

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1913

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale.

Von **Edmund Landau** in Göttingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Juni 1913.

Es sei die (reelle oder komplexe) Funktion $\varphi(x)$ für $x > 1$ definiert und für jedes $y > 1$ von $x = 1$ bis $x = y$ eigentlich integrabel. In Analogie eines Tauberschen Potenzreihensatzes hatte ich¹⁾ bewiesen:

Es sei für $x \rightarrow \infty$

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right),$$

also (a fortiori)

$$f(s) = \int_1^{\infty} \varphi(x) x^{-s} dx$$

für $s > 0$ konvergent. Für $s \rightarrow 0$ sei

$$f(s) \rightarrow l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^{\infty} \varphi(x) dx = l,$$

das heißt für $x \rightarrow \infty$

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y) dy \rightarrow l.$$

In Analogie eines Littlewoodschen (den Tauberschen enthaltenden) Potenzreihensatzes läßt sich zeigen, daß diese Behauptung richtig bleibt, wenn die Voraussetzung

¹⁾ Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XVIII (1907), S. 8–28], S. 25–27.

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

durch die geringere

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

ersetzt wird. Dies ist bisher nirgends gemacht worden und soll auch hier nur als Spezialfall eines neuen allgemeineren Integralsatzes bewiesen werden, der so dazu steht wie meine¹⁾ Verallgemeinerung des Littlewoodschen Potenzreihensatzes zu diesem selbst. Den wesentlichsten Kunstgriff beim Beweise habe ich aus Herrn Littlewoods Abhandlung übernommen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der

Satz: Es sei für $x \geq 1$

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(y) dy$$

beschränkt:

$$|\Phi(x)| \leq K,$$

also

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} dx$$

für $s > 0$ konvergent und

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| = \left| \int_u^v \varphi(y) dy \right| \leq 2K \quad \text{für } 1 \leq u \leq v.$$

Es bezeichne $\psi(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ die hiernach endliche obere Grenze von

$$\left| \int_u^v \varphi(y) dy \right|$$

für jedes Wertepaar u, v , das den Ungleichungen

$$1 \leq u \leq v \leq u^{1+\varepsilon}$$

¹⁾ Über einen Satz des Herrn Littlewood [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXV (1913), S. 265–276], § 3 (S. 270–273).

genügt. Es sei für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\psi(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Es sei für $s \rightarrow 0$

$$f(s) \rightarrow l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^{\infty} \varphi(x) dx = \lim_{x=\infty} \Phi(x) = l.$$

Vorbemerkung: Dieser Satz enthält den oben angekündigten (meinen 1907er Wortlaut mit O statt o , d. h. die Behauptung: Aus $\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$, $f(s) \rightarrow l$ folgt $f(0) = l$). Denn aus

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right), \quad f(s) = O(1)$$

folgt nach einem anderen Satze meiner 1907er Arbeit¹⁾

$$\Phi(x) = O(1).$$

Aus

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \log x}\right)$$

folgt ferner, wenn c so gewählt wird, daß für $x \geq 1$

$$|\varphi(x)| < \frac{c}{x \log(2x)}$$

ist, für $1 \leq u \leq v \leq u^{1+\varepsilon}$ (bei jedem $\varepsilon > 0$)

$$\begin{aligned} \left| \int_u^v \varphi(y) dy \right| &\leq c \int_u^{u^{1+\varepsilon}} \frac{dy}{y \log(2y)} \\ &= c \log \frac{\log(2 u^{1+\varepsilon})}{\log(2u)} \\ &< c \log \frac{\log((2u)^{1+\varepsilon})}{\log(2u)} \\ &= c \log(1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

¹⁾ L. c., S. 27–28.

also

$$\begin{aligned}\psi(\varepsilon) &\leq c \log(1 + \varepsilon), \\ \psi(\varepsilon) &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $l = 0$ angenommen werden, da man sonst nur die Definition von $\varphi(x)$ auf der Strecke $1 \leq x \leq 2$ abzuändern hätte.

