Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1913

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über arithmetische Eigenschaften gewisser ganzer Funktionen.

Von **Georg Faber** in Straßburg i. E.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. November 1913.

Zu den folgenden Untersuchungen wurde ich durch eine Vorlesung geführt, die ich im Sommersemester 1912 „über klassische Probleme der Elementargeometrie" hielt. Ich versuchte damals meinen Hörern die Transzendenz von π möglichst systematisch und ohne Kunstgriff zu beweisen. Von den üblichen Darstellungen befriedigte mich keine in dieser Hinsicht vollständig; ich lasse dahingestellt, inwieweit der Beweis, den ich im ersten Paragraphen mitteile und den man natürlich in einer Vorlesung anders auseinandersetzen wird, als es hier geschieht, jener Forderung entspricht. Jedenfalls hat er den Vorzug, daß die benützte Methode sich zur zahlentheoretischen Erforschung sehr vieler ganzer Funktionen verwerten läßt. Ich hatte dies damals an den Besselschen Funktionen als Beispiel näher ausgeführt und merkte erst nachträglich, daß Herr Stridsberg im 33. Bande der Acta mathematica 1910 auf anderem Wege zu den nämlichen und zu weiteren in der gleichen Richtung liegenden Ergebnissen gelangt war. Da aber mein Beweisverfahren viel einfacher und durchsichtiger, zugleich aber mindestens ebenso weittragend ist als das des Herrn Stridsberg, so dürfte die neue Herleitung der Stridsbergschen Sätze, die ich im zweiten und dritten Paragraphen gebe, vielen Mathematikern willkommen sein. Dabei verdanke ich gewisse Vereinfachungen in Einzelheiten meines ursprüng-

lichen Beweises dem nachträglichen Studium der Stridsbergschen Abhandlung.

Um die weitere Anwendbarkeit meiner Methoden darzutun, betrachte ich endlich in einem vierten Paragraphen über Herrn Stridsberg hinausgehend eine Klasse ganzer Funktionen, die schon Herr Perron[1]) auf ihre arithmetischen Eigenschaften hin untersucht hat; meine Ergebnisse sind viel allgemeiner als die des Herrn Perron.

§ 1.

Die Transzendenz von π.

Die algebraische Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze Zahlen sind, besitze die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Angenommen, eine dieser Wurzeln sei gleich π, dann wäre

$$(1 + \cos x_1)(1 + \cos x_2) \cdots (1 + \cos x_n) = 0. \tag{2}$$

Die Unmöglichkeit dieser Gleichung soll nachgewiesen werden.

Ich denke mir die Produkte in (2) ausgeführt, so daß aus (2) die folgende Summe wird:

$$1 + \Sigma \cos x_1 + \Sigma \cos x_1 \cos x_2 + \Sigma \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 + \cdots + \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_n = 0. \tag{3}$$

Die Σ bedeuten symmetrische Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Alle cos-Produkte verwandle ich in Summen unter Bewahrung der Symmetrie in den $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z. B.:

$$\cos x_1 \cos x_2 = \tfrac{1}{4}[\cos(x_1 + x_2) + \cos(-x_1 - x_2) + \cos(x_1 - x_2) + \cos(x_2 - x_1)] \tag{4}$$

$$\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 = \tfrac{1}{8}[\cos(x_1 + x_2 + x_3) + \cos(-x_1 - x_2 - x_3) + \cos(-x_1 + x_2 + x_3) + \cos(x_1 - x_2 - x_3) + \cos(x_1 - x_2 + x_3) + \cos(-x_1 + x_2 - x_3) + \cos(x_1 + x_2 - x_3) + \cos(-x_1 - x_2 + x_3)] \text{ usw.}$$

[1]) Math. Ann., Bd. 66 (1909), S. 482.

Auch schreibe ich $\Sigma\frac{1}{2}\cos x_1 + \Sigma\frac{1}{2}\cos(-x_1)$ statt $\Sigma\cos x_1$; multipliziert man dann noch (2) mit 2^n, so erhält man:

$$C_0 + \cos\zeta_1 + \cos\zeta_2 + \cdots + \cos\zeta_m = 0; \tag{5}$$

C_0 ist eine positive ganze Zahl, die ζ sind Aggregate der Form $\pm x_i \pm x_k \cdots \pm x_l$, sie sind selbstverständlich nicht alle voneinander verschieden; jede symmetrische Funktion von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ ist offenbar auch eine solche von $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ferner wurde durch die Umformung (4) erreicht, daß in (5) neben ζ_i und ebenso oft $-\zeta_i$ vorkommt. Die ζ sind daher Nullstellen einer geraden Funktion:

$$\varphi(\zeta) = A_0\zeta^{2m} + A_1\zeta^{2m-2} + \cdots + A_m \tag{6}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_m$. Man darf voraussetzen, daß keine dieser Nullstellen gleich Null ist; sonst hätte man nämlich in (5) alle Summanden $\cos\zeta_i$ mit Argumenten $\zeta_i = 0$ vorher mit der ganzen Zahl C_0 vereinigen können, die darnach mindestens gleich 2^n ist.

Es handelt sich nun darum, für $\cos\zeta_1, \cos\zeta_2, \ldots, \cos\zeta_m$ geeignete Näherungswerte zu finden. Ist $g(\zeta)$ irgend ein nur gerade Potenzen enthaltendes Polynom

$$g(\zeta) = c_0 + c_1\zeta^2 + c_2\zeta^4 + \cdots, \tag{7}$$

so verstehe man unter $\bar{g}(\zeta)$ die Majorante

$$|c_0| + |c_1\zeta^2| + |c_2\zeta^4| + \cdots \tag{8}$$

und unter $G(\zeta)$ das Polynom

$$g(\zeta) - g''(\zeta) + g^{(\mathrm{IV})}(\zeta) - g^{(\mathrm{VI})}(\zeta) + - \cdots, \tag{9}$$

bis diese Reihe von selbst abbricht. Dann ist

$$G(0)\cos\zeta = G(\zeta) + \Theta\cdot\bar{g}(\zeta). \tag{10}$$

Unter Θ wird hier, wie stets im folgenden, eine Zahl verstanden (nicht jedesmal die nämliche), deren absoluter Betrag für alle $|\zeta| < k$ kleiner als e^k bleibt, also:

$$|\Theta| < e^k \quad \text{für} \quad |\zeta| < k. \tag{10'}$$

Für $g(\zeta) = \zeta^{2h}$ ist Gleichung (10) unmittelbar klar; denn $G(\zeta)$ ist dann

$$= (-1)^h (2h)! \left(1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} + - \cdots + (-1)^h \frac{\zeta^{2h}}{(2h)!}\right);$$

da aber die Operation, durch die $G(\zeta)$ aus $g(\zeta)$ gebildet wird, dem distributiven Gesetze gehorcht, wonach aus

$$g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta) \quad \text{auch} \quad G(\zeta) = G_1(\zeta) + G_2(\zeta)$$

folgt, gilt (10) allgemein.

