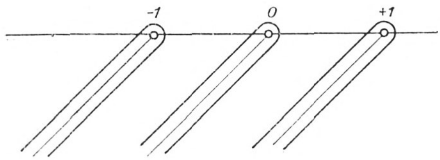

Fig. 1.

positiv. Dann sind, weil v als Integral einer hypergeometrischen Funktion im Unendlichen sich bestimmt verhält, die drei Integrale konvergent und befriedigen die vorgelegte Differentialgleichung (3), denn das von den Grenzen herrührende Glied $[e^{\varepsilon \xi z} P(\xi, z, v)]$ des Ausdrucks (4″) verschwindet im Unendlichen.

In der Halbebene $\Re(\xi) > 0$ sind daher drei Integrale ψ der vorgelegten Differentialgleichung definiert:

$$(10) \quad \psi_1 = \int_{S^{(0)}} e^{\varepsilon \xi z} v(z)\, dz, \quad \psi_2 = \int_{S^{(-1)}} e^{\varepsilon \xi z} v(z)\, dz, \quad \psi_3 = \int_{S^{(+1)}} e^{\varepsilon \xi z} v(z)\, dz,$$

zu denen noch das bekannte Integral

$$(10') \qquad \psi_0 = \xi^{\frac{6}{5}}$$

hinzutritt.

Daß diese Integrale von Null verschieden und voneinander linear unabhängig sind und mit den asymptotischen Entwicklungen in engem Zusammenhange stehen, ist bekannt[1]), wir kommen darauf zurück. Wir besprechen zunächst die analytische Fortsetzung der Integrale aus der Halbebene der ξ mit positivem reellem Bestandteil, und zwar soll folgende Aufgabe gelöst werden, die durch das Noethersche Problem gestellt wird:

Die für positive, reelle ξ durch die Darstellungen (10) gegebenen Integrale sollen bis zu dem Halbstrahl ξ vom Argumente $\frac{5\pi}{2}$ fortgesetzt werden.

[1]) Picard, Traité III, chap. XIV, 11 (2. Aufl.), S. 397–398.

Die analytische Fortsetzung wird durch Drehung der Schleifenwege vorgenommen. Das Argument von ξ sei χ, das Argument von z sei φ. Die längs eines Schleifenweges vom Argument φ genommenen Integrale (10) sind konvergent in der Halbebene

$$\frac{3\pi}{4} - \varphi < \chi < \frac{7\pi}{4} - \varphi.$$

Diese Halbebene dreht sich in positivem Sinne, wenn die Wege in negativem Sinne gedreht werden. Solange bei der Drehung ein Weg keinen singulären Punkt überschreitet, ist das längs des gedrehten Weges genommene Integral die Fortsetzung des ursprünglichen. Bei Überschreitung eines singulären Punktes erfolgt lineare Zusammensetzung. Wir besprechen zuerst den Übergang über die negative reelle Achse (Fig. 2).

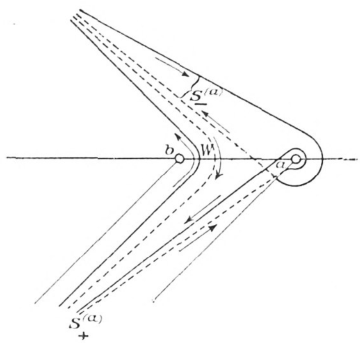

Fig. 2.

$S_{+}^{(a)}$ sei die Integrationsschleife um den singulären Punkt a längs eines unterhalb der Achse gelegenen Querschnitts, $S_{-}^{(a)}$ die Integrationsschleife längs eines darüber liegenden Querschnitts. Das Argument von ξ sei so gewählt, daß die Integrale $\int\limits_{S_{+}^{(a)}}$ und $\int\limits_{S_{-}^{(a)}}$ beide konvergieren. Auf der oberen Seite der Integrationswege in genügender Nähe des Punktes a stimmt die Funktion v mit dem innerhalb der zerschnittenen Ebene (Fig. 1) definierten Zweige $v_1^{(0)}$ überein. Wir markieren an beiden Querschnitten einen Erkennungsort, an dem die Übereinstimmung stattfindet. Es sei ν' der Zweig der Funktion ν, der aus $\nu_1^{(0)}$ durch einmaligen Umlauf in negativem Sinne um a hervorgeht. Wir denken ihn uns in einem unteren Blatte der Riemannschen Fläche und zeichnen in Figur 2 die dem oberen Blatte angehörigen Linien ausgezogen, die dem unteren angehörigen gestrichelt. Außerdem bezeichne W einen in positivem Drehsinne genommenen Weg, der zwischen a und dem nächsten singulären Punkt b die reelle Achse schneidet und sich den beiden Schleifen $S_+^{(a)}$ und $S_-^{(a)}$ asymptotisch nähert. Dann ist der in Figur 2 gezeichnete Weg auf der Riemannschen Fläche der Funktion ν geschlossen, und es ist

$$\int\limits_{S_+^{(a)}}(\nu) + \int\limits_{W}(\nu) - \int\limits_{S_-^{(a)}}(\nu) - \int\limits_{W}(\nu') = 0,$$ [1]

weil, nach Weghebung zweier in entgegengesetztem Sinne durchlaufener Kreise um a, die ausgezogenen und gestrichelten Wegteile der Figur einzeln keine singulären Punkte umschließen und sich also auf Null zusammenziehen lassen. Also ist

$$\text{(S)} \qquad \int\limits_{S_+^{(a)}} = \int\limits_{S_-^{(a)}} - \int\limits_{W}(\nu - \nu').$$

Bei wachsendem Argument von ξ wird das Integral links seinen Sinn verlieren, während die rechte Seite Bedeutung behält; sie liefert also für diese Werte von ξ die analytische Fortsetzung des linken Integrals.

Die Durchführung der Rechnung ist hiernach nicht schwierig.

Das Integral $\int\limits_{S^{(-1)}}$ ändert sich beim Überschreiten der negativen reellen Achse nicht, weil die Schleife $S^{(-1)}$ keinen singulären Punkt überstreicht.

1. $\int\limits_{S^{(0)}}$. Da am Erkennungsort $\nu = \nu_1^{(0)}$ ist, so ist

$$\nu' = e^{\frac{2i\pi}{5}}\nu_1^{(0)}, \qquad \nu - \nu' = \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\nu^{(0)}.$$

[1]) Die Abkürzungen sind wohl ohne weiteres verständlich.