Nach der Voraussetzung

$$\Phi(x) = O(1)$$

ist

$$f(s) = \int_1^{\infty} \varphi(x) x^{-s} dx$$

nicht nur für $s > 0$ konvergent, sondern ebenda beliebig oft unter dem Integralzeichen differenzierbar¹⁾. Für $s > 0$ und ganzes²⁾ $r \geq 1$ ist demgemäß

$$f^{(r)}(s) = (-1)^r \int_1^{\infty} \varphi(x) x^{-s} \log^r x dx$$

und wegen³⁾

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \Phi(x) x^{-s-1} dx,$$

da auch hier Differenzieren unter dem Integralzeichen gestattet ist,

$$\begin{aligned}f^{(r)}(s) &= (-1)^{r-1} r \int_1^{\infty} \Phi(x) x^{-s-1} \log^{r-1} x dx \\ &+ (-1)^r s \int_1^{\infty} \Phi(x) x^{-s-1} \log^r x dx.\end{aligned}$$

Wegen

$$|\Phi(x)| \leq K$$

ist für festes $r \geq 1$

¹⁾ Bekanntlich gilt dies sogar in der Halbebene $\Re(s) > 0$; vgl. z. B. meine Arbeit Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen [diese Sitzungsberichte, Bd. XXXVI (1906), S. 151—218], S. 212, Satz III'''.
²⁾ r ist in der Folge durchweg ganz.
³⁾ Vgl. z. B. die in der vorletzten Anmerkung zitierte Abhandlung, S. 212, Z. 1.

$$\begin{aligned}
|f^{(r)}(s)| &\leq Kr \int_1^\infty x^{-s-1} \log^{r-1} x \, dx + Ks \int_1^\infty x^{-s-1} \log^r x \, dx \\
&= Kr(-1)^{r-1} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \int_1^\infty x^{-s-1} \, dx + Ks(-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \int_1^\infty x^{-s-1} \, dx \\
&= Kr(-1)^{r-1} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left(\frac{1}{s} \right) + Ks(-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \left(\frac{1}{s} \right) \\
&= Kr \frac{(r-1)!}{s^r} + Ks \frac{r!}{s^{r+1}} \\
&= \frac{2Kr!}{s^r} \\
&= O\left(\frac{1}{s^r}\right).
\end{aligned}$$

Nach dem (von Herrn Littlewood herrührenden) Hilfssatz 2 meiner Arbeit aus den Rendiconti (in dem hier $x = 1 - s$ zu substituieren ist) ist also für $r \geq 0$

$$s^r f^{(r)}(s) \rightarrow 0;$$

wenn für $s > 0$, $r \geq 0$

$$s^{r+1} \int_1^\infty \Phi(x) x^{-s-1} \log^r x \, dx = h_r(s)$$

gesetzt wird, ist folglich

$$f(s) = h_0(s) \rightarrow 0,$$

$$s^r f^{(r)}(s) = (-1)^{r-1} r h_{r-1}(s) + (-1)^r h_r(s) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \geq 1,$$

also

$$h_r(s) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \geq 0.$$

Nun ist für $\xi > 1$, $s > 0$, $r \geq 1$

$$\begin{aligned}
h_r(s) &= \Phi(\xi) s^{r+1} \int_1^\infty x^{-s-1} \log^r x \, dx + s^{r+1} \int_1^\infty (\Phi(x) - \Phi(\xi)) x^{-s-1} \log^r x \, dx \\
&= \Phi(\xi) r! + s^{r+1} \int_1^\infty (\Phi(x) - \Phi(\xi)) x^{-s-1} \log^r x \, dx,
\end{aligned}$$

$$|\Phi(\xi)| r! \leq |h_r(s)| + s^{r+1} \int_1^\infty |\Phi(x) - \Phi(\xi)| x^{-s-1} \log^r x \, dx.$$

Es sei jetzt ein $\varepsilon > 0$ fest gegeben.