Man wähle für $g(\zeta)$ das folgende Polynom:

$$(11) \qquad g(\zeta) = \frac{\zeta^{2\lambda} (\varphi(\zeta))^{2\lambda+1} \cdot A_0^{2\lambda m + m - 1}}{(2\lambda)!},$$

multipliziere (5) mit $G(0)$ und ersetze vermöge (10)

$$G(0)\cos(\zeta_i) \quad \text{durch} \quad G(\zeta_i) + \Theta g(\zeta_i):$$

so erhält man

$$(12) \qquad C_0 G(0) + \sum_1^m{}^i G(\zeta_i) + \Theta \sum_1^m{}^i g(\zeta_i) = 0,$$

wo

$$(12') \qquad |\Theta| < e^k,$$

falls k die größte der Zahlen $|\zeta_i|$ ist.

Die folgenden Schlüsse sind einfach und bekannt: Es sind offenbar sowohl $C_0 G(0)$ als auch $\sum_1^m{}^i G(\zeta_i)$ ganze Zahlen, $\Theta \sum_1^m{}^i g(\zeta_i)$ wird mit wachsendem λ beliebig klein, mithin Null; $\sum_1^m{}^i G(\zeta_i)$ ist durch $2\lambda + 1$ teilbar, $C_0 G(0)$ ist (mod $2\lambda + 1$)

$$\equiv (-1)^\lambda (\varphi(0))^{2\lambda+1} A_0^{2\lambda m + m - 1},$$

also bei passender Wahl von λ nicht durch $(2\lambda + 1)$ teilbar; die Gleichung (12) und somit die angenommene Gleichung (1) für π sind unmöglich.

§ 2.

Arithmetische Eigenschaften der Besselschen und verwandter ganzer Funktionen.

Es sei jetzt die Differentialgleichung

$$(13)\quad b_m x^m \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + b_{m-1} x^{m-1} \frac{d^m y}{dx^m} + \cdots + b_0 \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (b_m \neq 0)$$

vorgelegt, von der die der Besselschen Funktionen ein ganz spezieller Fall ist. Versteht man unter $f(\nu)$ das Polynom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(14)\quad f(\nu) = b_0 \nu + b_1 \nu(\nu-1) + \cdots + b_m \nu(\nu-1)\ldots(\nu-m)$$

und setzt man voraus, daß $f(\nu)$ keine positiven ganzzahligen Nullstellen besitzt, so genügt der Differentialgleichung (13) offenbar die ganze transzendente Funktion

$V(x)$ oder ausführlicher geschrieben

$$(15)\quad V(x, b_0, b_1, \ldots, b_m) = 1 + \frac{x}{f(1)} + \frac{x^2}{f(1)f(2)} + \cdots + \frac{x^\nu}{f(1)\cdot f(2)\ldots f(\nu)} + \cdots.$$

Für den Fall, daß $b_0, b_1, \ldots, b_m, x_0, x_1, \ldots, x_n$, ferner $C_0, C_1, \ldots, C_n$ rationale Zahlen sind, soll eine Beziehung der Form

$$(16)\quad C_0 V(x_0) + C_1 V(x_1) + \cdots + C_n V(x_n) = 0$$

als unmöglich nachgewiesen werden, es sei denn daß $C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$ ist.

Wegen der Funktionalgleichung

$$(17)\quad V(ax, ab_0, ab_1, \ldots, ab_m) = V(x, b_0, b_1, \ldots, b_m)$$

genügt es beim Beweise, die b, x als ganze Zahlen vorauszusetzen; die C können selbstverständlich ebenso gut ganzzahlig wie rational vorausgesetzt werden; ich verstehe daher im folgenden unter den b, x, C stets ganze Zahlen.

Ist $g(x)$ irgend ein Polynom

$$g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots,$$

so verstehe man unter $\bar{g}(x)$ die Majorante

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \cdots$$

und unter $Opg(x)$ das Polynom, das durch die folgende Differentialoperation aus $g(x)$ hervorgeht[1]):

$$(18) \quad Opg(x) = b_0 g'(x) + b_1 x g''(x) + \cdots + b_m x^m g^{(m+1)}(x).$$

Statt $Op(Opg(x))$ schreibe ich kürzer $Op^2 g(x)$ usf.; ferner setze ich

$$(19) \quad G(x) = g(x) + Opg(x) + Op^2 g(x) + Op^3 g(x) + \cdots,$$

bis die Reihe von selbst abbricht. Dann gilt entsprechend der Gleichung (10) des vorigen Paragraphen mit genau der nämlichen Begründung wie dort:

$$(20) \qquad G(0) V(x) = G(x) + \Theta g(x).$$

Man wähle speziell für $g(x)$ das Polynom

$$(21) \qquad g_{\lambda p}(x) = \frac{(x - x_0)^\lambda \prod_1^n{}^i (x - x_i)^p}{\lambda!},$$

wo $x_0 \neq 0$, p eine Primzahl und λ eine der $(m+1)$ Zahlen $p-1, p-2, \ldots, p-m-1$ sein soll. Man bilde nach (19) die zugehörige Funktion $G_{\lambda p}(x)$; multipliziert man dann (16) mit $G_{\lambda p}(0)$ und ersetzt man $G_{\lambda p}(0) \cdot V(x_k)$ durch $G_{\lambda p}(x_k) + \Theta \bar{g}_{\lambda p}(x_k)$, so werden alle Summanden $C_k G_{\lambda p}(x_k)$ ganze Zahlen und für $k = 1, 2, \ldots, n$ durch p teilbar, während das Restglied

$$\Theta \sum_1^n{}^k \bar{g}_{\lambda p}(x_k)$$

bei hinreichend großem p beliebig klein, also Null wird. Um die Unmöglichkeit der Beziehung (16) nachzuweisen, genügt

[1]) Im vorigen Paragraphen war $Opg(x)$ einfach $-g''(x)$.

es also zu zeigen, daß $C_0 G_{\lambda p}(x_0)$ für mindestens einen der obigen Werte λ nicht durch p teilbar ist.

Ich setze zur Abkürzung noch $(x - x_0)^\lambda = g_\lambda(x)$; wäre nun $C_0 G_{\lambda p}(x_0)$ durch p teilbar für $\lambda = p-1,\ p-2,\ p-m-1$, so wäre offenbar auch, falls nur $p > |C_0(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)|$ gewählt wurde:

$$(22)\quad G_\lambda(x_0) \equiv 0 \pmod p \text{ für } \lambda = p-1,\ p-2,\ \ldots,\ p-m-1;$$
$$(\lambda \text{ sei } \geq m+1).$$

Nun ist nach (18) und (19), wenn man noch auf der rechten Seite von (18) die Faktoren x, $x^2, \ldots, x^m$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt denkt,

$$(23)\quad Opg_\lambda(x) = c_1 g_{\lambda-1}(x) + c_2 g_{\lambda-2}(x) + \cdots + c_{m+1} g_{\lambda-m-1}(x),$$

also

$$(23')\quad G_\lambda(x) = g_\lambda(x) + c_1 G_{\lambda-1}(x) + c_2 G_{\lambda-2}(x) \cdots + c_{m+1} G_{\lambda-m-1}(x)$$

und

$$(24)\quad G_\lambda(x_0) = c_1 G_{\lambda-1}(x_0) + c_2 G_{\lambda-2}(x_0) + \cdots + c_{m+1} G_{\lambda-m-1}(x_0),$$

wo die $c_1, \ldots, c_{m+1}$ ganze Zahlen sind und insbesondere

$$c_{m+1} = b_m x_0^m \lambda(\lambda-1), \ldots, (\lambda - m) \quad \text{ist.}$$