Daher, da der Weg W nur den einen Punkt -1 umschließt,

$$\int_W (\nu - \nu') = \int_{S^{(-1)}} (\nu - \nu') = \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int_{S^{(-1)}} (\nu_1'^{(0)}) = \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int_{S^{(-1)}},$$

also

$$(11) \qquad \int_{S_+^{(0)}} = \int_{S_-^{(0)}} - \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int_{S^{(-1)}}.$$

2. $\int_{S^{(+1)}}$. Um $\nu - \nu'$ zu berechnen, gehen wir aus von der Formel (9b):

$$\nu = \nu_1^{(0)} = D_1 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}) \nu_1^{(1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \nu_2^{(1)}.$$

Bei negativem Umlauf um $+1$ bleiben ν_0 und $\nu_1^{(1)}$ ungeändert, $\nu_2^{(1)}$ nimmt den Faktor -1 auf, daher ist

$$\nu - \nu' = 2 f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \nu_2^{(1)}.$$

Also ist

$$(12') \qquad \int_W (\nu - \nu') = 2 f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \int_W (\nu_2^{(1)}).$$

Zur Berechnung dieses Integrals dient Figur 3. Es bezeichne $\bar{\nu}_2^{(1)}$ den Zweig von ν, der aus $\nu_2^{(1)}$ durch einmalige Um-

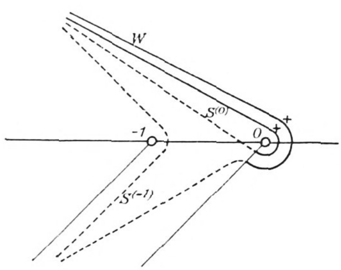

Fig. 3.

laufung des Punktes 0 im negativen Sinne hervorgeht. Auf dem in der positiven Halbebene verlaufenden Teile des Weges W markieren wir durch * den Erkennungsort, und führen den in der Figur eingezeichneten Weg, bestehend aus einem genügend großen Stück einer in negativem Sinne um den Nullpunkt gelegten Schleife, und einem genügend großen Stück einer den Punkt -1 in negativem Sinne umlaufenden Schleife. Da W zusammen mit diesen beiden Schleifenstücken keinen singulären Punkt umschließt, so ist der Gesamtweg auf der Riemannschen Fläche der Funktion ν geschlossen und das über ihn erstreckte Integral ist gleich Null. Also:

$$\int_W (\nu_2^{(1)}) = \int_{\underline{S}^{(0)}} (\nu_2^{(1)}) + \int_{S^{(-1)}} (\overline{\nu_2^{(1)}}).$$

Nun ist am Erkennungsort (Formel (9 a))

$$\nu_2^{(1)} = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\, \nu_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\, \nu_2^{(0)},$$

daher zunächst, da $\nu_2^{(0)}$ am Nullpunkte regulär ist,

$$\int_{\underline{S}^{(0)}} (\nu_2^{(1)}) = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2}) \int_{\underline{S}^{(0)}} (\nu_1^{(0)}). \tag{12''}$$

Weiter ist

$$\overline{\nu_2^{(1)}} = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{1}{2})\, e^{\frac{2i\pi}{5}}\, \nu_1^{(0)} + f(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2})\, \nu_2^{(0)}.$$

Werden hier $\nu_1^{(0)}$ und $\nu_2^{(0)}$ durch $\nu_1^{(-1)}$ und $\nu_2^{(-1)}$ ausgedrückt, so folgt nach einfacher Umrechnung der f-Funktionen

$$\overline{\nu_2^{(1)}} = E\nu_0 + a\,\nu_1^{(-1)} + \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \nu_2^{(-1)};$$

die Koeffizienten E und a sind für das Folgende belanglos[1]).

---

[1]) Zur Umrechnung der f-Funktionen wird von der bekannten Formel

$$\Pi(-x)\,\Pi(x-1) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Gebrauch gemacht. Für den Koeffizienten a ergibt sich durch die Rechnung der folgende Wert:

$$a = \tfrac{1}{5} \sin\frac{2\pi}{5}\, f(-\tfrac{3}{10}, -\tfrac{4}{10}, -\tfrac{1}{10}) \left(e^{\frac{2\pi i}{5}} - e^{\frac{\pi i}{5}} \right).$$

Da ν_0 und $\nu_1^{(-1)}$ am Punkte -1 regulär sind, ist also

$$\int\limits_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(1)}) = \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(-1)}).$$

Da andererseits am Erkennungsort (Formel (9 b))

$$\nu = \nu_1^{(0)} = D_3 \nu_0 + f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}) \nu_1^{(-1)} + f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \nu_2^{(-1)},$$

so ist

$$\int\limits_{S^{(-1)}} (\nu) = f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}) \int (\nu_2^{(-1)})$$

und also

$$(12''') \qquad \int\limits_{S^{(-1)}} (\nu_2^{(1)}) = \frac{1}{f(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10})} \left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(-1)}} (\nu).$$

Werden (12'') und (12''') in (12') und (S) eingesetzt, so folgt nach der bereits besprochenen Umrechnung der f-Funktionen:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \int\limits_{S_+^{(1)}} = \int\limits_{S_-^{(1)}} - 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \int\limits_{S_-^{(0)}} \\ - 2\left\{ e^{\frac{2i\pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{\frac{i\pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5} \right\} \int\limits_{S^{(-1)}}. \end{aligned}$$

Die Formeln (11) und (12) enthalten die Übergangssubstitutionen bei Überschreitung der negativen reellen Achse. Wir brauchen aber noch die Formeln für den Übergang über die positive reelle Achse. Ihre Ableitung ist wesentlich die gleiche wie eben, verlangt aber in einem Punkte besondere Vorsicht. Ich erläutere die Schwierigkeit an dem Integrale $\int\limits_{S^{(0)}}$.

Es gilt zunächst genau wie oben

$$(13') \qquad \int\limits_{S_+^{(0)}} (\nu) = \int\limits_{S_-^{(0)}} (\nu) - \int\limits_{W} (\nu - \nu') = \int\limits_{S_-^{(0)}} (\nu) - \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int\limits_{W} (\nu).$$

Jetzt aber ist der Weg W nicht gleich dem Weg $S^{(+1)}$, denn W verläuft in der oberen Halbebene in dem Blatte E', in der unteren Halbebene aber in demjenigen unteren Blatte, in das man durch Umlaufung des Punktes $+1$ gelangt; von $S^{(+1)}$ aber gilt genau das Umgekehrte. Mit anderen Worten:

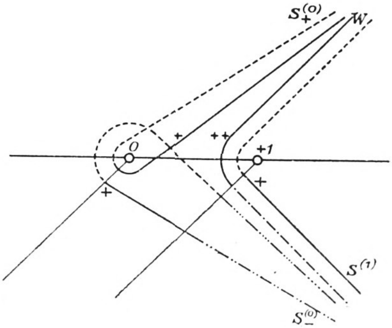

Fig. 4.