Für $\xi > 1$, $s > 0$, $r \geq 1$ ist mit Rücksicht auf die Definition von $\psi(\varepsilon)$ (da auf der Strecke $\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}} < x \leq \xi^{1+\varepsilon}$ entweder $\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq x \leq \left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{1+\varepsilon}$ oder $\xi < x \leq \xi^{1+\varepsilon}$ ist)

$$\begin{aligned} \int_{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}^{\xi^{1+\varepsilon}} |\Phi(x) - \Phi(\xi)| x^{-s-1} \log^r x \, dx &\leq \psi(\varepsilon) \int_{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}^{\xi^{1+\varepsilon}} x^{-s-1} \log^r x \, dx \\ &\leq \psi(\varepsilon) \int_1^{\infty} x^{-s-1} \log^r x \, dx \\ &= \psi(\varepsilon) r!. \end{aligned}$$

Andererseits ist für $\xi > 1$, $r \geq 1$, wenn s den speziellen Wert $s = \frac{r}{\log \xi}$ hat,

$$\int_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} |\Phi(x) - \Phi(\xi)| x^{-s-1} \log^r x \, dx \leq 2K \int_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} x^{-s-1} \log^r x \, dx,$$

also, weil $x^{-s} \log^r x$ sein Maximum bei $x = \xi$ hat¹⁾,

$$\begin{aligned} &\leq 2K \int_1^{\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}} x^{-s-1} \log^r x \, dx \\ &= 2K \frac{r^{r+1}}{\log^{r+1} \xi} \left(\xi^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)^{-\frac{r}{\log \xi}} \frac{\log^r \xi}{(1+\varepsilon)^r} \frac{\log \xi}{1+\varepsilon} \\ &= \frac{2K}{1+\varepsilon} r^{r+1} e^{-r\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \log(1+\varepsilon)\right)} \\ &= o(r^r e^{-r}) \\ &= o(r!), \end{aligned}$$

¹⁾ Wegen $\frac{d}{dx}(x^{-s} \log^r x) = -s x^{-s-1} \log^r x + r x^{-s-1} \log^{r-1} x$
 $= x^{-s-1} \log^{r-1} x (-s \log x + r) = s x^{-s-1} \log^{r-1} x (-\log x + \log \xi).$

ferner

$$\begin{aligned}
 s^{r+1} \int_{\xi^{1+\varepsilon}}^{\infty} |\Phi(x) - \Phi(\xi)| x^{-s-1} \log^r x \, dx &\leq 2 K s^{r+1} \int_{\xi^{1+\varepsilon}}^{\infty} x^{-s-1} \log^r x \, dx \\
 &= 2 K s^{r+1} (1+\varepsilon)^r \int_{\xi}^{\infty} y^{-(1+\varepsilon)(s+1)} \log^r y \cdot (1+\varepsilon) y^{\varepsilon} \, dy \\
 &= 2 K s^{r+1} (1+\varepsilon)^{r+1} \int_{\xi}^{\infty} y^{-s(1+\varepsilon)-1} \log^r y \, dy \\
 &\leq 2 K s^{r+1} (1+\varepsilon)^{r+1} \xi^{-s\varepsilon} \int_{\xi}^{\infty} y^{-s-1} \log^r y \, dy \\
 &\leq 2 K s^{r+1} (1+\varepsilon)^{r+1} \xi^{-s\varepsilon} \int_1^{\infty} y^{-s-1} \log^r y \, dy \\
 &= 2 K r! (1+\varepsilon) (1+\varepsilon)^r e^{-r\varepsilon} \\
 &= o(r!).
 \end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $r = r(\varepsilon)$ derart, daß für $\xi > 1$

$$|\Phi(\xi)| r! \leq \left| h_r \left(\frac{r}{\log \xi} \right) \right| + \psi(\varepsilon) r! + \varepsilon r! + \varepsilon r!$$

ist. Für $\xi > \xi_0(r) = \xi_0(\varepsilon)$ ist aber

$$\left| h_r \left(\frac{r}{\log \xi} \right) \right| < \varepsilon r!,$$

also

$$\begin{aligned}
 |\Phi(\xi)| r! &< (3\varepsilon + \psi(\varepsilon)) r!, \\
 |\Phi(\xi)| &< 3\varepsilon + \psi(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Wegen $\psi(\varepsilon) \rightarrow 0$ ist daher

$$\Phi(\xi) \rightarrow 0.$$

Göttingen, den 28. Mai 1913.