Wenn also für $m+1$ aufeinanderfolgende und unterhalb p liegende Werte

$$\mu = \lambda,\ \lambda - 1,\ \ldots,\ \lambda - m$$

$G_\mu(x_0) \equiv 0 \pmod p$ ausfällt, so geht auch $G_{\lambda-m-1}(x_0)$ durch p auf, sobald nur p so groß gewählt ist, daß weder b_m noch x_0 durch p teilbar ist; hieraus und aus der Voraussetzung (22) schließt man nacheinander

$$(25)\quad G_{p-m-2}(x_0) \equiv 0,\ G_{p-m-3}(x_0) \equiv 0, \ldots,\ G_0(x_0) \equiv 0 \pmod p.$$

Die letzte dieser Kongruenzen ist widersinnig, da $G_0(x)$ identisch $= 1$ ist.

Damit ist Gleichung (16) als unmöglich nachgewiesen.

Ohne die geringste weitere Schwierigkeit beweist man diejenige allgemeinere Beziehung, die aus (16) hervorgeht, wenn

man (für $k = 1, 2, \ldots, n$) $V(x_k)$ durch $V(x_{k1}) + V(x_{k2}) + \cdots + V(x_{k\,l_k})$ ersetzt, wobei $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{k\,l_k}$ die l_k Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten bedeuten.

Eine zweite Verallgemeinerung ist ebenfalls leicht anzubringen, auch kombiniert mit der soeben angegebenen; sie besteht darin, den Summanden $C_k V(x_k)$ durch die Summe

$$W_k = C_{k0} V(x_k) + C_{k1} V'(x_k) + C_{k2} V''(x_k) + \cdots + C_{k\,m+1} V^{(m+1)}(x_k)$$

zu ersetzen; die Behauptung lautet dann erstens, daß eine derartige Summe $\sum_1^n{}^k W_k$ nur dann gleich Null sein kann, wenn jeder einzelne Summand W_k gleich Null ist und zweitens[1]), daß für $x_k \neq 0$ dies nur möglich ist, wenn $C_{k\,l+1} = -b_k x_k^l C_{k0}$ ist für $l = 0, 1, \ldots, m$, m. a. W., wenn die Gleichung $W_k = 0$ nichts anderes aussagt als die Differentialgleichung selbst für $x = x_k$, während für $x_k = 0$ selbstverständlich die Bedingung

$$C_{k0} + \frac{C_{k1}}{f(1)} + \frac{2!\,C_{k2}}{f(1)f(2)} + \cdots \frac{(m+1)!\,C_{k\,m+1}}{f(1)f(2)\ldots f(m+1)} = 0$$

notwendig und hinreichend ist.

Setzt man nämlich wieder

$$g_{\lambda p}(x) = \frac{(x - x_0)^\lambda \prod_1^n{}^i (x - x_i)^p}{\lambda!},$$

[1]) Dieser Teil des Satzes war schon vor dem Erscheinen der Stridsbergschen Abhandlung von Herrn Perron bewiesen worden (Math. Ann., Bd. 66 (1909), S. 484; vgl. auch § 4 der vorliegenden Arbeit). Herr Perron gibt dem Satze folgende abweichende, aber völlig gleichwertige Formulierung: Eine Relation $C_0 V(x_0) + C_1 V'(x_0) \cdots + C_m V^{(m)}(x_0)$ ist bei rationalem x_0 nur dann möglich, wenn $C_0 = C_1 = \ldots C_m = 0$ ist. Nach der im Text befolgten Methode beweist man die Perronsche Fassung des Satzes fast noch einfacher als die Stridsbergsche: da C_{m+1} von vornherein gleich Null angenommen ist, ergibt sich die Richtigkeit der Gleichung (26) $I\lambda(x_0) = 0$ auch für $\lambda = 0$. $I_0(x_0) = 0$ besagt aber $C_0 = 0$, sodann folgt aus $I_1(x_0) = 0$, daß $C_1 = 0$ ist usw.

so sieht man ohne weiteres ein, daß nicht nur $G(0)\,V(x)$ durch $G(x)$, sondern auch die Ableitungen $G(0)\,V^{(\mu)}(x)$ durch $G^{(\mu)}(x) - \mu \leq m+1$ — mit der für die Zwecke des vorliegenden Beweises genügenden Annäherung approximiert werden, ferner daß

$$C_{k0}\,G_{\lambda p}(x_k) + C_{k1}\,G'_{\lambda p}(x_k) + \cdots + C_{k\,m+1}\,G^{(m+1)}_{\lambda p}(x_k)$$

für $k > 0$ eine durch p teilbare ganze Zahl ist. Man schließt wieder, daß dann auch

$$C_{00}\,G_{\lambda p}(x_0) + C_{01}\,G'_{\lambda p}(x_0) + \cdots + C_{0\,m+1}\,G^{(m+1)}_{\lambda p}(x_0)$$

durch p teilbar wäre für

$$\lambda = p-1,\ p-2,\ \ldots,\ p-m-1;$$

bezeichnet man mit $\Gamma_\lambda(x)$, was aus

$$C_{00}\,G(x) + C_{01}\,G'(x) + \cdots + C_{0\,m+1}\,G^{(m+1)}(x)$$

wird, wenn man $g(x) = (x-x_0)^\lambda$ zu Grunde legt, so folgt aus den Rekursionsformeln (23) und (24), die ebenso für $\Gamma_\lambda(x)$ wie für $G_\lambda(x)$ gelten, daß $\Gamma_\lambda(x_0)$, wenn $\lambda \geq 1$ ist, durch p teilbar ist und da p noch unendlich viele Werte annehmen kann, muß

$$\Gamma_\lambda(x_0) = 0 \text{ sein für } \lambda \geq 1; \tag{26}$$

insbesondere sind $\Gamma_1(x_0) = 0$, $\Gamma_2(x_0) = 0 \ldots \Gamma_{m+1}(x_0) = 0$ $m+1$ lineare homogene Gleichungen zur Bestimmung der $m+1$ Verhältnisse $C_{kl} : C_{k0}$ $(l = 1, 2, \ldots, m+1)$, die dadurch vollständig bestimmt sind; denn die erste dieser Gleichungen enthält nur C_{00}, C_{01}, die zweite nur C_{00}, C_{01}, C_{02} usw.; das sich durch Auflösung jener Gleichungen eindeutig ergebende Lösungssystem muß also mit dem von vornherein bekannten System $C_{0\,l+1} = -b_l x_0^l C_{00}$ identisch sein. (Man kann dies natürlich unschwer durch explizite Aufstellung und Auflösung der Gleichungen (26) verifizieren; man verfährt zu dem Zwecke am einfachsten so: wenn man $g_\lambda(x) = x^\lambda$ statt $= (x-x_0)^\lambda$ setzt, so folgt aus (26) für die neuen Funktionen $\Gamma_\lambda(x)$

$$\Gamma_\lambda(x_0) = C_{00}\,x_0^\lambda. \tag{26}$$

Die Rekursionsformel (23') lautet für $x_0 = 0$ einfach

$$G_\lambda(x) = x^\lambda + f(\lambda)\, G_{\lambda-1}(x)$$

und ihr entspricht nun die folgende aus ihr hervorgehende Formel für $\Gamma_\lambda(x) - \lambda \geq 1$ —