W hat seinen Erkennungsort ** in der oberen Halbebene, $S^{(+1)}$ den seinigen * in der unteren Halbebene (Fig. 4). Infolgedessen ist:

$$\int_W (\nu) = \int_{S^{(+1)}} (\bar{\nu}),$$

wo $\bar{\nu}$ denjenigen Zweig von ν bedeutet, zu dem man von dem Ausgangszweig $\nu_1^{(0)}$ durch einmalige Umlaufung von $+1$ in positivem Sinne gelangt. Da bei dieser Umlaufung ν_0 und $\nu_1^{(1)}$ ungeändert bleiben, $\nu_2^{(1)}$ aber den Faktor -1 aufnimmt, so ist

$$\int_{S^{(+1)}} (\bar{\nu}) = -\int_{S^{(+1)}} (\nu), \tag{13'}$$

und daher gilt für die Überschreitung der positiven reellen Achse die Übergangssubstitution

$$\int_{S_+^{(0)}} = \int_{S_-^{(0)}} + \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int_{S^{(+1)}}. \tag{13}$$

Ebenso bei der Umrechnung des Integrales $\int\limits_{S_+^{(-1)}}$. Es ist gerade wie früher

$$(14') \qquad \int\limits_{S_+^{(-1)}} = \int\limits_{S_-^{(-1)}} - 2 f\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right) \int\limits_{W} \left(\nu_2^{(-1)}\right).$$

Da aber W im Gegensatze zu den Wegen $S^{(0)}$, $S^{(+1)}$ seinen

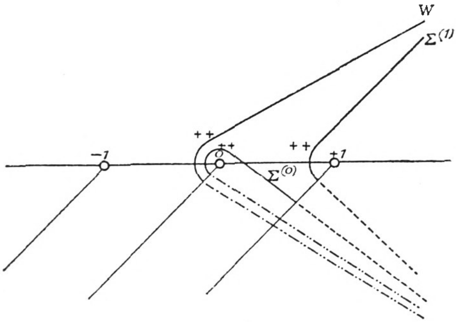

Fig. 5.

Erkennungsort ** in der oberen Halbebene hat, so ist aus Figur 5 folgendes abzulesen:

$$(14'') \quad \int\limits_{W} \left(\nu_2^{(-1)}\right) = \int\limits_{\Sigma^{(1)}} \left(\nu_2^{(-1)}\right) + \int\limits_{\Sigma^{(0)}} \left(\nu_2^{(-1)}\right) = \int\limits_{S^{(+1)}} \left(\bar{\nu}_2^{(-1)}\right) + \int\limits_{S_-^{(0)}} \left(\bar{\bar{\nu}}_2^{(-1)}\right),$$

wo $\bar{\nu}_2^{(-1)}$ derjenige Zweig von ν ist, der aus $\nu_2^{(-1)}$ durch einmalige positive Umlaufung von $+1$ hervorgeht, $\bar{\bar{\nu}}_2^{(-1)}$ derjenige, der durch einmalige positive Umlaufung von 0 entsteht. Die weitere Rechnung ist der früher vorgenommenen ganz analog. Es kommt schließlich:

$$(14) \quad \int\limits_{S_+^{(-1)}} = \int\limits_{S_-^{(-1)}} - 2 e^{-\frac{2 i \pi}{5}} \left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \int\limits_{S_-^{(0)}} + 2 \left\{\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) - e^{-\frac{i \pi}{5}} \cos\frac{\pi}{5}\right\} \int\limits_{S^{(+1)}}.$$

Die Formeln (11, (12), (13), (14) enthalten alles, was wir für unsere Fortsetzungsaufgabe brauchen. Sei nämlich φ ein Argument zwischen 0 und $-\pi$, und betrachten wir die Integrale über die unter diesem Argument verlaufenden Schleifenwege, das Argument von ξ sei derart, daß die Integrale existieren. Wir fragen, wie sich die Funktionen ψ durch sie ausdrücken, und schreiben allgemein

$$\text{(U')}\qquad \begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \int\limits_{S^{(0)}} + B_1 \int\limits_{S^{(-1)}} + C_1 \int\limits_{S^{(+1)}} \\ \psi_2 &= A_2 \int\limits_{S^{(0)}} + B_2 \int\limits_{S^{(-1)}} + C_2 \int\limits_{S^{(+1)}} \\ \psi_3 &= A_3 \int\limits_{S^{(0)}} + B_3 \int\limits_{S^{(-1)}} + C_3 \int\limits_{S^{(+1)}}, \end{aligned}$$

dann erhalten wir die Koeffizienten A, B, C dadurch, daß wir zuerst nach den Formeln (11) und (12) die Fortsetzungen der Funktionen ψ in das Gebiet $\pi > \varphi > 0$ bilden, und dann die erhaltenen Integralsummen nach den Formeln (13) und (14) durch Übergang über die positive reelle Achse in das betrachtete Gebiet $0 > \varphi > -\pi$ fortsetzen. Die Rechnung hat keine Schwierigkeiten und ergibt folgende Tabelle:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - 2\left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \\ B_1 &= -\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \\ C_1 &= \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(1 - 2\left\{1 + \cos\frac{\pi}{5} - e^{-\frac{i\pi}{5}}\cos\frac{\pi}{5}\right\}\right) \\ &= \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)(1 - C_2), \end{aligned}$$

$$\text{(U)}\qquad \begin{aligned} A_2 &= -2e^{-\frac{2i\pi}{5}}\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right) \\ B_2 &= 1 \\ C_2 &= 2\left\{1 + \cos\frac{\pi}{5} - e^{-\frac{i\pi}{5}}\cos\frac{\pi}{5}\right\}; \\ A_3 &= -2\left(1 + \cos\frac{\pi}{5}\right)(1 - C_2) \\ B_3 &= -e^{\frac{2i\pi}{5}}C_2 \\ C_3 &= A_1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}C_2^2. \end{aligned}$$

Wir gebrauchen übrigens von dieser Tabelle im folgenden nur die Werte von A_1, A_2, C_1, C_2.