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\Gamma_\lambda(x) = C_{00}\, x^\lambda + C_{01}\, \lambda\, x^{\lambda-1} + \cdots \\ &+ C_{0\,m+1}\, \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m)\, x^{\lambda-m} + f(\lambda)\, \Gamma_{\lambda-1}(x).\end{aligned}$$

Auf Grund von (26) folgt daraus:

$$C_{01}\, x_0^{\lambda-1}\, \lambda + \cdots C_{0\,m+1}\, x_0^{\lambda-m}\, \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-m) = -C_{00}\, f(\lambda)\, x_0^{\lambda-1}.$$

Und hieraus ergibt sich zunächst für $\lambda = 1$

$$C_{01} = -b_0\, C_{00},$$

sodann durch den Schluß von λ auf $\lambda + 1$

$$C_{0\,\lambda+1} = -b_\lambda\, x_0^\lambda\, C_{00}.)$$

§ 3.

Ausdehnung der Ergebnisse auf eine andere Klasse ganzer Funktionen.

In diesem Paragraphen betrachte ich nach dem Vorgang des Herrn Stridsberg noch eine andere Klasse ganzer Funktionen: unter $f(\nu)$ verstehe ich wieder die Funktion (24) und setze:

$$\begin{aligned}(28)\qquad &U(x) = 1 + \frac{x}{f(1)+a} + \cdots \\ &+ \frac{x^\nu}{(f(1)+a)(f(2)+a)\ldots(f(\nu)+a)} + \cdots.\end{aligned}$$

a ist eine von Null verschiedene ganze Zahl; die Funktion $f(\nu) + a$ soll keine positive ganzzahlige Nullstelle, dagegen einen Faktor $c\,\nu + b$ besitzen, wo c und b teilerfremde ganze Zahlen sind. Dadurch wird erreicht — und dies ist der einzige Zweck dieser Voraussetzung —, daß

$$(29)\qquad c^\nu (f(1)+a)(f(2)+a)\ldots(f(\nu)+a)$$

durch $\nu!$ teilbar ist.

Die Funktion $U(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$(29)\qquad \begin{aligned} &b_m x^m \frac{d^{(m+1)} y}{d x^{m+1}} \\ &+ b_{m-1} x^{m-1} \frac{d^m y}{d x^m} + \cdots + b_{00} \frac{d y}{d x} + a \frac{y-1}{x} - y = 0. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt, wenn wieder $g(x)$ irgend ein Polynom ist,

$$(30)\qquad \begin{aligned} Op\, g(x) &= b_0 g'(x) + b_1 x g''(x) + \cdots + b_m x^m g^{(m+1)}(x) \\ &+ a \frac{g(x) - g(0)}{x} \end{aligned}$$

und

$$(31)\qquad G(x) = g(x) + Op\, g(x) + Op'\, g(x) + \cdots,$$

so wird

$$(32)\qquad G(0) \cdot U(x) = G(x) + \Theta g(x).$$

Wie $G(x)$ aus $g(x)$, so entsteht $\Gamma(x)$ aus dem Polynome $\gamma(x)$ usw. Setzt man

$$(33)\qquad \gamma_{\lambda\mu}(x) = x^\lambda (x - x_0)^\mu \quad -\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad x_0 \neq 0 \quad -,$$

so ist nach (30):

$$(34)\qquad Op\, \gamma_{\lambda\mu}(x) = (f(\lambda) + a)\gamma_{\lambda-1\,\mu}(x) + \sum_1^{m+1} {}_\nu\, c_\nu \gamma_{\lambda-1+\nu\,\mu-\nu}(x)$$

(die c_0 sind ganze Zahlen, speziell $c_{m+1} = b_m \mu(\mu-1)\ldots(\mu-m)$ und $c_\nu = 0$ für alle $\nu > \mu$), ferner

$$(35)\qquad \Gamma_{\lambda\mu}(x) = \gamma_{\lambda\mu}(x) + (f(\lambda) + a)\Gamma_{\lambda-1\,\mu}(x) + \sum_1^{m+1} {}_\nu\, c_\nu \Gamma_{\lambda-1+\nu\,\mu-\nu}(x),$$

endlich

$$(36)\qquad \Gamma_{\lambda\mu}(x_0) = (f(\lambda) + a)\Gamma_{\lambda-1\,\mu}(x_0) + \sum_1^{m+1} {}_\nu\, c_\nu \Gamma_{\lambda-1+\nu\,\mu-\nu}(x_0).$$

$\Gamma_{\lambda\mu}(x)$ setzt sich mithin linear mit ganzzahligen Koeffizienten aus den Funktionen

$$(37)\qquad \Gamma_{\lambda-1+\nu\,\mu-\nu}(x_0)\,(\nu = 0, 1, \ldots, m+1)$$

zusammen.

Die Summe der Indizes der Funktionen (37) ist $\lambda+\mu-1$; der Koeffizient c_ν in (36) hat den Teiler $\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)$

herrührend von der $(\mu-\nu)$-maligen Differentiation des Faktors $(x-x_0)^\mu$ von $\gamma_{\lambda\mu}(x)$; führt man die Funktionen (37) in gleicher Weise auf solche mit einer Indizessumme $=\lambda+\mu-2$ usw. zurück, so erhält man für die ursprüngliche Funktion $\Gamma_{\lambda\mu}(x_0)$ lineare Ausdrücke der folgenden Art:

$$\Gamma_{\lambda\mu}(x_0)=\Sigma c_{\lambda'\mu'}\Gamma_{\lambda'\mu'}(x_0),\ \text{wo}\ \lambda'+\mu'=\lambda+\mu-k\ \text{ist}\quad(k=1,2,\ldots). \tag{38}$$

Im Verlauf des Verfahrens wird es eintreten, daß einer der Indizes λ', μ' zu Null wird, während der andere noch >0 ist; wird zuerst $\lambda'=0$, so hat $\Gamma_{0\mu'}(x_0)$ in (38) einen Koeffizienten $c_{0\mu'}$, der offenbar durch

$$(f(\lambda)+a)\cdot(f(\lambda-1)+a)\ldots(f(1)+a)$$

teilbar ist; wird aber zuerst $\mu'=0$, so hat der zugehörige Koeffizient $c_{\lambda'0}$ nach dem vorhin Bemerkten den Teiler $\mu!$, herrührend von der μ-maligen Differentiation des Faktors $(x-x_0)^\mu$; daraus folgt mit Beachtung von (29) der

Hilfssatz: Ist ν sowohl $\leq\lambda$ als auch $\leq\mu$, so ist $c^\lambda\Gamma_{\lambda\mu}(x_0)$ durch $\nu!$ teilbar.

Angenommen nun, es existiere eine Relation

$$C_0U(x_0)+C_1U(x_1)+\cdots+C_nU(x_n)=0\ \text{mit ganzen Zahlen}\ C_0,\ldots,C_n,\ x_0,\ldots,x_n; \tag{39}$$

dann setze man

$$g_{p\lambda}(x)=\frac{c^p(x-x_0)^\lambda x^p\prod_1^n{}^i(x-x_i)^p}{\lambda!} \tag{40}$$

$$(x_0\neq 0;\ \lambda=p-1,\ p-2,\ldots,\ p-m-1;$$

$$p\ \text{Primzahl}>|c\cdot C_0\cdot b_m\cdot x_0\cdot\prod_1^n{}^i(x_0-x_i)|).$$

Es folgt wie bisher, daß auch

$$C_0G_{p\lambda}(x_0)+C_1G_{p\lambda}(x_1)+\cdots+C_nG_{p\lambda}(x_n)=0 \tag{41}$$

sein müßte, und da

(42) $G_{p\lambda}(x_i) \equiv 0 \mod p$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n$
(für $x_i \neq 0$ nach dem Hilfssatze und für $x_i = 0$ wegen (29)),

so müßte auch

(43) $G_{p\lambda}(x_0)$ durch p teilbar sein für $\lambda = p-1, p-2, \ldots, p-m-1$,

woraus folgt:

(44) $\Gamma_{p\mu}(x_0) \equiv 0 \mod p$ für $\mu \geq p-m-1$.

Da identisch

(45) $$\gamma_{p\mu+1}(x) = \gamma_{p+1\mu}(x) - x_0 \gamma_{p\mu}(x),$$

also auch

(46) $$\Gamma_{p\mu+1}(x) = \Gamma_{p+1\mu}(x) - x_0 \Gamma_{p\mu}(x),$$

so ergibt sich weiter

(47) $\Gamma_{p+1\mu}(x_0) \equiv 0 \mod p$ für $\mu > \mu'$,

falls für $\mu > \mu'$ $\Gamma_{p\mu}(x_0) \equiv 0 \mod p$ ist.

Wendet man nun auf die rechte Seite von (34) für $\lambda = p+1$ die Identität

(48) $$\gamma_{p+\nu\,\mu-\nu}(x) = x^\nu \gamma_{p\,\mu-\nu}(x)$$

an und entwickelt man hier den Faktor x^ν nach Potenzen von $(x-x_0)$, so gehen (34) und (36) in folgende Gleichungen über:

(49) $$Op\,\gamma_{p+1\mu}(x) = \sum_0^{m+1\nu} d_\nu \gamma_{p\mu-\nu}(x)$$
$(\mu > 0;\ d_\nu = 0 \text{ für } \nu > \mu)$,

(50) $$\Gamma_{p+1\mu}(x_0) = \sum_0^{m+1\nu} d_\nu \Gamma_{p\,\mu-\nu}(x_0)$$

wo die Koeffizienten d_ν ganze Zahlen sind und insbesondere

(51) $$d_{m+1} = x_0^{m+1} b_m \mu(\mu-1)\ldots(\mu-m)$$

ist.

Da $\Gamma_{p+1\mu}(x_0)$ und $\Gamma_{p\mu}(x_0)$ für $\mu > p-m-1$ durch p teilbar wird, so folgt aus (50) für $\mu = p-1$, daß auch

(52) $\Gamma_{p\,p-m-2}(x_0) \equiv 0 \mod p$

und wegen (47)

$$\Gamma_{p+1\,p-m-2}(x_0) \equiv 0 \bmod p \tag{53}$$

ist.

Dann aber ergibt sich aus (50) für $\mu = p-2$

$$\Gamma_{p\,p-m-3}(x_0) \equiv 0,\ \Gamma_{p+1\,p-m-3}(x_0) \equiv 0 \bmod p; \tag{54}$$

usf., schließlich

$$\Gamma_{p\,0}(x_0) \equiv 0,\ \Gamma_{p+1\,0}(x_0) \equiv 0 \bmod p. \tag{55}$$

Nun ist aber nach Definition (vgl. (30), (31))

$$\Gamma_{p+1\,0}(x) = x_0^{p+1} + (f(p+1) + a)\Gamma_{p\,0}(x_0); \tag{56}$$

aus (55) würde somit folgen

$$x_0^{p+1} \equiv 0 \bmod p \text{ entgegen der Voraussetzung } p > |x_0|. \tag{57}$$

Damit ist die Unmöglichkeit einer Relation wie (39) dargetan.

Auch hier lassen sich die Verallgemeinerungen, von denen am Ende des zweiten Paragraphen die Rede war, ohne neue Schwierigkeit anbringen.

§ 4.

Weitere Verallgemeinerungen.

In diesem letzten Paragraphen betrachte ich die Differentialgleichung

$$y = Q_0(x)y' + Q_1(x)y'' + \cdots + Q_m(x)y^{(m+1)}, \tag{58}$$

wo $Q_i(x)$ ein Polynom höchstens i^{ten} Grades ist, nur $Q_m(x)$ soll genau vom m^{ten} Grade sein:

$$Q_m^{(m)}(0) \neq 0. \tag{59}$$

Die ganz spezielle Annahme $Q_i(x) = b_i x^i$ führt zu der Differentialgleichung (13) des zweiten Paragraphen zurück. Die Koeffizienten der Polynome $Q_i(x)$ werden wieder rational vorausgesetzt; ich beweise dann folgenden Satz:

Erstens: Es gibt eine bis auf einen Faktor bestimmte ganze transzendente Funktion $V(x)$, die der Differentialgleichung (58) genügt.

Zweitens: Sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$; $C_{00}, C_{01}, \ldots, C_{0\,m+1}, \ldots, C_{n0}, C_{n1}, \ldots, C_{n\,m+1}$ rationale Zahlen und ist außerdem $Q_m(x_i) \neq 0\,(i = 0, 1, \ldots, n)$, so ist eine Relation der Form

$$\sum_1^n{}^k W_k = 0, \tag{60}$$

wo W_k soviel bedeutet wie

$$C_{k0} V(x_k) + C_{k1} V'(x_k) \ldots + C_{k\,m+1} V^{(m+1)}(x_k),$$

nur dann möglich, wenn jeder einzelne Summand

$$W_k = 0 \tag{61}$$

ist $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Drittens: Die Gleichung $W_k = 0$ erfordert, daß alle Koeffizienten $C_{k0}, C_{k1}, \ldots, C_{k\,m+1}$ entweder gleich Null sind, oder daß sie die Proportion

$$\begin{aligned} &C_{k0} : C_{k1} : C_{k2} : \ldots : C_{k\,m+1} \\ &= -1 : Q_1(x_k) : Q_2(x_k) : \ldots : Q_m(x_k) \end{aligned} \tag{62}$$

erfüllen; m. a. W.: die Relation $W_k = 0$ ist nur möglich, wenn sie sich aus der Differentialgleichung (58) für $x = x_k$ von selbst ergibt.