Zu denjenigen Werten ξ, denen sich Schleifensysteme des Argumentraumes $0 > \varphi > -\pi$ zuordnen lassen, gehören insbesondere diejenigen vom Argumente $\frac{5\pi}{2}$:

$$\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}.$$

Für sie existieren beispielsweise die Schleifenintegrale mit dem Argumente $\varphi = -\frac{7\pi}{8}$. Wir erhalten also in verständlicher Abkürzung:

$$\text{(F)} \quad \begin{aligned} \psi_1\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) = A_1 \int_{S^{(0)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}}; \; -\frac{7\pi}{8}\right\} + B_1 \int_{S^{(-1)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}}; \; -\frac{7\pi}{8}\right\} \\ + C_1 \int_{S^{(+1)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}}; \; -\frac{7\pi}{8}\right\}, \end{aligned}$$

wo die A, B, C die Werte (U) haben, und entsprechend für $\psi_2\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right)$, $\psi_3\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right)$. Diese Formeln lösen die Fortsetzungsaufgabe, die wir uns gestellt haben.

III. Asymptotische Entwicklungen.

4. Die Integraldarstellungen (10) stehen in nahen, wohlbekannten Beziehungen zu den asymptotischen Entwicklungen[1]). Ich werde den Übergang hier in zwei Schritten vornehmen und zwei verschiedene Zeichen für asymptotische Näherungen einführen.

Seien $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ zwei Funktionen einer positiven, reellen Veränderlichen x, die sich für $x = \infty$ einem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerte nähern.

Wenn $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ sich mit wachsendem x nur um Größen unterscheiden, die von geringerer Ord-

1) Picard, Traité III, chap. XIV, 18–19 (2. Aufl.), S. 409–412.

nung sind als *jede* Potenz $\frac{1}{x^n}$, so werde geschrieben:

$$\psi(x) \approx \Psi(x).$$

Unterscheiden sich aber bei *gegebenem* positivem, ganzzahligem m die Funktionen $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ mit wachsendem x nur um Größen von geringerer Ordnung als $\frac{1}{x^m}$, so werde geschrieben:

$$\psi(x) \sim \Psi(x).$$

Wir wenden zuerst das Zeichen $\approx$ auf unsere Integraldarstellungen an.

5. Da sich die Funktion ν an den Punkten -1, 0, $+1$ integrabel verhält, lassen sich die Schleifenintegrale auf geradlinige zusammenziehen. Es ergibt sich mit Hilfe der Fortsetzungsrelationen (9 b):

$$(15) \qquad \int\limits_{S^{(0)}}(\xi;\varphi) = \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\int\limits_{0e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z}\,\nu_1^{(0)}(z)\,dz = J_1\{\xi,\varphi\}$$

$$\int\limits_{S^{(-1)}}(\xi;\varphi) = 2f\int\limits_{-1+0e^{i\varphi}}^{-1+\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z}\,\nu_2^{(-1)}(z)\,dz$$

$$= 2fe^{-\varepsilon\xi}\int\limits_{0e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z'}\,\nu_2^{(-1)}(z'-1)\,dz' = e^{-\varepsilon\xi}J_2(\xi,\varphi) \qquad (z' = z+1)$$

$$\int\limits_{S^{(+1)}}(\xi;\varphi) = 2f\int\limits_{+1+0e^{i\varphi}}^{+1+\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z}\,\nu_2^{(1)}(z)\,dz$$

$$= 2fe^{\varepsilon\xi}\int\limits_{0e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} e^{\varepsilon\xi z'}\,\nu_2^{(1)}(z'+1)\,dz' = e^{\varepsilon\xi}J_3(\xi,\varphi) \qquad (z' = z-1)$$

$$f = f\left(\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{9}{10}\right).$$

Wir benutzen diese Darstellungen, um eine einfache Beziehung zwischen den Werten der Integrale für $\xi = x$ (reell positiv) und $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ aufzustellen. Für reelle, positive ξ

hatten wir den Schleifen das Argument $\frac{5\pi}{4}$ erteilt, für $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ das Argument $-\frac{7\pi}{8}$. Ich behaupte zunächst: für $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ sind die Integrale mit dem Argumente $-\frac{7\pi}{8}$ asymptotisch gleich nach dem Zeichen $\approx$ den Integralen mit dem Argumente $-\frac{5\pi}{4}$.

In der Tat konvergieren für $\xi = x \cdot e^{\frac{5i\pi}{2}}$ sowohl die Integrale mit Argument $-\frac{7\pi}{8}$ wie die Integrale mit Argument $-\frac{5\pi}{4}$. Um von einem Argumente zu dem anderen zu gelangen, hat man die negative reelle Achse zu überschreiten. Es bestehen also für die beiden Argumente Beziehungen von der Form der Übergangsrelationen (11) und (12):

$$\int_{S^{(0)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8} \right\} = \int_{S^{(0)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} + \alpha \int_{S^{(-1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\}$$

$$\int_{S^{(-1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8} \right\} = \int_{S^{(-1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} \tag{16'}$$

$$\int_{S^{(+1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{7\pi}{8} \right\} = \int_{S^{(+1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} + \beta \int_{S^{(0)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\} + \gamma \int_{S^{(-1)}} \left\{ x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4} \right\}$$ [1]).

Nun hat

$$\varepsilon \xi = e^{-\frac{i\pi}{4}} \cdot x e^{\frac{5i\pi}{2}} = x e^{\frac{9i\pi}{4}}$$

den positiven reellen Bestandteil $\frac{x}{\sqrt{2}}$, ferner werden wir in **6.**

[1]) Die Koeffizienten α, β, γ sind nicht die gleichen wie in den Formeln (11) und (12). Es ist natürlich nicht schwer, sie anzugeben, ich will aber überflüssige Rechnung vermeiden.

zeigen, daß die Integrale auf der rechten Seite der Formeln (15) mit wachsendem x gegen Null gehen wie gewisse negative Potenzen von x, daher verschwinden in (16′) auf der rechten Seite alle Glieder exponentiell wie e^{-ax} gegen das vorderste Glied. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Weiter besteht die Tatsache: Die Integrale

$$\int_S \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\}$$

sind bis auf konstante Faktoren konjugiert komplex zu den Integralen

$$\int_S \left\{x;\ +\frac{5\pi}{4}\right\}.$$

Dies folgt unmittelbar aus den Darstellungen (15). Denn erstens ist εx konjugiert komplex zu $\varepsilon x e^{\frac{5\pi i}{2}}$, zweitens haben die Variablen z bzw. z' auf den beiden Strahlen konjugiert komplexe Werte, und drittens sind die unter den Integralen auftretenden Funktionen ν Produkte aus konstanten Faktoren in Funktionen, die für reelle, positive Werte von z bzw. z' reell sind, und demgemäß für konjugiert komplexe Werte der Argumente sich konjugiert komplex verhalten. Die konstanten komplexen Faktoren sind, mit Ausnahme des in Evidenz stehenden Faktors $1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}$ des ersten Integrals, aus (8 b) abzulesen. Sie sind $e^{-\frac{i\pi}{5}}$ bei $\nu_2^{(-1)}$, i bei $\nu_2^{(1)}$. Mit ihrer Berücksichtigung findet sich

$$\int_{S^{(0)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\} = -e^{\frac{2i\pi}{5}} \operatorname{conj.} \int_{S^{(0)}} \left\{x;\ +\frac{5\pi}{4}\right\}$$

$$\int_{S^{(-1)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} \operatorname{conj.} \int_{S^{(-1)}} \left\{x;\ +\frac{5\pi}{4}\right\}$$

$$\int_{S^{(+1)}} \left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\ -\frac{5\pi}{4}\right\} = -\operatorname{conj.} \int_{S^{(+1)}} \left\{x;\ +\frac{5\pi}{4}\right\}.$$