Den ersten und dritten dieser Sätze hat schon Herr Perron[1]) bewiesen; ich könnte mich für meinen allgemeineren Satz auf diese Resultate des Herrn Perron oder wenigstens auf die von ihm begründete Theorie der Jacobi-Ketten stützen, die bei ihm die Grundlage der weiteren Entwicklungen bildet. Ich ziehe es aber vor, den ganzen obigen Satz neu zu beweisen, einerseits weil dies kürzer und für den Leser bequemer ist als fortgesetzte Verweisungen, andererseits weil mir mein Verfahren auch für andere Probleme verwertbar erscheint.

[1]) A. a. O.: Math. Ann. Bd. 66 (1909), p. 482.

Im ganzen wird meine Methode wieder dieselbe sein wie in den vorhergehenden Paragraphen; nur an einer Stelle bedarf sie einer Ergänzung. Da sonst alle Schlüsse die nämlichen bleiben wie im zweiten Paragraphen, führe ich nur den Teil des Beweises näher aus, der neu hinzukommt, und dies ist einzig und allein der Nachweis, daß jene Funktion $V(x)$ existiert und daß sie in ähnlicher Weise wie die im zweiten Paragraphen so genannte Funktion durch Polynome approximiert werden kann.

Ich darf zur Vereinfachung der Bezeichnung annehmen, daß die Null nicht zu den Wurzeln der Gleichung $Q_m(x) = 0$ gehört; sonst ließe sich dies leicht durch die Substitution $x - x_0 \mid x$ mit rationalem x_0 erreichen, wobei die Form der Differentialgleichung (58) völlig ungeändert bleibt. Dies vorausgesetzt, vervollständige ich die Definition von $V(x)$ durch die Nebenbedingung $V(0) = 1$, die sich als möglich erweisen wird. (Für den zu beweisenden Satz an sich ist diese Vervollständigung der Definition von $V(x)$ offenbar unnötig; sie vereinfacht nur den Beweis.)

Auch setze ich die Koeffizienten der $Q_i(x)$ zunächst als ganze Zahlen voraus; hinterher läßt sich der Beweis sehr leicht auf den Fall rationaler Koeffizienten ausdehnen.

Wenn $g(x)$ irgend ein Polynom ist, verstehe ich unter $Opg(x)$ sowie unter $G(x)$ jetzt folgendes:

$$Opg(x) = Q_0(x)g'(x) + Q_1(x)g''(x) + \cdots + Q_m(x)g^{(m+1)}(x) \tag{63}$$

$$G(x) = g(x) + Opg(x) + Op^2g(x) + \cdots, \tag{64}$$

bis die Reihe von selbst abbricht.

$G(x)$ genügt offenbar der Differentialgleichung

$$G(x) = g(x) + OpG(x)$$

oder anders geschrieben:

$$y - Q_0(x)y' - Q_1(x)y'' - \cdots - Q_m(x)y^{m+1} = g(x). \tag{65}$$

Unter $g_r(x)$ verstehe man soviel wie x^r; es ergibt sich

(66)
$$Op\, g_\nu(x) =$$
$$x^{\nu-1}\left(Q_0\nu + \frac{Q_1'(0)}{1}\nu(\nu-1) + \frac{Q_2''(0)}{2!}\nu(\nu-1)(\nu-2) + \cdots + \frac{Q_m^{(m)}(0)}{m!}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m)\right)$$
$$+ x^{\nu-2}\left(Q_1(0)\nu(\nu-1) + \frac{Q_2'(0)}{1}\nu(\nu-1)(\nu-2) + \cdots + \frac{Q_m^{(m-1)}(0)}{m!}\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m)\right)$$
$$+ \cdots + x^{\nu-m-1}\, Q_m(0)\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m),$$

was ich kürzer so schreibe:

(67) $$Op\, g_\nu(x) = x^{\nu-1}\, h_1(\nu) + x^{\nu-2}\, h_2(x) + \cdots + x^{\nu-m-1}\, h_{m+1}(\nu);$$

die Polynome $h_1(\nu)$ und $h_{m+1}(\nu)$ sind vom $(m+1)^{\text{ten}}$, die übrigen $h_i(\nu)$ höchstens vom $(m+1)^{\text{ten}}$ Grade.

Aus (64) und (67) folgt

(68)
$$G_\nu(x) = x^\nu + h_1(\nu)\, G_{\nu-1}(x) + h_2(\nu)\, G_{\nu-2}(x) + \cdots + h_{m+1}(\nu)\, G_{\nu-m-1}(x).$$

Bezeichnet man daher mit $B_k^{(\nu)}$ den Koeffizienten von x^k in $G_\nu(x)$, der eine ganze Zahl ist, so gilt für $k \leq \nu - 1$ die folgende von k unabhängige Rekursionsformel

(69) $$B_k^{(\nu)} = h_1(\nu)\, B_k^{(\nu-1)} + h_2(\nu)\, B_k^{(\nu-2)} + \cdots + h_{m+1}(\nu)\, B_k^{(\nu-m-1)}.$$

Man bemerke zunächst, daß $\overline{\lim_{\nu=\infty}} |H^{-\nu} B_k^{(\nu)}| = \infty$ ist, bei beliebigem, aber konstant gehaltenem k und für jede noch so große von ν unabhängige Zahl H; denn einerseits sind die Zahlen $B_k^{(\nu)}$, wie ein Blick auf das Bildungsgesetz der Koeffizienten $h_l(\nu)$ lehrt, durch $\frac{\nu!}{k!}$ teilbar, andererseits können nicht $B_k^{(\nu)}$, $B_k^{(\nu-1)}$, ..., $B_k^{(\nu-m)}$ gleichzeitig Null sein, da sonst auch $B_k^{(\nu-m-1)}$ und schließlich $B_k^{(k)}$ Null wäre, während tatsächlich $B_k^{(k)} = 1$ ist. Somit ist es möglich zu jeder gegebenen positiven Zahl H Zahlen ν auf unendlich viele Weisen so zu wählen, daß

(70) $$|B_k^{(\nu)} H^{-\nu}| > |B_k^{(\nu-l)} H^{-\nu+l}|$$

ausfällt für $l = 1, 2, \ldots, \nu$.

Dann folgt aber aus (69)

$$(71)\qquad |B_k^{(\nu+1)} H^{-\nu-1}|$$
$$> |B_k^{(\nu)} H^{-\nu}| \cdot |H^{-1} h_1(\nu+1)| \left[1 - \left|\frac{h_2(\nu+1)}{h_1(\nu+1)}\right| \frac{1}{H} - \cdots - \left|\frac{h_{m+1}(\nu+1)}{h_1(\nu+1)}\right| \frac{1}{H^m}\right].$$

Man kann sich von vornherein H so groß denken, daß für den gewählten Wert von ν und für alle größeren die eckige Klammer auf der rechten Seite von (71) $> \frac{1}{2}$ wird; zugleich darf man annehmen, daß für das gewählte ν und alle größeren $H^{-1} \cdot |h_1(\nu+1)| \cdot \frac{1}{2} > 1$ ist.