Die nämlichen Überlegungen gelten für die Ableitungen

$$\frac{d}{d\xi}\int_S e^{\varepsilon\,\xi\,z}\,\nu(z)\,dz = \varepsilon\int_S e^{\varepsilon\,\xi\,z}\cdot z\cdot\nu(z)\,dz;$$

es ist nur noch der komplexe Faktor ε zu berücksichtigen.

Es mögen noch folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\frac{d}{d\xi}\int_{S^{(0)}}\{\xi;\,\varphi\} = K_1(\xi,\varphi)$$

(15 b) $$\frac{d}{d\xi}\int_{S^{(-1)}}\{\xi;\,\varphi\} = e^{-\varepsilon\,\xi}\,K_2\{\xi,\varphi\}$$

$$\frac{d}{d\xi}\int_{S^{(+1)}}\{\xi;\,\varphi\} = e^{\varepsilon\,\xi}\,K_3\{\xi,\varphi\},$$

und es werde zur Abkürzung

(15 c) $$J\left\{x;\,+\frac{5\pi}{4}\right\} = J(x),\quad K\left\{x;\,+\frac{5\pi}{4}\right\} = K(x)$$

$$J\left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\,-\frac{7\pi}{8}\right\} = J\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right),\quad K\left\{x e^{\frac{5i\pi}{2}};\,-\frac{7\pi}{8}\right\} = K\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right)$$

geschrieben. Dann lassen sich die Ergebnisse dieser Nummer auf folgende einfache, zusammenfassende Form bringen, wo überstrichene Größen konjugiert komplexe bedeuten:

$$J_1\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx -\,e^{\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{J}_1(x);\quad J_2\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx e^{-\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{J}_2(x);$$

(16) $$J_3\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx -\,\overline{J}_3(x)$$

$$K_1\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx i\,e^{\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{K}_1(x);\quad K_2\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx -\,i\,e^{-\frac{2i\pi}{5}}\,\overline{K}_2(x);$$

$$K_3\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \approx i\,\overline{K}_3(x).$$

6. Die asymptotischen Entwicklungen nach dem Zeichen $\sim$ der Funktionen J und K werden formal in der Weise gewonnen, daß man die unter dem Integralzeichen auftretenden

Funktionen $\nu(z)$ nach Potenzen der Variabeln z bzw. z' entwickelt und gliedweise integriert. Die Ergebnisse der vorigen Nummer erlauben uns, die Entwicklungen nur für positive, reelle $\xi = x$ durchzuführen. Man erhält nach den Formeln (8) die folgenden ersten Glieder:

$$
(17') \qquad
\begin{aligned}
J_1(x) &\backsim \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \int\limits_{0e^{\frac{5i\pi}{4}}}^{\infty e^{\frac{5i\pi}{4}}} e^{\varepsilon x z} z^{-\frac{1}{5}}\, dz \\
J_3(x) &\backsim 2f\cdot\sqrt{2}\, i \int\limits_{0e^{\frac{5i\pi}{4}}}^{\infty e^{\frac{5i\pi}{4}}} e^{\varepsilon x z} z^{\frac{1}{2}}\, dz.
\end{aligned}
$$

$J_2(x)$ ist weggelassen, weil es im folgenden nicht gebraucht wird.

Die durch die Gleichung

$$
(17'') \qquad \varepsilon x z = e^{i\pi}\zeta
$$

definierte Variable ζ ist reell positiv mit Argument Null. Führen wir sie in (17') ein, so kommt

$$
(17''') \qquad
\begin{aligned}
J_1(x) &\backsim -\tfrac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) x^{-\frac{4}{5}} \int\limits_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{-\frac{1}{5}}\, d\zeta \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right) \Pi(-\tfrac{1}{5})\, x^{-\frac{4}{5}}
\end{aligned}
$$

$$
J_3(x) \backsim 2f\cdot\sqrt{2}\, i\, e^{-\frac{i\pi}{8}} x^{-\frac{3}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-\zeta}\zeta^{\frac{1}{2}}\, d\zeta = f\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} x^{-\frac{3}{2}}.
$$

Weitere Glieder der asymptotischen Entwicklungen kann man dadurch erhalten, daß man die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen ν unter dem Integralzeichen weiter verfolgt, oder bequemer auf direktem Wege, indem man Ausdrücke von der Form

$$x^{-\frac{1}{5}}\left(1+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right) \quad \text{und} \quad e^{\varepsilon x} x^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}\cdots\right)$$

in die Differentialgleichung (3) für ψ mit $\xi = x$ einsetzt und die Koeffizienten so bestimmt, daß sie formal befriedigt wird. Man erhält so bis zu quadratischen Gliedern:

$$\text{(17 a)} \quad \begin{aligned} J_1(x) &\sim -\tfrac{1}{2}\,\Pi(-\tfrac{1}{5})\left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)x^{-\frac{4}{5}}\left[1+0.384\,i\,\frac{1}{x^2}\right] \\ J_3(x) &\sim f\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\,x^{-\frac{3}{2}}\left[1+2.985\,e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{x}+11.32\,i\,\frac{1}{x^2}\right]. \end{aligned}$$

Die asymptotischen Ausdrücke der K_1 und K_3 erhält man durch gliedweise Differentiation der Ausdrücke für J_1 und $e^{\varepsilon x} J_3$. Sie sind:

$$\text{(17 b)} \quad \begin{aligned} K_1(x) &\sim -\tfrac{1}{2}\,\Pi(-\tfrac{1}{5})\left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)x^{-\frac{9}{5}}\left[-0.8-1.075\,\frac{i}{x^2}\right] \\ K_3(x) &\sim f\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{i\pi}{8}}\,x^{-\frac{3}{2}}\left[1+1.485\,e^{\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{x}+3.86\,i\,\frac{1}{x^2}\right]. \end{aligned}$$

IV. Die Unmöglichkeit der Randwertaufgabe.

7. Soll die am Schlusse des Abschnitts I gestellte Randwertaufgabe eine Lösung haben, so muß es eine reelle, positive Zahl x geben, für welche die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_0(x) & \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \\ \psi_0'(x) & \psi_1'(x) & \psi_2'(x) & \psi_3'(x) \\ \psi_0\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_1\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_2\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_3\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \\ \psi_0'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_1'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_2'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) & \psi_3'\left(x e^{\frac{5i\pi}{2}}\right) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Wir werden aber zeigen, daß sie für alle Werte $x > 10$ sicher von Null verschieden ist. Daß dies im Widerspruch zu Herrn Noethers Resultat steht, wird in der nächsten Nummer begründet.