Dann folgt aus (70) und (71) für $\lambda = 0, 1, 2 \ldots$

$$(72)\qquad |B_k^{(\nu+\lambda+1)} H^{-\nu-\lambda-1}| > |B_k^{(\nu+\lambda)} H^{-\nu-\lambda}| \cdot \left|\frac{h_1(\nu+\lambda+1)}{2H}\right|.$$

Multipliziert man die Ungleichungen (72) für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, l-1$ miteinander, so findet man

$$(73)\qquad |B_k^{(\nu+l)} H^{-\nu-l}|$$
$$> |B_k^{(\nu)} H^{-\nu}| \frac{1}{(2H)^l} \cdot |h_1(\nu+1) h_1(\nu+2) \ldots h_1(\nu+l)|.$$

Der Inhalt der letzten Ungleichung läßt sich auch so aussprechen:

Es gibt eine positive von Null verschiedene Zahl m der Art, daß für genügend großes λ

$$(74)\qquad B_k^{(\lambda)} > m^\lambda h_1(r+1) h_1(r+2) \ldots h_1(\lambda)$$

ist; r hat hier nur konstant ganzzahlig ≥ 0 und mindestens so groß zu sein, daß keiner der Faktoren $h_1(r+1)$, $h_1(r+2)$ usw. Null wird.

Die Ungleichung (74) läßt sich leicht zu dem viel präziseren Satze ausgestalten, daß der Grenzwert

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{B_k^{(\lambda)}}{h_1(r+1) h_1(r+2) \ldots h_1(\lambda)}$$

existiert und von Null verschieden ist.

Aus (74) folgt nämlich, da $h_1(\lambda)$ von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung in λ ist, daß mit $0 < \varepsilon < 1$

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{|B_k^{(\lambda)}|}{(\lambda!)^{1+\varepsilon}} = \infty \tag{75}$$

ist.

Es gibt also unendlich viele ν, für die

$$\frac{|B_k^{(\nu)}|}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} > \frac{|B_k^{(\nu-l)}|}{((\nu-l)!)^{1+\varepsilon}} \tag{76}$$

ist. $(l = 1, 2, \ldots, \nu.)$

Dann folgt aber aus der Rekursionsformel (69)

$$\frac{B_k^{(\nu+1)}}{((\nu+1)!)^{1+\varepsilon}} = \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_1(\nu+1)}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}} (1+\varepsilon_\nu). \tag{77}$$

Hier ist:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu = {} & \frac{B_k^{(\nu-1)}}{((\nu-1)!)^{1+\varepsilon}} : \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_2(\nu+1)}{\nu^{1+\varepsilon} h_1(\nu+1)} \\ & + \frac{B_k^{(\nu-2)}}{((\nu-2)!)^{1+\varepsilon}} : \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_3(\nu+1)}{(\nu(\nu-1))^{1+s} h_1(\nu+1)} + \cdots \\ & + \frac{B_k^{(\nu-m)}}{((\nu-m)!)^{1+\varepsilon}} : \frac{B_k^{(\nu)}}{(\nu!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_{m+1}(\nu+1)}{(\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1))^{1+\varepsilon} h_1(\nu+1)} \end{aligned} \tag{78}$$

und man sieht wegen (76) leicht ein, daß eine Zahl $K > 0$ existiert derart, daß für den ins Auge gefaßten Wert k und für hinreichend große ν

$$|\varepsilon_\nu| < \frac{K}{\nu^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{2} \tag{79}$$

ist.

Gleichzeitig kann man sich in (77) ν so groß denken, daß $\frac{(h_1(\nu+1))}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}} > 2$ ausfällt. Dann aber gilt für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$\frac{B_k^{(\nu+\lambda+1)}}{((\nu+\lambda+1)!)^{1+\varepsilon}} = \frac{B_k^{(\nu+\lambda)}}{((\nu+\lambda)!)^{1+\varepsilon}} \frac{h_1(\nu+\lambda+1)}{(\nu+\lambda+1)^{1+\varepsilon}} (1+\varepsilon_{\nu+\lambda}) \tag{80}$$

mit

$$|\varepsilon_{\nu+\lambda}| < \frac{K}{(\nu+\lambda)^{+\varepsilon 1}} < \frac{1}{2}. \tag{81}$$

Multipliziert man die Gleichungen (80) für $\lambda = 0, 1, \ldots, l-1$ miteinander, so folgt

$$B_k^{(\nu+l)} = \tag{82}$$
$$B_k^{(\nu)} h_1(\nu+1) h_2(\nu+2) \ldots h_1(\nu+l) \cdot (1+\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1}) \ldots (1+\varepsilon_{\nu+l-1}).$$

Da das unendliche Produkt $(1+\varepsilon_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1})\ldots$ absolut konvergiert — sein Grenzwert heiße P —, so besagt (82) die behauptete Existenz des von Null verschiedenen Grenzwerts

$$\lim_{l=\infty} \frac{B_k^{(\nu+l)}}{h_1(\nu+1)\ldots h_1(\nu+l)} = B_k^{(\nu)} \cdot P. \tag{83}$$

Wenn also i und k zwei beliebige, aber feste natürliche Zahlen sind, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{B_k^{(\lambda)}}{B_i^{(\lambda)}} \tag{84}$$

und ist von Null verschieden.

Ich betrachte insbesondere die m Grenzwerte

$$\beta_k = \lim_{\lambda=\infty} \frac{B_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}} \qquad -\ k = 1, 2, \ldots, m\ - \tag{85}$$

und beweise: es existiert eine positive Zahl L' derart, daß für $L > L'$

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{|\beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}|}{L^\lambda} = 0 \tag{86}$$

wird. $(k = 1, 2, \ldots, m.)$

Da $B_0^{(\lambda)}$ nach (83) von der Größenordnung $(\lambda!)^{m+1}$ ist, besagt (86) natürlich viel mehr wie (85).

Wäre (86) nicht richtig, so wäre für jede positive Zahl G

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \frac{|\beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}|}{G^\lambda} = \infty.$$

Da aber die Zahlen $D_k^{(\lambda)} = \beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}$ ganz wie die $B_k^{(\lambda)}$ dem Rekursionsgesetze (69) gehorchen, könnte man die Relationen (74), (83) für $D_k^{(\lambda)}$ an Stelle von $B_k^{(\lambda)}$ genau so ableiten

wie es vorhin geschehen ist, und man käme zu dem Resultate, daß ein endlicher von Null verschiedener Grenzwert

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{D_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}} = \beta_k - \frac{B_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}}$$

existiert, während tatsächlich dieser Grenzwert (s. (85)) gleich Null ist.

Man kann, indem man falls nötig die obige Zahl L' vergrößert, (86) auch so formulieren:

Es existiert eine von λ unabhängige Zahl L' derart, daß für $L > L'$

$$|\beta_k B_0^{(\lambda)} - B_k^{(\lambda)}| < L^{\lambda} \tag{87}$$

wird für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, m$.