Folgende Vorbemerkung ist wichtig: Unsere Determinante unterscheidet sich nur durch die Auswahl des Fundamentalsystems von der von Herrn Noether betrachteten (die bei ihm nur in der reduzierten Form $F(\eta)$ (Gleichung (21)) hingeschrieben ist). Diese Determinante ist aber reell, weil die Noetherschen Fundamentalintegrale sich für

$$\xi = x \qquad \text{und} \qquad \xi = x e^{\frac{5 i \pi}{2}}$$

(y reell positiv und y reell negativ) konjugiert komplex verhalten. Daher muß auch unsere Determinante das Produkt einer reellen Funktion in einen konstanten komplexen Faktor sein. Aus dieser Bemerkung wird eine empfindliche Probe für die Richtigkeit unserer ganzen Rechnung fließen.

Es werde in der Folge zur Abkürzung

$$x e^{\frac{5 i \pi}{2}} = \xi$$

gesetzt. Wir führen in die Determinante $\varDelta$ den Wert $\psi_0(x) = x^{\frac{6}{5}}$ ein, schreiben für die übrigen $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ ihre Produktform gemäß den Formeln (15) und drücken die $\psi(\xi)$ und $\psi'(\xi)$ nach den Fortsetzungsformeln (F) aus. Durch übliche Zeilenaddition vereinfacht sich dann die Determinante $\varDelta$ in

$$\varDelta = \tfrac{6}{5}\, x^{\frac{1}{5}}\, \varDelta_1,$$

wo $\varDelta_1$ eine dreireihige Determinante ist. Diese werde nach Potenzen von

$$\Re(e^{\varepsilon x}) = \Re(e^{\varepsilon \xi}) = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

geordnet. Sie enthält Glieder mit

$$e^{\frac{3x}{\sqrt{2}}},\quad e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}},\ \ldots,\ e^{-\frac{3x}{\sqrt{2}}}.$$

Die Glieder mit $e^{\frac{3x}{\sqrt{2}}}$ aber heben sich identisch weg, und wir erhalten also, indem wir die Glieder mit $e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}}$ explizit hinschreiben:

$$A_1 \approx e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}} [C_2 \{J_1(x) - \tfrac{5}{6} x K_1(x)\} \{-i J_3(\xi) K_3(x) - J_3(x) K_3(\xi)\}$$
$$+ \{J_3(x) - \tfrac{5}{6} x K_3(x)\} \{C_2 (J_1(x) K_3(\xi) + i J_3(\xi) K_3(x))$$
$$+ (A_1 C_2 - C_1 A_2)(J_1(\xi) K_3(\xi) - J_3(\xi) K_1(\xi))\}]$$

$$= e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}} [C_2 \{-i J_3(\xi) - \tfrac{5}{6} x K_3(\xi)\} \{J_1(x) K_3(x) - J_3(x) K_1(x)\}$$
$$+ (A_1 C_2 - C_1 A_2) \{J_3(x) - \tfrac{5}{6} x K_3(x)\} \{J_1(\xi) K_3(\xi) - J_3(\xi) K_1(\xi)\}].$$

Die asymptotische Gleichheit nach dem Zeichen $\approx$ bleibt erhalten, wenn wir die Größen $J(\xi)$ und $K(\xi)$ durch die nach diesem Zeichen gleichen Werte (16) ersetzen. Dann aber vereinfacht sich der Ausdruck bedeutend und erhält die Form:

(18)
$$A_1 \approx e^{\frac{2x}{\sqrt{2}}} i [C_2 \{\overline{J_3}(x) - \tfrac{5}{6} x \overline{K_3}(x)\} \{J_1(x) K_3(x) - J_3(x) K_1(x)\}$$
$$- (A_1 C_2 - C_1 A_2) e^{\frac{2 i \pi}{5}} \{J_3(x) - \tfrac{5}{6} x K_3(x)\}$$
$$\{\overline{J_1}(x) \overline{K_3}(x) - \overline{J_3}(x) \overline{K_1}(x)\}].$$

A_1 muß ja nun mit Ausnahme eines etwaigen konstanten Faktors reell sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $A_1 C_2 - C_1 A_2$ gleichen absoluten Betrag hat wie C_2. Hierin liegt die angekündigte Probe auf die Richtigkeit unserer Rechnung. In der Tat ergibt sich[1])

$$e^{\frac{2 i \pi}{5}} (A_1 C_2 - C_1 A_2) = \overline{C_2}. \tag{18'}$$

[1]) Ich habe mich zur Durchführung der Rechnung der Tatsache bedient, daß $s = \sin \frac{\pi}{10}$ eine quadratische Irrationalität ist, und habe die reellen Bestandteile aller Größen A und C als lineare Funktionen von s, die imaginären als Produkte solcher linearen Funktionen in den Faktor $c = \cos \frac{\pi}{10}$ ausgedrückt.

Daher ist recht einfach

$$(19)\qquad \Delta_1 \approx -e^{x\cdot\sqrt{2}}\cdot 2$$
$$\cdot\,\mathfrak{Im}\left[C_2\left\{J_3(x)-\tfrac{5}{6}\,x\,K_3(x)\right\}\left\{J_1(x)K_3(x)-J_3(x)K_1(x)\right\}\right],$$

wo $\mathfrak{Im}$ den imaginären Bestandteil bedeutet. Hierin setzen wir die asymptotischen Entwicklungen (17) für die J und K ein und erhalten nach kurzer Rechnung:

$$J_3(x)-\tfrac{5}{6}\,x\,K_3(x)\sim -f\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{i\pi}{8}}x^{-\frac{1}{2}}\left[0.833+0.238\,e^{-\frac{i\pi}{4}}\frac{1}{x}\right.$$
$$\left.+\,0.232\,e^{-\frac{i\pi}{2}}\frac{1}{x^2}\right]$$

$$J_1(x)K_3(x)-J_3(x)K_1(x)\sim \tfrac{1}{2}\,\Pi(-\tfrac{1}{5})f\cdot\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{i\pi}{8}}\left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)x^{-\frac{3}{2}-\frac{4}{5}}$$
$$\cdot\left[1+2.285\,e^{\frac{i\pi}{4}}\cdot\frac{1}{x}+6.632\,e^{\frac{i\pi}{2}}\frac{1}{x^2}\right],$$

$$(20)\qquad \Delta_1\sim -e^{x\cdot\sqrt{2}}f^2\,2\pi\,\Pi(-\tfrac{1}{5})\,x^{-2-\frac{4}{5}}$$
$$\cdot\,\mathfrak{Im}\left[C_2\left(1-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left\{0.833+(1.52+i\,1.17)\frac{1}{x}+(0.542+i\,5.30)\frac{1}{x^2}\right\}\right]$$
$$\sim e^{x\cdot\sqrt{2}}f^2\,2\pi\,\Pi(-\tfrac{1}{5})\,x^{-2-\frac{4}{5}}\left[1.28-0.617\,\frac{1}{x}-12.4\,\frac{1}{x^2}\right].$$

Dies ist unser Endresultat, das wir zu diskutieren haben. Die Klammer auf der rechten Seite ist für $x \geqq 10$ größer als 1.1, verschwindet also sicher für diese Werte von x nicht. Daraus allein ist aber kein sicherer Schluß zu ziehen, daß Δ_1 selbst dort nicht verschwindet, denn Δ_1 könnte ja erheblich von seinem asymptotischen Werte abweichen. Wahrscheinlich wird dies schon durch den Wert des nächsten Gliedes der asymptotischen Entwicklung, der sich zu $-58.3\cdot\frac{1}{x^3}$ rechnet und also für $x \geqq 10$ erheblich kleiner ist als das letzte in (20) angeschriebene Glied.

Um aber streng zu zeigen, daß Δ_1 für $x \geqq 10$ keine Wurzel besitzt, habe ich noch die Fehler der asymptotischen Darstellung abgeschätzt. Diese Fehler sind zweierlei Art:

1. Abweichung der Klammern in (20) von den Klammern in (19) [Fehler nach dem Zeichen $\backsim$]. Ich habe mit Hilfe allerdings nicht leichter Betrachtungen nachweisen können, daß für $x > 10$ diese Abweichung den Betrag 0.18 nicht übersteigt. Die hierzu führenden Überlegungen und Rechnungen möchte ich aber ihrer Länge wegen hier nicht geben.

2. Abweichung der Determinante Δ_1 von dem Ausdrucke (19) [Fehler nach dem Zeichen $\approx$]. Man sieht sofort, daß diese Abweichung nur unbeträchtlich sein kann. Ich habe sie nur roh überschlagen, indem ich noch das nächste Glied der Determinante mit dem Fehler $e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}$ formelmäßig ausgerechnet und eine obere Grenze dafür bestimmt habe. Dieses Glied liefert für $x > 10$ zu der Klammer einen Beitrag von höchstens 0.005, der bereits unter der Genauigkeit unserer Rechnung liegt. Dasselbe gilt erst recht von den drei übrigen Gliedern der Determinante[1]).

Damit ist die im Anfang dieses Abschnittes über die Determinante Δ behauptete Tatsache vollständig bewiesen[2]).

8. Es bleibt noch übrig, dieses Resultat mit demjenigen Herrn Noethers zu vergleichen. Noether führt eine Größe ein, hier ξ_N genannt, die folgendermaßen definiert ist:

$$\xi_N = 10^{-5} R^2 y^{10}.$$

Es ist also nach Gleichung (3') im Vergleich mit unserem $x = |\xi|$

$$\begin{aligned} \xi_N &= \left(\tfrac{5}{2}\right)^4 10^{-5} x^4 \qquad &\text{oder} \qquad x &= \tfrac{2}{5} \cdot 10 \cdot 10^{\frac{1}{4}} \xi_N^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2560} x^4 & &= 7.11\, \xi_N^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Noether gibt für die von ihm behauptete Wurzel den Wert

$$\xi_N = 20.9.$$

---

1) Das letzte verschwindet identisch.

2) Die untere Grenze für etwaige Wurzeln der Determinante würde sich mit den gleichen Abschätzungsmethoden übrigens noch erheblich herunterdrücken lassen, etwa bis $x = 7$.

Das wäre

$$x = 15.2 .$$

Dies ist aber im Widerspruch mit unserem Resultate.

Andererseits ist für $x < 10$

$$\xi_N < 3.9 ,$$

und für diese kleinen Werte von ξ_N konvergieren die Noetherschen Reihen recht gut. Herr Noether hat aber für $\xi_N \leqq 3.9$ keine Wurzel seiner Gleichung gefunden[1]).

Wir können daher annehmen, daß die Gleichung überhaupt keine Wurzel hat.

Das ist das Resultat, das ich ableiten wollte.

Ich möchte aber noch folgendes bemerken: Die von uns im Anschluß an Herrn Noether untersuchte Gleichung (1) bezieht sich nur auf ganz spezielle Störungsbewegungen, die sich über die Noethersche Laminarströmung überlagern könnten, nämlich sehr langwellige von bestimmter Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Für Störungsbewegungen von endlicher Wellenlänge oder zeitlich periodische Bewegungen hat Noether gleichfalls die Differentialgleichungen aufgestellt, die noch als Parameter die reziproke Wellenlänge α und die reziproke Periode β enthalten. Auf diese Gleichungen scheint sich die von uns befolgte Methode der Laplaceschen Transformation nur mit erheblicher Schwierigkeit anwenden zu lassen, weil sie sich nicht in einfacher Weise auf den Rang 1 reduzieren. Ich habe also keinen Einblick in die dort auftretenden Verhältnisse, und möchte nicht ausschließen, daß Störungsbewegungen dieser allgemeinen Art existieren können. Ich glaube allerdings, daß zu ihrer sicheren Beherrschung auch wieder asymptotische Methoden notwendig sein werden.

---

[1]) Ich habe diese Rechnung nicht nachgeprüft.

Anhang.