Es wird behauptet: Die Ungleichung (87) gilt auch für $k = m+1, m+2, \ldots, \lambda$ unter dem Vorbehalt einer abermaligen (von λ unabhängigen) Vergrößerung der Zahl L'.

Die Differentialgleichung

$$y = x^{\nu} + Q_0 y' + Q_1(x) y'' + \cdots + Q_m(x) y^{(m+1)},$$

der $G_{\nu}(x)$ genügt, liefert folgende Rekursionsformeln für die Koeffizienten $B_k^{(\nu)}$:

$$B_k^{(\nu)} = \frac{-1}{h_{m+1}(k)} [B_{k-1}^{(\nu)} h_m(k-1) + B_{k-2}^{(\nu)} h_{m-1}(k-2) + \cdots$$
$$+ B_{k-m}^{(\nu)} h_1(k-m) - B_{k-m-1}^{(\nu)}] \qquad (m+1 \leq k < \nu); \tag{88}$$

für $k = \nu$ liefert diese Formel nicht $B_{\nu}^{(\nu)}$, sondern $B_{\nu}^{(\nu)} - 1$.

Die Koeffizienten der rechten Seite von (88), nämlich

$$\frac{h_{m-i}(k-i-1)}{h_{m+1}(k)} \; (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1) \quad \text{und} \quad \frac{-1}{h_{m+1}(k)}$$

bleiben ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke S, die von k und ν unabhängig ist.

Die Zahlen β_k als Grenzwerte der $\frac{B_k^{(\lambda)}}{B_0^{(\lambda)}}$ genügen ebenfalls den Rekursionsformeln (88):

$$(89)\qquad \beta_k = \frac{-1}{h_{m+1}(k)}\left[\beta_{k-1}h_m(k-1) + \beta_{k-2}h_{m-1}(k-2) + \cdots + \beta_{k-m}h_1(k-m) - \beta_{k-m-1}\right].$$

Wenn man hier auf der rechten Seite für jedes β_{k-i} den Näherungsausdruck $\frac{B_{k-i}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}$ einsetzt, und wenn man mit η_k das Maximum der Differenzen

$$\left|\beta_{k-i} - \frac{B_{k-i}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}\right| \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

bezeichnet, so wird der Fehler der linken Seite, d. h. die Differenz

$$(90)\qquad \left|\beta_k - \frac{B_k^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}\right| < \eta_k(m+1)S,$$

also jedenfalls

$$\leq \eta_k \cdot R,$$

wenn R sowohl $>(m+1)S$, als auch >1 ist.

η_m ist, wie bewiesen, $< \frac{L^\nu}{|B_0^{(\nu)}|}$, also

$$(91)\qquad \begin{gathered}\eta_{m+1} < \frac{R\cdot L^\nu}{|B_0^{(\nu)}|}, \quad \eta_{m+2} < \frac{R^2 L^\nu}{B_0^\nu}\cdots, \text{ endlich}\\ \eta_{\nu-1} < \frac{R^{\nu-m-1}L^\nu}{|B_0^{(\nu)}|} \quad \text{und} \quad \eta_\nu < \frac{R^{\nu-m}L^\nu + 1}{B_0^{(\nu)}},\end{gathered}$$

d. h. aber: sämtliche Differenzen $\left|\beta_k - \frac{B_k^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}\right|$ bleiben für $k = 1, 2, \ldots, \nu$ kleiner $\frac{(L')^\nu}{B_0^{(\nu)}}$, wo L' von ν unabhängig ist, w. z. b. w.

Insbesondere ist $|\beta_\nu| < \frac{(L')^\nu + 1}{B_0^{(\nu)}}$; denn $B_\nu^{(\nu)}$ ist $=1$; erinnert man sich noch, daß $B_0^{(\nu)}$ von der Größenordnung $\frac{1}{(\nu!)^{m+1}}$ ist, so sieht man, daß die β_ν Koeffizienten einer ganzen

transzendenten Funktion sind. Da die β_ν sich außerdem durch die Rekursionsformeln (89) bestimmen, genügt diese Funktion der Differentialgleichung (58).

Die Existenz von $V(x)$ ist somit bewiesen. Ersetzt man $V(x)$ durch das Polynom $1 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\nu x^\nu$, so begeht man nach dem soeben bewiesenen einen Fehler, der seinem absoluten Betrage nach $< \frac{T^\nu}{B_0^{(\nu)}} |x|^\nu e^{|x|}$ ist, wo jetzt unter T eine (zugleich im Hinblick auf das Folgende) passend gewählte, von ν unabhängige positive Zahl verstanden wird; andererseits ist die Differenz zwischen diesem Polynom und $\frac{1}{B_0^{(\nu)}} G_\nu(x)$ dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{T^\nu}{B_0^{(\nu)}} (1 + |x| + |x^2| + \cdots + |x^\nu|) < \frac{T^\nu (\nu+1)(|x|+1)^\nu}{B_0^\nu};$$

kurz man sieht, es gibt eine positive von ν unabhängige Zahl M derart, daß

$$|G_\nu(0) V(x) - G_\nu(x)| < M^\nu (|x|+1)^\nu e^{|x|} \tag{92}$$

wird.

Ist endlich wieder $g(x)$ irgend ein Polynom und $G(x)$ das aus ihm durch die Operation (64) entstehende Polynom, so folgt wieder aus dem distributivem Gesetz, nach welchem $g(x) = g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x)$ auch $G(x) = G^{(1)}(x) + G^{(2)}(x)$ nach sich zieht, allgemein

$$|G(0) V(x) - G(x)| < e^{|x|} g(M(|x|+1)) \tag{93}$$

oder

$$G(0) V(x) = G(x) + \Theta g(M(|x|+1)). \tag{93'}$$

Diese Gleichung entspricht Gleichung (20) des zweiten Paragraphen und erfüllt für den Beweis genau den nämlichen Zweck, wiewohl jetzt die Annäherung von $G(x)$ an $G(0) \cdot V(x)$ oder wenigstens die Abschätzung dieser Annäherung eine etwas schlechtere ist.

Der zahlentheoretische Teil des Beweises kann sodann fast wörtlich wie im zweiten Paragraphen zu Ende geführt werden.

Da die Fassung der bewiesenen Sätze eine sehr allgemeine ist, erscheint es nicht überflüssig, spezielle Fälle besonders zu formulieren, z. B.: Wenn x_0 und x_1 irgend welche nicht notwendig voneinander verschiedene rationale Zahlen, aber keine Nullstellen von $Q_m(x)$ sind und wenn ferner μ, ν irgend welche positive Differentiationsindizes bedeuten (einschließlich der Null), dann ist der Quotient $\frac{V^{(\mu)}(x_0)}{V^{(\nu)}(x_1)}$ irrational (selbstverständlich abgesehen von der Kombination $\mu = \nu$, $x_0 = x_1$); auch Zähler und Nenner dieses Bruches sind einzeln irrational mit der einzigen Ausnahme, daß nach Definition $V(0) = 1$ ist.