9. Die Restabschätzung der asymptotischen Reihen (20) erfordert einige Kunstgriffe. Ich gebe daher die Hauptzüge meiner Rechnung an. Wir setzen

$$(21) \qquad \Phi = \psi - \tfrac{5}{6}\xi\psi'$$

und können die Formel (19) so umschreiben:

$$(22) \qquad \Delta_1 \approx \frac{12}{5}\frac{1}{x}\,\mathfrak{Im}\,[C_2\overline{\Phi}_3(x)\{\psi_1(x)\Phi_3(x) - \psi_3(x)\Phi_1(x)\}].$$

Die Funktionen Φ haben nun eine einfachere Integraldarstellung als die ψ. Setzen wir in der Tat in (21) für die ψ die Integralwerte (12) ein, so folgt mit Hilfe einer Produktintegration

$$\Phi = \int\limits_{(S)} e^{\varepsilon\xi z}(\tfrac{11}{6}v + \tfrac{5}{6}zv')\,dz.$$

Aus der Gleichung

$$(5') \qquad v = z^{-\frac{11}{5}}\int \omega\,dz$$

ergibt sich aber

$$\tfrac{11}{6}v + \tfrac{5}{6}zv' = \tfrac{5}{6}z^{-\frac{6}{5}}\omega(z) = \tfrac{5}{6}z^{-\frac{1}{5}}w(z^2),$$

wo w die durch (6) definierte hypergeometrische Funktion von z^2 ist. Also im ganzen:

$$(23) \qquad \Phi = \tfrac{5}{6}\int\limits_{(S)} e^{\varepsilon\xi z}z^{-\frac{1}{5}}w(z^2)\,dz,$$

und speziell, indem wir, wie in **5.** und **6.**, die Schleifenintegrale durch geradlinige Integrale über die positive reelle Achse ausdrücken:

$$(23_1) \qquad \begin{aligned} \Phi_1(x) &= -\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\tfrac{5}{6}x^{-\frac{4}{5}}\int_0^\infty e^{-\zeta}\zeta^{-\frac{1}{5}}w_1^{(0)}\left(e^{\frac{5i\pi}{2}}\frac{\zeta^2}{x^2}\right)d\zeta, \\ \Phi_3(x) &= \tfrac{5}{3}f e^{\frac{5i\pi}{4}}\frac{1}{x}e^{\varepsilon x}\int_0^\infty e^{-\zeta}\left(1+e^{\frac{5i\pi}{4}}\frac{\zeta}{x}\right)^{-\frac{1}{5}}w_2^{(1)}\left(\left(1+e^{\frac{5i\pi}{4}}\frac{\zeta}{x}\right)^2\right)d\zeta. \end{aligned}$$

Ich will die Art, wie weiter verfahren wird, an dem ersten Integral erläutern, für das zweite gilt gedanklich das gleiche, während die Ausführung schwerer ist.

Wir zerlegen das Integral in (23_1) in zwei Teile, $\int\limits_0^x$ und $\int\limits_x^\infty$. In dem ersten Teilintegral ist das Argument von $w_1^{(0)}$ immer < 1 und daher wird hier $w_1^{(0)}$ durch die hypergeometrische Reihe

$$w_1^{(0)}(u) = F(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{9}{10}, u)$$

dargestellt. In dem zweiten Teilintegral aber gilt diese Darstellung nicht, sondern muß durch die Fortsetzung von $F(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, u)$ um den Punkt ∞ ersetzt werden. Diese steht bei Schlesinger (Handbuch I, S. 484, Formel $S_{0\infty}$).

Wir erhalten die asymptotische Entwicklung des Integrals in (23_1), wenn wir in dem Teilintegral $\int\limits_0^x$ die Reihe $w_1^{(0)}$ nach dem zweiten Gliede abbrechen, über die beiden ersten Glieder aber nicht von 0 bis x, sondern von 0 bis ∞ integrieren. Der Rest der asymptotischen Darstellung des Integrals setzt sich also aus drei Teilen zusammen: 1. den negativ genommenen, zwischen x und ∞ erstreckten Integralen über die beiden herausgezogenen Glieder von $w_1^{(0)}$; 2. dem zwischen 0 und x erstreckten Integral über den Rest der Reihe $w_1^{(0)}$; 3. dem Integral $\int\limits_x^\infty$.

Auf die Abschätzung im einzelnen gehe ich nicht ein, sie erfordert recht genaue Auswertungen der hypergeometrischen Reihen für gewisse komplexe Werte der Veränderlichen. Man findet z. B., daß für $x \geqq 10$ der Gesamtfehler des Integrals in (23_1) gegen seine asymptotische Darstellung weniger als $\Pi(-\frac{1}{5}) \cdot 8.4 \cdot \frac{1}{x^4}$ beträgt.

Nachdem in der geschilderten Weise die Funktionen Φ_1 und Φ_3 berechnet und ihre Reste abgeschätzt sind, erhält man die Funktionen ψ_1 und ψ_3 durch Integration. In der Tat ist

$$-\tfrac{6}{5}\,\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi = \frac{d}{d\,\xi}\left(\xi^{-\frac{6}{5}}\,\psi\right).$$

Um hieraus ψ zu finden, hat man zu berücksichtigen, daß $\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_1$ sich im Unendlichen integrabel verhält und daß $\psi_1(\xi)$ im Unendlichen verschwindet. Daher ist

$$\psi_1(x) = -\tfrac{6}{5}\,x^{\frac{6}{5}}\int\limits_{\infty}^{x}\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_1(\xi)\,d\,\xi, \tag{24_1}$$

das Integral über die positive reelle Achse der ξ-Ebene erstreckt.

Etwas schwieriger liegen die Verhältnisse bei ψ_3. Man bemerke, daß $\psi_3(\xi)$ im Unendlichen sicher für solche Werte von ξ verschwindet, deren Argument zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Für dieselben Argumente ist $\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_3$ im Unendlichen integrabel. Ziehen wir also aus dem Unendlichen unter einem Argument χ

$$-\frac{\pi}{4} > \chi \geq -\frac{\pi}{2}$$

den geradlinigen Weg X, der im Punkte x auf der reellen Achse einmündet, so ist

$$\psi_3(x) = -\tfrac{6}{5}\,x^{\frac{6}{5}}\int\limits_{X}\xi^{-\frac{11}{5}}\,\Phi_3(\xi)\,d\,\xi. \tag{24_2}$$

Setzt man unter die Integrale (24) die asymptotischen Entwicklungen der Φ nebst ihren Resten ein, so erhält man ohne erhebliche Schwierigkeiten die Reste der Funktionen ψ[1]).

[1]) Man beachte, daß man die Reste von Φ_3 nicht nur längs der reellen Achse, sondern zum Zwecke der Integration auch längs aller Wege X von genügend großem x kennen muß.